

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

**Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen
Widerstandsformel**

Noether, Fritz

Leipzig, 1912

§ 3. Diskussion der ersten Annäherung

[urn:nbn:de:bsz:31-272814](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-272814)

$$\text{Also} \quad c_{31} = \frac{a^5}{24}; \quad c_{32} = -\frac{a^3}{24}$$

$$(20) \quad \text{und } \psi_1 = -\frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3(\vartheta) \left(\frac{aR^2}{12} - \frac{a^2R}{8} - \frac{a^3}{24} - \frac{a^4}{24R} + \frac{a^5}{24R^2} \right) \\ = \frac{3}{32} S U \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \frac{(R-a)^2 (2R^2 + aR + a^2)}{R^2}.$$

Nehmen wir das Glied ψ_0 aus Gl. (10) hinzu, so erhalten wir endlich als erste Annäherung:

$$(21) \quad \psi_0 + \psi_1 = -\frac{U}{4} \sin^2 \vartheta \frac{(R-a)^2}{R^2} \left[R(2R+a) \right. \\ \left. - \frac{3}{8} S \cos \vartheta (2R^2 + aR + a^2) \right].$$

Aus Gleichung (21) ist ohne weiteres ersichtlich, daß der Einfluß des ersten Näherungsgliedes ψ_1 nur von dem numerischen Wert der Reynoldsschen Zahl $S = \frac{\sigma U a}{\mu}$ abhängen kann.

§ 3. Diskussion der ersten Annäherung.

Die Gleichung (21) läßt vorläufige Schlüsse auf die Strömungsform ziehen, die unter dem Einfluß der Trägheit eintreten wird. Die tangentielle Geschwindigkeitskomponente,

$$v_\vartheta = u \sin \vartheta - q \cos \vartheta \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} r - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} x = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial R}$$

verschwindet den Randbedingungen entsprechend für die Kugeloberfläche $R = a$. Ihr Anstieg senkrecht zur Oberfläche

$$\left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial R} \right)_{R=a}$$

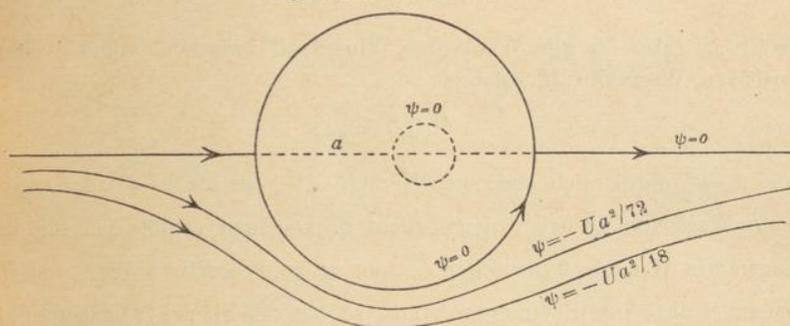
dagegen hat einen endlichen Wert und gibt ein Bild für die Strömungsverteilung in der Nähe der Kugel. Man erhält mit Rücksicht auf das Verschwinden von $\frac{\partial \psi}{\partial R}$ für $R = a$:

$$\left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial R} \right)_{R=a} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right)_{R=a} = -\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \quad (R=a) \\ = \frac{U}{2} \sin \vartheta \frac{R(2R+a) - \frac{3}{8} S \cos \vartheta (2R^2 + aR + a^2)}{R^3} \quad (R=a) \\ (22) \quad = \frac{3}{2} \frac{U}{a} \sin \vartheta \left(1 - \frac{S}{2} \cos \vartheta \right).$$

Hiernach ist der Geschwindigkeitsanstieg, der bei der Stokesschen Bewegung auf der Vorder- und Rückseite der Kugel gleich war (da $\sin \vartheta =$

$\sin(\pi - \vartheta)$), durch das Hinzutreten des ersten Näherungsgliedes $\frac{S}{2} \cos \vartheta$ unsymmetrisch geworden. Auf der der Strömung entgegenstehenden Vorderseite der Kugel ($\frac{\pi}{2} \leq \vartheta < \pi, \cos \vartheta < 0$) ist der zusätzliche Geschwindigkeitsanstieg gleichgerichtet mit dem ursprünglichen für $S=0$, die Geschwindigkeit ist daher auf der Vorderseite erhöht gegen die der Stokesschen Bewegung. Auf der Rückseite der Kugel dagegen ($0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}, \cos \vartheta > 0$) ist der zusätzliche Geschwindigkeitsanstieg dem ursprünglichen entgegengerichtet und der Gesamtanstieg ist daher hier verzögert gegen den der Stokesschen Bewegung (s. Fig. 1). Dieses Geschwindigkeitsbild erinnert offenbar schon an die wirklich unter dem Ein-

Fig. 1. Stromlinie für $S=1$.



fluß der Trägheit stattfindende Strömung: Wenig beeinflusste Strömung bis nahe an die Vorderseite der Kugel heran; „Totwasser“, bzw. ein Gebiet wirbelnder Bewegung hinter der Kugel. Gehen wir einen Schritt weiter und lassen S in der Formel (22), ohne Rücksicht auf die noch unerledigte Konvergenzfrage, genügend groß werden. Sobald $S > 2$ geworden ist, überwiegt für kleine Werte von ϑ (wenn also $\cos \vartheta$ nahe an 1 liegt) die rückströmende Zusatzbewegung über die ursprüngliche Vorwärtsbewegung, es tritt im Ganzen Rückwärtsströmung auf der Rückseite der Kugel ein, eine Bewegungsform, die der unter gewöhnlichen Verhältnissen (d. h. bei großen Werten der Reynoldsschen Zahl S) beobachteten qualitativ ähnlich ist.

Der vollständige Ausdruck der Stromfunktion (Gl. 21) gibt näheren Aufschluß über die Strömung in der Nähe der Kugel. Die Rotationsflächen $\psi = \text{const}$, die „Stromflächen“, enthalten bekanntlich vollständig die Stromlinien, ihr Verlauf ergibt sich qualitativ aus dem Verlauf der Fläche $\psi = 0$. Letztere zerfällt in drei Bestandteile:

(1) $\sin^2 \vartheta = 0$, d. i. die X -Achse, die wegen der Rotationssymmetrie selbst Stromlinie sein muß.

(2) $(R - a)^2 = 0$, die Kugeloberfläche selbst, die nach den Bedingungen der Aufgabe Stromfläche ist.

(3) Die Fläche:

$$R(2R + a) - \frac{3}{8} S \cos \vartheta (2R^2 + aR + a^2) = 0$$

oder
$$R(2R + a) = a^2 \frac{\frac{3}{8} S \cos \vartheta}{1 - \frac{3}{8} S \cos \vartheta}.$$

Die letztere Gleichung bestimmt, als quadratische Gleichung für R aufgefaßt, einen positiven Wert von R , solange die Bedingung

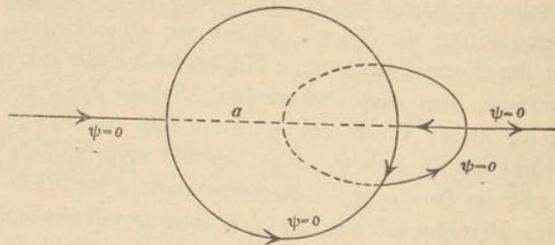
$$0 < \cos \vartheta < \frac{8}{3}$$

erfüllt ist, also für alle Werte des Winkels ϑ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ einen positiven Wert von R , solange

$$0 < S < \frac{8}{3}.$$

Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich stets der Wert $R = 0$ und für $\vartheta = 0$ der maximale Wert von R bei vorgegebenem S . Dagegen ergibt sich für die Lagen des Winkels ϑ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π kein positiver Wert von R . Wenn S die obige Bedingung erfüllt, so hat die Fläche (3) daher einen geschlossenen reellen Teil, der ganz im Halbraum positiver x , d. h. in

Fig. 2. Stromlinie $\psi = 0$ für $S = 2, 2$.



dem Halbraum verläuft, der, im Sinne der Strömung aufgefaßt, die rückwärtige Kugelhälfte enthält (s. Fig. 1 u. 2). Ihr Radiusvektor nimmt von dem Werte $R = 0$ für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ausgehend

stetig zu bis zu dem Maximalwerte bei $\vartheta = 0$, der $R = a$ wird, wenn $S = 2$ angenommen ist. Solange also $S < 2$, so verläuft die Fläche (3) durchaus im Innern der Kugel vom Radius a und kommt als Stromfläche nicht in Betracht. Wenn aber $S > 2$ ist, so tritt ein Teil von ihr über die Kugel auf deren Rückseite hinaus und bildet eine reale Stromfläche. Sie trennt von der äußeren Strömung ein Gebiet auf der Rückseite der Kugel ab, in dem wirbelnde Strömung stattfinden muß, der äußeren Strömung gleichgerichtete Bewegung längs der Innenseite der Fläche (3), Rückströmung längs

der Kugeloberfläche, wie wir oben schon für $S > 2$ aus dem Geschwindigkeitsanstieg schlossen. Man erhält also das Bild des bei größeren Geschwindigkeiten beobachteten Wirbelringes auf der Rückseite der Kugel.

Als untere Grenze für den Eintritt der Wirbelbildung ergibt sich der Wert der Reynoldsschen Zahl $S = 2$. Da allerdings diese Grenze über das Gebiet kleiner Reynoldsscher Zahl, der Voraussetzung unserer Näherung, hinausfällt, so bleibt abzuwarten, wie weit die Grenze durch die weitere Entwicklung noch verschoben wird. Es ist noch zu bemerken, daß mit wachsendem S der Wirbelring sich sehr rasch, besonders für kleine Werte von ϑ , vergrößert, doch handelt es sich hier wohl um eine Wirkung der Vernachlässigung höherer Glieder, wie die Fortsetzung der Entwicklung zeigen würde.

§ 4. Widerstand nach der ersten Annäherung.

Der Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel hängt von dem Widerstand ab, den die aus der Stokesschen und der Annäherungsbewegung zusammengesetzte Bewegung ergibt. Es ist indes leicht einzusehen, daß die bisher aufgestellte Näherungsbewegung noch keinen Beitrag zum Widerstand liefert; wir beweisen das an den expliziten Formeln für den Widerstand.

Bezeichnet n die Normale eines Flächenelements an der Grenze einer inkompressiblen reibenden Flüssigkeit, s eine beliebige Richtung in diesem Flächenelement, so ist der Ansatz für die Spannungen in diesem Flächenelement, der den Differentialgleichungen (1) zu grunde liegt, der folgende¹⁾:

Die Normalspannung (positiv, wenn vom Flächenelement nach der Seite der Flüssigkeit hin gerichtet) ist

$$(23) \quad p_{nn} = -p + 2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n},$$

die Tangentialspannung in Richtung s :

$$(24) \quad p_{ns} = \mu \left(\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \right),$$

wo v_n und v_s die Geschwindigkeitskomponenten in den betreffenden Richtungen bedeuten. Die Größen v_n und v_s sind hier aus den gefundenen Formeln für die Stromfunktion $\psi = \psi_0 + \psi_1$ zu entnehmen, während p bis auf eine belanglose additive Konstante aus den Grundgleichungen (1) bestimmt ist. Wir erhalten aus diesen für die Kugeloberfläche, mit Rücksicht darauf, daß nach den Randbedingungen die Geschwindigkeits-

1) S. Fußnote auf S. 8.