Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1865

Widerstände eines Trains

urn:nbn:de:bsz:31-278533

Widerstände eines Trains. Eine ganz genaue Kenntniss der Widerstände, welche der Bewegung eines Wagenzuges entgegenwirken, wäre für den Bau der Bahn, so wie auch für die Konstruktion der Wägen von sehr grosser Wichtigkeit. Wären diese Widerstände ganz genau bekannt, so würde man daraus ersehen, wie die Bahn und wie die Wägen zu bauen wären, um die Widerstände der Bewegung und die verschiedenen zweckwidrigen schlängelnden und gaukelnden Bewegungen der Wägen möglichst zu vermindern. Insbesondere würde man durch die Kenntniss der wahren Gesetze der Widerstände die zweckmässigste Spurweite der Bahn, die angemessenste Grösse und Umfangsform der Räder, die Entfernung der Axen und das System der Federung best möglichst zu bestimmen im Stande sein. Allein eine scharfe Bestimmung der Wagenbewegungen auf Eisenbahnen ist mit nicht geringen Schwierigkeiten verbunden, denn der Ursachen, welche auf diese Bewegung Einfluss haben, gibt es gar zu viele. Es hängt diese Bewegung ab: 1) von den Krümmungsverhältnissen der Bahn; 2) von ihrer Steigung; 3) von den Unebenheiten der Schienen und der mehr oder weniger vollkommenen Verbindung derselben; 4) von der Spurweite; 5) von der Querschnittsform der Schienen; 6) von der Anzahl, Grösse und Umfangsform der Räder; 7) von der Entfernung der Axen und ihrer gegenseitigen Beweglichkeit; 8) von dem Systeme der Federung; 9) von der Lage des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues gegen die Axen und insbesondere von der Höhe dieses Schwerpunktes über den Axen u. s. w.

Für den Lokomotivbau, welchen wir hier nur allein im Auge haben, ist eine so scharfe Kenntniss der Widerstände nicht so dringend nothwendig; es genügt für diesen Zweck diejenige Genauigkeit, welche durch Versuche und Beobachtungen erreicht werden kann. Die bis jetzt durch Versuche erreichte Genauigkeit ist aber eben keine grosse; die Resultate, welche verschiedene gleich achtenswerthe Beobachter gefunden haben, weichen sehr beträchtlich von einander ab, und es kann nicht wohl anders sein, denn die Bewegungen sind einmal so komplizirt, geschehen theilweise so regellos und mit so grosser Geschwindigkeit, dass von genauen Messungen der Erscheinungen gar nicht die Rede sein kann.

W. Harding gibt für den Widerstand eines Wagenzuges ohne Lokomotive folgenden Ausdruck:

$$W_1 = T_1 \left(6 + \frac{V_1}{3} + \frac{0{\cdot}0025\ F_1\ V_1^2}{T_1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

In demselben bedeutet:

W_1 den Widerstand des Trains in englischen Pfunden zu 0.454 Kilg.

T_1 das Gewicht des Trains in englischen Tonnen zu 1016 Kilg.

F_1 die Stirnfläche des vordersten Wagens in englischen Quadratfussen zu 0.093 Quadradmetern.

V_1 die Geschwindigkeit des Trains in einer Stunde in englischen Meilen zu 1609 Meter.

Das erste Glied innerhalb der Klammer bezieht sich auf die Axenreibungen, das zweite der Geschwindigkeit proportionale Glied soll den Widerstand bestimmen, den die Bahn und die schlängelnde Bewegung des Wagenzuges verursacht; das dritte Glied bezieht sich auf den Luftwiderstand.]

Um diese Formel in französische Maasseinheiten zu übersetzen, nennen wir:

W den Widerstand des Trains in Kilogrammen.

T das Gewicht des Trains in Tonnen à 1000 Kilogramme.

F die Stirnfläche des vordersten Wagens in Quadratmetern.

V die Geschwindigkeit des Trains in Metern in einer Sekunde.

Dann ist:

$$W_1 = 2{\cdot}205\ W \qquad T_1 = 0{\cdot}984\ T \qquad F_1 = 10{\cdot}75\ F \qquad V_1 = 2{\cdot}23\ V$$

Führt man diese Werthe in den Ausdruck (1) ein, so findet man:

$$W = T\left[2{\cdot}680 + 0{\cdot}3323\ V + 0{\cdot}0609\ \frac{F V^2}{T}\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Es wird gewöhnlich behauptet, dass dieser Ausdruck mit der „Erfahrung" ziemlich gut stimmende Werthe gebe. Dies scheint jedoch nicht möglich zu sein. Der Coeffizient des zweiten Gliedes ist wahrscheinlich viel zu gross, und der Luftwiderstand richtet sich doch nicht blos nach der Stirnfläche des vordersten Wagens, sondern auch nach der Anzahl der Wagen des Trains.

D. Gooch berechnet den Widerstand eines Trains mit Lokomotive vermittelst folgender Formel, in welcher W_1 T_1 V_1 die früher angegebene Bedeutung haben und durch L_1 das Gewicht der Lokomotive in englischen Tonnen, $\mathfrak{B}_1$ das Volumen des Trains in englischen Kubikfussen bezeichnet ist:

$$W = \left\{\begin{array}{l} L_1\left[5 + 0{\cdot}5\ V_1 + 0{\cdot}00004\ T_1\ V_1^2\right] \\ + 0{\cdot}00002\ \mathfrak{B}_1\ V_1^2 \\ + \frac{1}{15}\ V_1\ T_1 \\ + 6\ T_1 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Das erste Glied bestimmt den Widerstand der Lokomotive mit Einschluss des Tenders in englischen Pfunden, das zweite Glied bestimmt den Luftwiderstand, das dritte den Widerstand, den die Unebenheit der Bahn und die schlängelnde Bewegung der Wägen verursacht, das vierte Glied endlich die Axenreibung.

Reduzirt man diese Werthe auf französische Einheiten, indem man setzt:

$$W_1 = 2{\cdot}205\ W \qquad T_1 = 0{\cdot}984\ T \qquad V_1 = 2{\cdot}23\ V \qquad \mathfrak{V}_1 = 35{\cdot}3\ V$$

wobei $\mathfrak{V}$ das Volumen des Trains in Kubikmetern bedeutet, so findet man:

$$\frac{W}{T} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{T}\left[2{\cdot}23 + 0{\cdot}138\ V + 0{\cdot}0000068\ T\ V^2\right] \\ + 0{\cdot}000124\ \frac{\mathfrak{V}\ V^2}{T} \\ + 0{\cdot}0185\ V \\ + 2{\cdot}68 \end{array} \right\} \quad . \ . \ (4)$$

Diese Berechnungsweise verdient aber wenig Vertrauen. Das Glied $0{\cdot}0000068\ T\ V^2$ scheint mit der Natur der Sache in keinem richtigen Zusammenhang zu sein, der Luftwiderstand des Trains ist seinem Volumen proportional angenommen, was gewiss unrichtig ist, und der von der schlängelnden Bewegung herrührende Widerstand ist wahrscheinlich zu klein in Rechnung gebracht; wenigstens ist es auffallend, dass er 5 Mal kleiner ist, als nach der Regel von *Harding*.

Ich glaube, dass man durch die folgende Berechnung, die auf einer Combination der durch verschiedene Beobachter gemachten Erfahrungen beruht, der Wahrheit näher kommen dürfte, als durch die Berechnungen von *W. Harding* und von *Gooch*.

Widerstand des Trains und der Lokomotive. (Englische Maasseinheiten.)

1. Axenreibung eines Trains ohne Lokomotive, sowohl nach *Harding* als nach *Gooch*	$6\ T_1$
2. Widerstand, den die Bewegung des Trains auf der Bahn theils durch ihre Unebenheiten, theils durch die schlängelnde Bewegung verursacht, nach *Gooch*	$\frac{1}{15}\ V_1\ T_1$
3. Axenreibung der Lokomotive nach *Pambour*	$6\ L_1$
4. Reibungswiderstand, den die Mechanismen der Lokomotive verursachen, wenn dieselbe keinen Train zieht, nach *Pambour* . . .	$8\ L_1$

5. Bahn- und Rollungswiderstand der Lokomotive nach *Gooch* . . . . $\frac{1}{2} L_1 V_1$

6. Zunahme der Maschinenreibung, wenn die Lokomotive einen Train fortzieht, der einen Widerstand W_1 verursacht, nach *Pambour* $0.14 W_1$

7. Luftwiderstand des ganzen Trains sammt Lokomotive, nach *Pambour* . . . . . $0.0025 (F_1 + \frac{1}{4} i f) V_1^2$

   Hier bedeutet F_1 die Stirnfläche des Trains, f die Stirnfläche eines Wagens, i die Anzahl der Wägen.

8. Neigung der Bahn . . . . $2200 \sin \alpha (T_1 + L_1)$

   wobei α den Neigungswinkel der Bahn bezeichnet.

9. Krümmungswiderstand . . . . K_1

   Der Werth von K_1 wird in der Folge bestimmt werden.

Die Summe dieser Glieder gibt den Totalwiderstand W_1. Bildet man diese Summe, setzt dieselbe gleich W_1 und sucht aus dieser Gleichheit den Werth von W_1, so findet man:

$$W_1 = 6{\cdot}97\, T_1 + 0{\cdot}077\, T_1 V_1 + 16{\cdot}27\, L_1 + 0{\cdot}581\, L_1 V_1 + 0{\cdot}0029 \left(F_1 + \frac{1}{4} i f_1\right) V_1^2 + 2556 \sin \alpha (T_1 + L_1) + 1{\cdot}162\, K_1$$

Um den Widerstand mit französischen Einheiten zu berechnen, hat man zu setzen:

$W_1 = 2{\cdot}205\, W$ $T_1 = 0{\cdot}984\, T$ $L_1 = 0{\cdot}984\, L$ $F_1 = 10{\cdot}75\, F$
$f_1 = 10{\cdot}85\, f$ $K_1 = 2{\cdot}205\, K$ $V_1 = 2{\cdot}23\, V$

und dann findet man:

$$W = 3{\cdot}11\, T + 0{\cdot}077\, V T + 7{\cdot}25\, L + 0{\cdot}577\, L V + 0{\cdot}0704 \left(F + \frac{1}{4} i f\right) V^2 + 1162 \sin \alpha (T + L) + 1{\cdot}162\, K$$

oder auch:

$$W = (3{\cdot}11 + 0{\cdot}077\, V)\, T + (7{\cdot}25 + 0{\cdot}577\, V)\, L + 0{\cdot}0704 \left(F + \frac{1}{4} i f\right) V^2 + 1162 \sin \alpha (T + L) + 1{\cdot}162\, K$$

Mittelst dieser Formel ist die nachstehende Tabelle unter folgenden Voraussetzungen berechnet:

$\sin.\alpha = 0 \quad K = 0 \quad F = 7 \quad f = 4 \quad i = \frac{T}{7} \quad L = 20$

d. h. es ist angenommen, dass auf einer horizontalen geraden Bahnstrecke mit einer Lokomotive von 20 Tonnen Gewicht, deren Stirnfläche 7 Quadratmeter beträgt, Wagen fortgeschafft werden, von denen jeder 7 Tonnen wiegt und eine Stirnfläche von 4 Quadratmetern hat.

Widerstände, welche jede Tonne von dem Totalgewicht des Trains mit Einschluß der Lokomotive auf horizontaler gerader Bahn verursacht.

Gewicht des Trains.	Werthe von $\frac{W}{L+T}$ wenn die Geschwindigkeit in Metern in einer Sekunde beträgt:				
	10	12	14	16	18
Tonnen.	Kilog.	Kilog.	Kilog.	Kilog.	Kilog.
50	7·90	8·98	10·17	11·61	12.91
100	6·65	7·57	8·51	9·56	10·76
150	6·13	6·92	7·81	8·78	9·87
200	5·84	6·58	7·63	8·35	9·39

Diese Werthe sind wahrscheinlich etwas zu klein, denn der Bahnwiderstand ist nach *Gooch* in Rechnung gebracht, und der Luftwiderstand der Räder ist unberücksichtigt geblieben.

Bedingungen, unter welchen ein vierrädriger Wagen ohne Zwang in einer Bahnkrümmung läuft. Wenn ein Laufwerk (Taf. III, Fig. 7), das aus einer Axe und aus zwei ungleich grossen Rädern besteht, auf eine ebene Fläche gelegt und in Bewegung gesetzt wird, so rollt es wie ein Kegel, ohne einen Widerstand zu verursachen um denjenigen Punkt C der Ebene herum, in welchem die Axe des Laufwerkes die Ebene durchschneidet. Legt man durch die Punkte A und a, in welchen die Räder in irgend einer Position des Laufwerks diese Ebene berühren, Ebenen senkrecht zur Axe des Laufwerkes, so werden die Oberflächen der Räder in Kreisen geschnitten, welche wir die Laufkreise der Räder nennen wollen. Zieht man von C aus nach allen Punkten des Laufkreises A gerade Linien, so liegen diese in einer Kegelfläche, welche die beiden Radflächen in ihren

Laufkreisen berührt. Diesen Kegel wollen wir den Laufkegel des Laufwerkes nennen. Nennt man A und a die Halbmesser der Laufkreise, R und r die Halbmesser CA und Ca der Kreise, auf welchen die Laufkreise herumrollen, so ist:

$$\frac{A}{a} = \frac{R}{r}$$

d. h. bei einem solchen Laufwerk verhalten sich die Halbmesser der Laufkreise wie die Halbmesser der Bahnkreise.

Legt man zwei ganz gleiche Laufwerke mit ungleich grossen Rädern in der Weise auf eine Ebene, dass die Spitzen der Laufkegel zusammentreffen und verbindet dann die Axen der Laufwerke vermittelst eines Rahmens, der eine Aenderung ihrer relativen Lage nicht gestattet, in dem sie sich jedoch ungehindert drehen können, so entsteht ein vierräderiger Wagen mit convergirenden Axen. Setzt man diesen Wagen in Bewegung, so läuft er, ohne einen Widerstand zu verursachen, um den Punkt herum, in welchem die Spitzen der Laufkegel liegen. Ein vierräderiger Wagen kann also ohne einen andern Widerstand, als den der Axenreibung zu verursachen, in einer kreisförmigen Bahn laufen, wenn die Axen der Laufkegel nach dem Mittelpunkt der Bahn gestellt sind, und wenn sich die Halbmesser der Laufkreise wie die Halbmesser der Bahnkreise verhalten.

Dieses für eine ungezwungene Bewegung erforderliche Verhältniss der Laufkreise kann bei einem Wagen, der mit vier gleichen konischen Rädern versehen ist, hervorgebracht werden, wenn man denselben so auf die Bahnschienen stellt (Taf. III, Fig. 8), dass seine Stellung von der mittleren Stellung, in welcher die Laufkreise der Räder gleich grosse Halbmesser r haben, nach radialer Richtung um ein gewisses Maass σ abweicht. Nennt man α den Winkel, den eine Seite eines Radkegels mit der Axe bildet, so sind bei einer solchen Stellung des Wagens $r + \sigma \tan \alpha$ und $r - \sigma \tan \alpha$ die Halbmesser der Laufkreise. Nennt man ferner R den mittleren Halbmesser der Bahnkrümmung, $2\,e_2$ die Spurweite der Bahn, so sind $R + e_2$ und $R - e_2$ die Halbmesser der Schienenkreise. Für eine ungezwungene Bewegung muss daher sein:

$$\frac{r + \sigma \operatorname{tang.} \alpha}{r - \sigma \operatorname{tang.} \alpha} = \frac{R + e_2}{R - e_2}$$

und hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \frac{r\, e_2}{R \text{ tang. } \alpha} \\ \text{tang. } \alpha &= \frac{r\, e_2}{R\, \sigma}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt die Verschiebung wenn die Conizität, die zweite Gleichung bestimmt die Conizität wenn die Verschiebung gegeben ist.

Bewegung der Bahnwagen in Krümmungen. Die Bedingungen, welche, wie wir gesehen haben, erfüllt sein müssten, damit ein Wagen in einer Bahnkrümmung keinen grösseren Widerstand verursacht, als auf einer geraden Bahnstrecke, sind bei den auf Eisenbahnen gebräuchlichen Wägen nicht erfüllt. Die Axen dieser Wägen haben gegen einander eine unveränderliche parallele Lage und es sind die Kräfte nicht vorhanden, welche erforderlich wären, um die Laufwerke stets um so viel nach aussen zu verschieben, dass das Verhältniss der Laufkreise jenem der Bahnkreise gleich würde.

Denken wir uns, dass ein mit zwei parallelen Axen und mit vier konischen Rädern versehener Wagen aus einer geraden Bahnstrecke in eine Bahnkrümmung einläuft, so ist leicht einzusehen, dass das äussere Vorderrad auf die äusseren Schienen auflaufen wird. Dabei wird der Laufkreis des äusseren Vorderrades vergrössert, der Laufkreis des inneren Vorderrades verkleinert, und wenn die Conizität α der Räder mit dem Spielraum σ der Räder zwischen den Schienen in dem durch die obigen Gleichungen (1) ausgedrückten Zusammenhange steht, so kann das vordere Laufwerk in eine solche Stellung kommen, dass sich die Halbmesser seiner Laufkreise wie die Halbmesser der Bahnkreise verhalten. Allein während die Halbmesser der Laufkreise des vorderen Laufwerks das richtige Verhältniss erhalten, tritt an den Rädern des hinteren Laufwerkes ein fehlerhaftes Verhältniss ein; denn indem der Wagen in die Krümmung einläuft, läuft das innere Hinterrad auf der innern Schiene auf und läuft das äussere Hinterrad von der äusseren Schiene ab. Dabei wird aber der Laufkreis des inneren Hinterrades vergrössert, jener des äusseren Hinterrades verkleinert, es tritt also gerade das Umgekehrte von dem ein, was eintreten sollte. Dazu kommt noch, dass die Axen der Laufwerke fehlerhafte Richtungen erhalten, denn der ganze Wagen kommt in eine gegen die Bahnrichtung verwendete Stellung, die von der Art ist, dass sich zwar die Richtung der hinteren Axe der radialen Richtung nähert, dass dagegen die Richtung der vordern Axe um so mehr von der richtigen radialen Richtung abweicht. Taf. IV, Fig. 2 zeigt die Stellung, in welcher ein vierräderiger Wagen eine Bahnkrümmung durchläuft. Am vordern Laufwerk haben die Laufkreise das richtige Verhältniss, vorausgesetzt, dass die Conizität der Räder der Bedingung (1) Seite 13 entspricht. Am hintern Laufwerke haben die Laufkreise ein verkehrtes Verhältniss. Die vordere Axe entfernt sich, die hintere Axe nähert sich der richtigen radialen Lage. Oder mit andern Worten: am vordern Laufwerke ist das Verhältniss der Laufkreise ein richtiges, die Axenrichtung eine fehlerhafte. Am hinteren Laufwerk ist umgekehrt die Axenrichtung eine beinahe richtige, das Verhältniss der Laufkreise ein fehlerhaftes. Jedes Laufwerk entspricht also annähernd nur einer, und zwar jedes einer andern von den beiden Bedingungen, die erfüllt sein müssten, wenn die Bewegung des Wagens in der Bahnkrümmung nicht mehr Widerstand verursachen sollte, als in einer geraden Bahnstrecke.

Es entsteht nun die Frage, ob die Wägen nicht in der Art eingerichtet werden könnten, dass sie eine natürliche Tendenz hätten, sich in jeder Bahnkrümmung so zu stellen, dass nicht nur am vordern, sondern auch am hinteren Laufwerk das richtige Verhältniss der Laufkreise sich einstellte. Dies kann man in der That bewirken, wenn man die Räder an der hinteren Axe verkehrt, d. h. so anbringt, dass die Spitzen der Radkegel gegen die Bahn einwärts gekehrt sind.

Taf. IV, Fig. 3 ist ein solcher Wagen dargestellt. Er ist so auf die Bahn gestellt, dass die den Berührungspunkten A_1 A_2 A_3 A_4 entsprechenden Laufkreise gleich gross sind. Wird dieser Wagen fortgezogen, so werden die Laufkreise der äusseren Räder grösser, jene der innern Räder kleiner, und wenn die Conizitäten die richtige Grösse haben, so gelangt der Wagen in eine Stellung (Fig. 1), in welcher die Laufkreise des vordern und des hintern Laufwerkes das richtige Verhältniss erhalten.

Leider ist diese Anordnung aus zwei Gründen von keinem praktischen Werth; denn erstlich ist die Stellung des hinteren Laufwerkes keine hinreichend stabile, und zweitens müsste ein solcher Wagen immer erst umgekehrt werden, wenn er nach entgegengesetzter Richtung zu laufen hätte, denn man sieht an der Figur 3, dass in beiden Laufwerken die Verhältnisse der Laufkreise verkehrt werden, wenn man den Wagen nach einer Richtung bewegt, die der in der Figur angegebenen Pfeilrichtung entgegengesetzt ist. Wir müssen also diese Einrichtung als eine praktisch unbrauchbare verwerfen.

Die Höherlegung der äußeren Schiene. Die Stellung, in welcher ein vierräderiger Wagen mit parallelen Axen eine Bahnkrümmung durchläuft, ist vorzugsweise für die Bewegung des äusseren Vorderrades eine ungünstige, indem durch die verwendete Stellung des Wagens der Winkel, den die Ebene des Laufkreises des äusseren Vorderrades mit der Bahnrichtung bildet, sehr gross ausfällt. Wenn nicht geeignete Mittel angewendet werden, wird der Spurkranz dieses Rades gegen die Schienen stossen, oder es kann sogar der Fall eintreten, dass das Rad auf die Schiene steigt, so dass der Wagen aus dem Geleise kommt. Es ist daher vorzugsweise von Wichtigkeit, der Bewegung des äusseren Vorderrades nachzuhelfen, um das Aufsteigen dieses Rades oder das Anstossen seines Spurkranzes an die Schiene zu verhüten. Dies kann bewirkt werden, wenn man die äussere Schiene um so viel höher legt als die innere, dass das ganze vordere Laufwerk nach radialer Richtung einwärts gleitet, wenn es um so viel nach auswärts gelaufen ist, dass der Spurkranz des äusseren Rades der inneren Fläche der äusseren Schiene ganz nahe kommt. Das vordere Laufwerk muss also, wenn es die auf Taf. IV, Fig. 4 dargestellte Stellung erreicht hat, durch sein eigenes Gewicht und insbesondere durch die Belastung seiner Zapfen mit einer Kraft nach einwärts getrieben werden, die nicht nur die Reibung zu überwinden vermag, welche dem Einwärtsgleiten der Räder entgegenwirkt, sondern auch noch eine Ablenkungskraft für die Bewegung des Wagens in der kreisförmigen Bahnkrümmung liefert. Allein bei der früher beschriebenen Stellung, in welcher ein Wagen eine Bahnkrümmung durchläuft, ist die vordere Axe nach einwärts, die hintere Axe nach auswärts geneigt, es liegt also die Belastung vorzugsweise auf dem äusseren Zapfen der vorderen Axe und auf dem inneren Zapfen der hinteren Axe; wir werden uns also der Wahrheit ziemlich nähern, wenn wir annehmen, dass der innere Zapfen der Vorderaxe gar nicht, der äussere Zapfen dieser Axe dagegen mit dem halben Gewicht der ganzen Wagenkonstruktion und der darauf liegenden Last belastet ist.

Nennen wir Q das totale Gewicht des Wagens sammt Belastung, $2\,e_2$ die Spurweite der Bahn, h die Ueberhöhung der äusseren Schiene, V die Fahrgeschwindigkeit des Wagens, α die Conizität der Räder, d. h. den Winkel, den die Seite des Radkegels mit der Axe bildet, σ den Spielraum des Rades zwischen den Schienen, R den mittleren Halbmesser der Bahnkrümmung, f den Reibungscoeffizienten zwischen den Rädern und den Schienen, $g = 9{\cdot}808$ Meter die Beschleunigung durch die Schwere, r den Halbmesser des mittleren Laufkreises eines Rades, φ den Winkel $A\,B\,C$ (Fig. 4), den die untere

Seite des Radkegels des äusseren Vorderrades mit dem Horizont bildet, so ist zunächst annähernd, wie man leicht findet:

$$\varphi = \alpha + \frac{h}{2\,e_2} + \frac{\sigma \text{ tang } \alpha}{e_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Da wir voraussetzen, dass das äussere Vorderrad mit dem halben Gewicht $\frac{Q}{2}$ des Wagens nach vertikaler Richtung gegen die Bahn drückt, so ist $\frac{Q}{2} \sin \varphi$ die aus diesem Druck entspringende Kraft, mit welcher das Rad nach der Richtung A B herabzugleiten sucht. Diese Kraft muss also die Reibung $\frac{Q}{2}$ f überwinden und noch überdies eine Ablenkungskraft $\frac{\frac{1}{2}\,Q}{g}\,\frac{V^2}{R}$ liefern. Man hat daher:

$$\frac{Q}{2} \sin \varphi = \frac{Q}{2}\,f + \frac{\frac{Q}{2}}{g}\,\frac{V^2}{R}$$

demnach:

$$\sin \varphi = f + \frac{V^2}{g\,R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Da φ jederzeit ein kleiner Winkel ist, darf man $\sin \varphi = \varphi$ setzen, und dann wird:

$$\varphi = f + \frac{V^2}{g\,R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt durch Elimination von φ:

$$\alpha + \frac{h}{2\,e_2} = \frac{\sigma \text{ tang } \alpha}{e_2} = f + \frac{V^2}{g\,R} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Allein wenn die Räder die angemessene Conizität haben, ist:

$$\frac{\sigma \text{ tang } \alpha}{e_2} = \frac{r}{R}$$

Die Gleichung (4) gibt daher:

$$\frac{h}{2\,e_2} = \frac{V^2}{g\,R} + f - \alpha - \frac{r}{R} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Durch die Schienenüberhöhung, welche diese Gleichung bestimmt, wird also den Hauptübelständen, welche in der Bewegung des äusseren Vorderrades vorkommen können, abgeholfen. Allein der Zustand des hinteren Laufwerkes wird dadurch nicht verbessert;

es stellt sich zu weit nach einwärts und sollte hinaus getrieben werden, was durch die Höherlegung der äusseren Schiene nicht geschehen kann. Allein weil die Stellung des hinteren Laufwerkes keine gefährliche ist, so kann dieselbe doch nur in so fern nachtheilig wirken, als ein gewisser Kraftaufwand nothwendig ist, um den aus der fehlerhaften Stellung dieses Laufwerkes entspringenden Reibungswiderstand zu überwinden, und diesen Kraftverlust muss man sich nun einmal gefallen lassen.

Die Gleichung (5) zeigt, dass die richtige Schienenüberhöhung von der Fahrgeschwindigkeit, vom Bahnhalbmesser, vom Reibungscoeffizienten und von der Conizität der Räder abhängt. Der Quotient $\frac{r}{R}$ ist nicht zu beachten. Ungünstige Verhältnisse sind also: eine grosse Fahrgeschwindigkeit, eine starke Krümmung, trockene bestaubte Schienen und eine schwache Conizität der Räder. Der Reibungscoeffizient ist für trockene bestaubte Schienen $\frac{1}{3}$, für nasse oder leicht beschneite Schienen $\frac{1}{10}$. Die Befahrung von Bahnkrümmungen geschieht also bei nassem Wetter und im Winter leichter als bei gutem Wetter. Eine starke Conizität der Räder ist für Bahnkrümmungen günstig; allein man kann in dieser Hinsicht nicht wohl über eine gewisse Grenze gehen, weil sonst die Bahnschienen zu stark auseinandergedrängt würden.

Wir wollen sehen, wie die numerischen Werthe ausfallen, welche die Gleichung (5) liefert.

Ein Krümmungshalbmesser von 200 Metern wird zu den kleinen noch zulässigen gerechnet, und eine Fahrgeschwindigkeit von 10 Metern in einer Sekunde ist für eine solche Krümmung eine beträchtliche. Bei gewöhnlichem Wetter, wenn die Schienen weder bestaubt noch nass sind, ist der Reibungscoeffizient $\frac{1}{6}$. Eine Conizität von $\frac{1}{7}$ ist für den Bahnbau noch zulässig. Setzen wir also:

$$V = 10^m \qquad R = 200^m \qquad f = \frac{1}{6} \qquad \alpha = \frac{1}{7} \qquad g = 9{\cdot}808 \qquad r = 0{\cdot}5$$

$$2\,e_2 = 1{\cdot}5 \text{ Meter (schmale deutsche Spur)}$$

so gibt die Gleichung (5)

$$\frac{h}{2\,e_2} = 0{\cdot}072\,, \quad h = 0{\cdot}1 \text{ Met.}$$

Diese Ueberhöhung ist aber eine sehr beträchtliche zu nennen. Eine Fahrgeschwindigkeit von 10 Metern in der Sekunde ist also in einer Bahnkrümmung von 200 Metern Halbmesser zu gross.

Geleiserweiterung in Bahnkrümmungen. Für die Befahrung von geraden Bahnstrecken ist ein geringer Spielraum der Räder zwischen den Schienen und eine schwache Conizität der Räder vortheilhaft. Ein so geringer Spielraum ist aber insbesondere bei nur schwacher Conizität der Räder nicht genügend, damit die Räder in stärkeren Bahnkrümmungen in diejenige Stellung gelangen können, bei welcher das richtige Verhältniss zwischen den Halbmessern der Laufkreise und den Halbmessern der Bahnkreise eintreten kann. In stärkeren Krümmungen muss also den Rädern ein grösserer Spielraum gelassen werden, was nur durch eine Geleiserweiterung geschehen kann.

Nennt man:

$2\,e_2$ die Spurweite in den geraden Bahnstrecken, d. h. den Horizontalabstand der Vertikalebenen, welche an die inneren Seiten der Bahnschienen tangirend angelegt werden können;

σ den Spielraum eines Rades in den geraden Bahnstrecken;

ξ den Horizontalabstand der Ebene des Laufkreises eines Rades von der Vertikalebene, welche an die innere Seite einer Schiene tangirend angelegt werden kann;

α die Conizität der Räder;

r den Halbmesser des Laufkreises eines Rades, wenn der Wagen auf einer geraden Bahnstrecke in der mittleren Stellung auf der Bahn steht;

σ_1 den Spielraum, der einem Rad in einer Bahnkrümmung, welcher ein mittlerer Halbmesser R entspricht, gelassen werden muss, damit das richtige Verhältniss der Laufkreise eintreten kann, wenn der Wagen um σ_1 nach auswärts verschoben wird.

Dies vorausgesetzt sind erstlich die Laufkreise der Räder, wenn der Wagen in der Bahnkrümmung um σ_1, d. h. um so viel nach aussen verschoben ist, dass die Spurkränze der äusseren Räder die inneren Seiten der Schienen berühren, gleich:

$$r + \sigma \operatorname{tang} \alpha \text{ und } r - (2\,\sigma_1 - \sigma) \operatorname{tang} \alpha$$

und sind ferner die Halbmesser der Bahnkreise:

$$R + (e_2 + \sigma_1 - \sigma + \xi) \qquad R - (e_2 + \sigma_1 - \sigma + \xi)$$

Da sich nun die Laufkreise wie die Bahnkreise verhalten sollen, so hat man:

$$\frac{r + \sigma \operatorname{tang} \alpha}{r + \sigma \operatorname{tang} \alpha - 2\,\sigma_1 \operatorname{tang} \alpha} = \frac{R + (e_2 + \sigma_1 - \sigma + \xi)}{R - (e_2 + \sigma_1 - \sigma + \xi)} \quad . \quad . \quad (1)$$

Allein $\sigma_1 - \sigma + \xi$ ist gegen $R + e_2$ wie gegen $R - e_2$ verschwindend klein, kann also gegen diese Grössen vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung findet man aus (1):

$$2(\sigma_1 - \sigma) = 2\,\frac{r\, e_2 - \sigma\, R \tang \alpha}{\tang \alpha\, (R + e_2)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Kraft zur Fortbewegung eines Wagens in einer Bahnkrümmung Die Bestimmung der Kraft, welche zur Fortbewegung eines Wagens in einer Bahnkrümmung erforderlich ist, verursacht, wenn man die Sache mit voller Strenge nehmen will, sehr viele kaum zu bewältigende Schwierigkeiten, die mit dem Zweck, um den es sich handelt, in keinem Verhältniss stehen; wir wollen uns daher mit einer Annäherung begnügen. Zu diesem Behufe nehmen wir statt eines wirklichen mit gleichen conischen Rädern versehenen Wagens einen ideellen Wagen an, der mit dünnen cylindrischen Rädern versehen ist, deren Laufkreise sich am vorderen Laufwerk direkt, am hinteren Laufwerk verkehrt wie die Bahnkreise verhalten, stellen diesen Wagen auf eine ganz ebene Fläche, auf welcher zwei den Bahnkreisen gleiche concentrische Kreise verzeichnet sind, und suchen die Kraft zu bestimmen, welche im Stande ist, die Widerstände zu überwältigen, die der Fortbewegung dieses ideellen Wagens in den auf der Ebene verzeichneten Kreisen entgegen wirken. Taf. IV, Fig. 5, zeigt den ideellen Wagen und die ideelle Bahn.

Wir denken uns, dass der Wagen aus der Position $D\,E\,A\,B$ in die Position $D_1\,E_1\,A_1\,B_1$ gelange, und nehmen an, dass die Widerstände, welche dabei die Laufwerke verursachen, gerade so gross wären, als in dem Falle, wenn man die Laufwerke auf folgende Weise aus den Positionen $D\,E$ und $A\,B$ in die Positionen $D_1\,E_1$ und $A_1\,B_1$ brächte.

Wir bringen das hintere Laufwerk aus der Lage $D\,E$ in die Lage $D_1\,E_1$, indem wir es zuerst auf der Ebene um seine Spitze S herumrollen, bis der Punkt E nach einem gewissen Punkt G kommt, der in der Verlängerung von $D_1\,E_1$ liegt, drehen hierauf das Laufwerk um eine durch G gehende vertikale Axe um den Winkel $S\,G\,D_1 = \varphi$, so dass die Axe des Laufwerkes die Richtung $G\,D_1$ erhält, und schieben es endlich nach dieser Richtung um $G\,E_1$ nach auswärts. Das Rollen des Laufwerkes um die Spitze des Laufkegels verursacht keinen Widerstand. Beim Drehen des Laufwerks um den Punkt G schleift das äussere Rad auf der Bahn fort ohne zu rollen; es muss also die Reibung überwunden werden, die dem Druck dieses Rades gegen die Bahn entspricht. Beim Hinausschleifen des ganzen Laufwerkes um die Weglänge GE_1 müssen die Reibungen beider Räder auf der Bahn überwunden werden.

Da wir voraussetzen, dass die Räder die richtige Conizität haben, so ist die Höhe TA des Laufkegels des vorderen Laufwerkes gleich dem Halbmesser des äusseren Bahnkreises. Um also das vordere Laufwerk aus der Position AB in die Position A_1B_1 zu bringen, haben wir nichts zu thun, als es zuerst nach der Richtung AT um AH, d. h. um die Projection von AA_1 auf AT einwärts zu schieben, und es dann um die Spitze des Laufkegels herumzurollen, bis die Axe des Laufkegels in die Lage TA_1 kommt. Von diesen zwei Bewegungen erfordert nur die erstere, nämlich das Hereinschleifen, einen Kraftaufwand.

Die Fortbewegung des Wagens aus der Position $DEAB$ in die Position $D_1E_1A_1B_1$ erfordert also die Ueberwältigung dreier Reibungswiderstände: 1) die mit Schleifen des äusseren Hinterrades verbundene Drehung des hinteren Laufwerkes aus der Position SG in die Position GD_1; 2) das Hinausschleifen des hinteren Laufwerkes um GE_1; 3) das Schleifen nach einwärts des vorderen Laufwerkes um AH.

Nennen wir:

$2e_2$ die Spurweite der Bahn;

2Δ die Entfernung der Axen der Laufwerke des Wagens;

r die Halbmesser der mittleren Laufkreise der Räder;

σ den Spielraum eines Rades;

α die Conizität der Räder, d. h. den Winkel, den eine Seite des Radkegels mit seiner Axe bildet;

R den mittleren Halbmesser der Bahnkrümmung;

Q das Gewicht des ganzen Wagenbaues;

f den Reibungscoeffizienten für das Schleifen der Räder auf der Bahn;

K die Zugkraft, welche auf den Wagen wirken muss, um die Widerstände, die das Schleifen der Räder auf der Bahn verursacht, zu überwinden;

ω den Centriwinkel, welcher der Fortbewegung des Wagens in der Bahn um DD_1 oder AA_1 entspricht;

Θ den Winkel ESG, um welchen das hintere Laufwerk gerollt wird;

φ den Winkel SGD_1, um welchen das hintere Laufwerk drehend geschleift wird.

Da wir annehmen, dass das hintere Laufwerk aus σ nach einwärts, das vordere Laufwerk aus σ nach auswärts verschoben sei, und dass die Conizität der Räder eine solche sei, dass sich bei dieser verschobenen Stellung des Wagens die Halbmesser der Laufkreise am vorderen Laufwerk direkt, am hinteren Laufwerk verkehrt wie die Bahnkreise verhalten: so sind die Höhen S E und T A der Laufkegel gleich dem äusseren Bahnhalbmesser $R + e_2$; es ist demnach $\Theta = \omega$, folglich: $\varphi = \Theta + \omega = 2\,\omega$. Die Wirkung, welche der mit Schleifen des äusseren Hinterrades verbundenen Drehung des hinteren Laufwerkes aus der Position S G in die Position G D_1 entspricht, ist demnach:

$$\frac{Q}{4}\, f\, 2\, e_2\, 2\, \omega = Q\, f\, e_2\, \omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Der Weg E_1 G, um welchen das hintere Laufwerk nach auswärts geschleift wird, ist nahe gleich $\overline{E\,E_1}$ sin $\widehat{E_1\,E\,G}$, oder nahe gleich:

$$(R - e_2)\ \omega \,.\left(\frac{\varDelta}{R - e_2} - \frac{\sigma}{\varDelta}\right)$$

Die Wirkung, welche dem Hinausschleifen des hinteren Laufwerkes um G E_1 entspricht, ist demnach:

$$\frac{Q}{2}\, f\, (R - e_2)\ \omega\ \left(\frac{\varDelta}{R - e_2} - \frac{\sigma}{\varDelta}\right) = \frac{Q}{2}\, f\, \omega\ \left(\varDelta - \frac{\sigma\,(R - e_2)}{\varDelta}\right) \quad (2)$$

Die Weglänge A H, um welche das vordere Laufwerk nach einwärts geschleift wird, ist $\overline{A\,A_1}$ sin $\widehat{A\,A_1\,H}$ gleich oder nahe gleich:

$$(R + e_2)\ \omega \,.\left(\frac{\varDelta}{R + e_2} + \frac{\sigma}{\varDelta}\right)$$

Die dieser Schleifung entsprechende Wirkung ist demnach:

$$\frac{Q}{2}\, f\, (R + e_2)\ \omega\ \left(\frac{\varDelta}{R + e_2} + \frac{\sigma}{\varDelta}\right) = \frac{Q}{2}\, f\, \omega\ \left(\varDelta + \frac{\sigma\,(R + e_2)}{\varDelta}\right) \quad (3)$$

Die Summe der drei Wirkungen (1), (2), (3) ist demnach:

$$Q\, f\, e_2\, \omega + \frac{Q}{2}\, f\, \omega \left[\varDelta - \frac{\sigma\,(R - e_2)}{\varDelta}\right] + \frac{Q}{2}\, f\, \omega \left[\varDelta + \frac{\sigma\,(R + e_2)}{\varDelta}\right]$$
$$= Q\, f\, \omega \left[e_2 + \varDelta + \frac{\sigma\, e_2}{\varDelta}\right]$$

oder auch, weil $\frac{\sigma}{\varDelta}$ eine kaum beachtenswerthe Grösse ist, gleich:

$$Q\, f\, \omega\, (e_2 + \varDelta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Die Wirkung, welche die Zugkraft K entwickelt, wenn sie den Wagen um den Centriwinkel ω fortbewegt, ist aber $K \cdot R\,\omega$; man hat daher die Gleichheit:

$$K\,R\,\omega = Q\,f\,\omega\,(e_2 + \Delta)$$

demnach:

$$K = Q\,f\,\frac{e_2 + \Delta}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dies ist also annähernd die Zugkraft, welche am Wagen wirken muss, um das Schleifen der Räder auf der Bahn, wenn sie gekrümmt ist, zu bewältigen. Ein enger Radstand, eine kleine Spurweite, eine schwache Bahnkrümmung und ein glitschriger Zustand der Schienen sind also für die Befahrung von Bahnkrümmungen hinsichtlich des Kraftaufwandes vortheilhaft.

Setzen wir beispielsweise für trockene Witterung $f = \frac{1}{3}$, und ferner $R = 200$, $2\,e_2 = 1{\cdot}5$, $2\,\Delta_2 = 3^m$, so wird $K = \frac{Q}{266}$. Dieser Widerstand ist ungefähr gleich der Hälfte von demjenigen, der auf horizontaler gerader Bahn zu überwinden ist, kommt also kaum in Betrachtung gegen die Widerstände, welche die fast auf jeder Bahn vorkommenden Bahnsteigungen verursachen. Nicht der Widerstand, sondern die Gefahr des Ausgleisens bei grösserer Fahrgeschwindigkeit macht also stärkere Bahnkrümmungen unzulässig.

Richtige Conizitäten der Räder eines Wagens mit drei Axen. Es sei (Taf. IV, Fig. 6) ein Wagen mit drei Laufwerken. Derselbe sei so auf die Bahn gestellt, dass sowohl das vordere als auch das hintere Laufwerk um den Spielraum σ nach aussen verschoben ist. A und A_1 sind die Axenmittel dieser Laufwerke, O der Mittelpunkt der Bahnkrümmung, O D_1 C_1 E_1 B_1 eine auf A A_1 senkrechte, mithin A A_1 in C_1 halbirende Linie. Nennt man r_1 für das hintere, r_3 für das vordere Laufwerk den Halbmesser des mittleren Laufkreises, α_1 für das hintere, α_3 für das vordere Laufwerk die richtigen Conizitäten, so hat man:

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = \frac{r_1\,e_2}{R\,\sigma} \qquad \operatorname{tang} \alpha_3 = \frac{r_3\,e_2}{R\,\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die richtige Conizität der mittleren Räder kann am leichtesten durch Konstruktion auf folgende Art gefunden werden.

Man verlängere die Axenrichtung B D, mache B $O_1 = R + e_2$, verbinde b und b_1 mit O_1, errichte in D auf B O_1 eine Senkrechte, bis die Linien $b\,o_1$ und $b_1\,o_1$ geschnitten werden, mache $C\,m = C\,D$, $m\,a = m\,a_1 = D\,d$, so ist $b\,b_1\,a\,a_1$ der Radkegel des äusseren der mittleren Räder. In dem Fall, wenn $\overline{C\,B} = \overline{C\,D}$ ist, fällt die Linie $a\,a_1$ auf $b\,b_1$, wird demnach die Conizität unendlich gross.

Zusammenhängung der Wägen. Die Zusammenhängung der Wägen soll in der Weise geschehen, dass sich die Wägen auf geraden Bahnstrecken nicht leicht aus ihrer normalen Stellung verdrehen können, dass sie aber in Bahnkrümmungen nicht verhindert werden, in die für ihre Bewegung günstigste Stellung zu gelangen.

Bringt man im Mittelpunkt des Rahmenbaues eines jeden Wagens einen vertikalen Zapfen an, und verbindet je zwei aufeinander folgende Zapfen der Wagenreihe durch Stangen oder Stangenketten, so hat man eine Zusammenhängung, welche die Wägen, wenn sie durch Krümmungen laufen, nicht verhindert, in ihre zweckmässigsten Stellungen zu gelangen; allein in geraden Bahnstrecken gestattet diese Zusammenhängung, dass sich jeder Wagen um seinen Mittelpunkt drehen, dass also eine merkliche schlängelnde Bewegung eintreten kann. Werden die Wägen an den Bufferbalken mit geeigneten Gliederungen zusammengehängt, so wird jeder Wagen, wenn der Zug auf einer geraden Bahnstrecke fährt, durch die in den Zusammenhängungen herrschenden Spannungen nach der Richtung der Bahn gestreckt, die Wägen können also nicht leicht in eine schlängelnde Bewegung gerathen, sie können sich aber, wenn die Zusammenhängung richtig gemacht wird, in Krümmungen in die richtige Stellung begeben. Diese Zusammenhängung, bei welcher die Wägen gleichsam die Glieder einer Kette bilden, ist also der ersteren, bei welcher die Mittelpunkte der Wägen an eine Kette gehängt sind, vorzuziehen.

Um zwei Wägen, die ungleich grosse Radstände haben, vermittelst eines vertikalen Bolzens so aneinander hängen zu können, dass sie beide in Bahnkrümmungen ungezwungen die richtige Stellung annehmen können, müssen die Zusammenhängungspunkte a und a_1 gleich weit vom Mittelpunkt o der Bahn entfernt sein, wenn jeder der beiden Wägen eine richtige Stellung auf der Bahn einnimmt. Siehe Taf. IV, Fig. 7. Es muss demnach sein: $O\,a = O\,a_1$.

Grösster zulässiger Druck eines Triebrades gegen die Bahn. Der grösste Druck, den ein Triebrad gegen die Schienen ausüben darf, richtet sich theils nach den Querschnittsdimensionen der Schiene und der Constructionsart des Unterbaues, auf welchem die Schiene aufliegt, vorzugsweise aber nach dem Widerstand, den das Material der Radringe und der Schienen dem Aufrauhen oder Aufschiefern entgegengesetzt, wenn die belasteten Triebräder auf den Schienen schleifen. Kennt man einmal den grössten Druck eines Rades gegen die Schiene, bei welchem noch kein Aufrauhen oder Aufschiefern der Schiene oder der Radkränze eintritt, so kann man dann den Querschnitt der Schiene nach statischen Regeln leicht so bestimmen, dass sie diesem Druck mit genügender Sicherheit zu widerstehen vermag. Es kommt also zunächst darauf an, diesen grössten Druck, bei dem die Schienen und die Räder an ihrer Oberfläche nicht angegriffen werden, wenn ein Schleifen eintritt, zu bestimmen. Dieser grösste Druck richtet sich aber theilweise nach der Grösse des Rades. Die Berührung des Radumfanges und der Schiene ist keine geometrische; an der Berührungsstelle wird der Radumfang abgeplattet und die Schiene eingedrückt; Radumfang und Schiene berühren sich also nicht in einem Punkt, sondern in einer Fläche, und die Intensität des wechselseitigen Druckes ist nach dem Quotienten aus der Grösse des Druckes und der Grösse der Berührungsfläche zu beurtheilen, und nach dieser Intensität ist die angreifende Wirkung, wenn ein Schleifen eintritt, zu bemessen.

Es sei Taf. V, Fig. 1, A B die Oberfläche der Schiene, D_1 die Position des Rades, wenn es die Schiene nur geometrisch in E_1 berührt, D F E G D das in die Schiene eingedrungene von F bis G deformirte Rad.

Setzen wir $\overline{m_1 H_1} = \overline{E_1 m} = \xi$, $\overline{m_1 n_1} = v_1$, $\overline{m n} = v$, den Durchmesser des Rades gleich D, den absoluten Druck des Rades gegen die Schiene gleich $\mathfrak{P}$, ϱ und σ zwei Coeffizienten, durch welche die Zusammendrückbarkeit der Materiale, aus welchen das Rad und die Schiene bestehen, gemessen werden kann, $H_1 E_1 = e$ die ursprüngliche Höhe von dem Theil des Radumfanges, welcher durch den Druck deformirt wird.

Dies vorausgesetzt ist:

$$\overline{n_1 p_1}^2 = \xi^2 = \overline{E_1 p_1} \, (D - \overline{E_1 p_1})$$

Allein es ist $\overline{E_1 p_1}$ gegen D verschwindend klein, daher kann man schreiben: $\xi^2 = \overline{E_1 p_1} \, D$, und hieraus folgt: $\overline{E_1 p_1} = \frac{\xi^2}{D}$; demnach: $\overline{m_1 n_1} = e - \frac{\xi^2}{D}$. Die Stelle n_1 des Radumfangs wird um $\overline{m_1 n_1} - \overline{m n} = e - \frac{\xi^2}{D} - v$ zusammengedrückt. Die Intensität der zusammendrückenden Kraft kann der Zusammendrückung proportional gesetzt, kann also durch $\varrho \left(e - \frac{\xi^2}{D} - v\right)$ ausgedrückt werden. Die

Schiene wird bei m um $\overline{m\ n} = v$ zusammengedrückt. Die entsprechende Intensität der zusammendrückenden Kraft kann also gleich $\sigma\ v$ gesetzt werden. Allein die wechselseitigen Pressungen bei n müssen gleich gross sein. Man hat daher:

$$\sigma\ v = \varrho \left(e - \frac{\xi^2}{D} - v \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; : \; (1)$$

Dies ist die Gleichung der Kurve $F\ E\ G$. Der totale Druck längs der Fläche $\overline{F\ G}$ zwischen dem Rade und der Schiene muss gleich $\mathfrak{P}$ sein; man hat daher:

$$\mathfrak{P} = 2 \int_0^K v\ \sigma\ d\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

wobei der Kürze wegen $\overline{F_1\ H_1} = K$ gesetzt wurde; es ist demnach $K^2 = e\ (D - e)$, oder weil e gegen D verschwindend klein ist:

$$K^2 = e\ D \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Sucht man aus (1) den Werth von v und setzt ihn in die Gleichung (2), so findet man:

$$\mathfrak{P} = 2\ \frac{\sigma\ \varrho}{\sigma + \varrho} \int_0^K \left(e - \frac{\xi^2}{D} \right) d\xi$$

Mit Berücksichtigung von (3) gibt die Integration dieses Ausdruckes:

$$\mathfrak{P} = \frac{4}{3}\ \frac{1}{\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\varrho}}\ e^{\frac{3}{2}}\ D^{\frac{1}{2}}$$

und hieraus folgt:

$$e = \left\{ \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\varrho} \right) \right\}^{\frac{2}{3}} \frac{\mathfrak{P}^{\frac{2}{3}}}{D^{\frac{1}{3}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Nennt man endlich $\mathfrak{J}$ die Intensität der Pressung bei E, so ist dieselbe $\sigma\ \overline{E\ E_1}$; allein $\overline{E\ E_1}$ ist derjenige Werth von v, der sich aus (1) ergibt, wenn man in dieser Gleichung ξ gleich Null setzt; es ist demnach $\overline{E\ E_1} = e \cdot \frac{\varrho}{\sigma + \varrho}$, und man hat daher:

$$\mathfrak{Z} = \sigma\, \overline{\mathrm{E}\,\mathrm{E}_1} = \mathrm{e}\,\frac{\sigma\,\varrho}{\sigma + \varrho} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{\mathfrak{P}^{\frac{2}{3}}}{\mathrm{D}^{\frac{1}{3}}}$$

und hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{Z}^{\frac{3}{2}}\, \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\varrho}}\, \sqrt{\mathrm{D}} \\ \text{und:}\quad \mathrm{D} &= \frac{\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{Z}^3 \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\varrho}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Da $\mathfrak{Z}$ constant sein soll, σ und ϱ ebenfalls bestimmte, dem Schmiedeisen, aus welchem die Schienen und die Radumfänge bestehen, entsprechende Werthe haben, so kann man auch setzen:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{D} &= \mathfrak{A}\, \mathfrak{P}^2 \\ \mathfrak{P} &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}} \sqrt{\mathrm{D}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wobei nun $\mathfrak{A}$ eine gewisse, am zweckmässigsten durch die Erfahrung zu bestimmende Constante bedeutet.

Die in neuester Zeit nach dem System von Herrn *Engerth* für die Sömmering-Bahn erbauten Lokomotive haben sehr stark belastete Axen. Die Räder dieser Lokomotive haben einen Durchmesser von 3·5 österreichischen Fuss oder von 1·1 Meter, und jedes der zwei vordersten Räder übt gegen die Bahn einen Druck von 122.7 österreichischen Centnern oder 6871 Kilogramm aus. Wenn wir diese Thatsache zur Bestimmung des Coeffizienten $\mathfrak{A}$ benützen, finden wir: $\mathfrak{A} = \frac{\mathrm{D}}{\mathfrak{P}^2} = \frac{1 \cdot 1}{(6 \cdot 872)^2} = \frac{1}{43}$, und dann wird:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{D} &= \frac{\mathfrak{P}^2}{43} \\ \mathfrak{P} &= 6 \cdot 6 \sqrt{\mathrm{D}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Formeln geben folgende numerische Resultate:

für $\mathrm{D} =$	0·6	0·8	1·0	1·2	1·4	1·6	1·8	2 Meter
wird $\mathfrak{P} =$	5·1	5 9	6·6	7·2	7·8	8·3	8·8	9·3 Tonnen.

Es scheint, dass diese Belastungen in der That die grössten sind, welche man zulassen darf, und die man nur in ausserordentlichen Fällen eintreten lassen soll. In allen gewöhnlicheren Fällen dürfte es angemessen sein, Räder von 1 Meter Durchmesser nicht stärker als mit 5 Tonnen zu belasten. Wenn wir diese Annahme zu Grunde legen, so wird:

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\mathfrak{P}^2}{25} \\ \mathfrak{P} &= 5\sqrt{D} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

für D =	0·6	0·8	1·0	1·2	1·4	1·6	1·8	2 Meter
wird $\mathfrak{P}$ =	3·87	4·47	5·00	5·48	5·92	6·33	6·71	7·07 Tonnen.

Bestimmen wir nun auch die Dimensionen, welche der Querschnitt einer Schiene erhalten muss, damit sie eine hinreichende respektive Festigkeit gewährt. Nehmen wir an, dass man sich für eine gewisse Querschnittsform der Schienen entschieden habe, so sind die Verhältnisse aller Abmessungen des Querschnitts vollkommen bestimmt, und jede einzelne Dimension des Querschnittes kann als ein Vielfaches oder als ein aliquoter Theil der Schienenhöhe, die wir mit $\mathfrak{h}$ bezeichnen wollen, ausgedrückt werden, und dann kommt es nur auf den absoluten Werth von $\mathfrak{h}$ an, um auch alle übrigen Dimensionen des Querschnittes mit jeder wünschenswerthen Schärfe bestimmen zu können. Aus den bekannten Formeln über die Festigkeit der Materialien folgt aber, dass das Brechungsmoment einer solchen Schiene dem Kubus der Schienenhöhe $\mathfrak{h}$ proportional ist. Anderseits ist aber dieses Brechungsmoment auch dem Produkt $\mathfrak{P}\,\mathfrak{l}$ proportional zu setzen, wobei $\mathfrak{P}$ den Druck bezeichnet, welcher gegen die Schiene ausgeübt wird, und $\mathfrak{l}$ die Entfernung zweier unmittelbar auf einander folgenden Schienenstühle ausdrückt. Wir können daher schreiben: $\mathfrak{h}^3 = \mathfrak{A}^3\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{l}$, und daraus folgt:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{A}\sqrt[3]{\mathfrak{P}\,\mathfrak{l}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

wobei $\mathfrak{A}$ eine Constante bezeichnet, die von der Querschnittsform, nicht aber von der Querschnittsgrösse abhängt.

Beträgt die Entfernung der Querschwellen 1 Meter und der Druck eines Rades gegen die Bahn 5 Tonnen, so leistet eine Schiene von I förmigem Querschnitt hinreichenden Widerstand, wenn sie eine Höhe von 0.14 Metern hat und jeder Meter Schienenlänge 42 Kilogramm wiegt. Vermittelst dieser Erfahrungsdaten gibt der Ausdruck (9), wenn man in demselben $\mathfrak{h} = 0{\cdot}14$, $\mathfrak{P} = 5$, $\mathfrak{l} = 1$ setzt, $\mathfrak{A} = 0{\cdot}082$. Wir erhalten daher zur Bestimmung der Schienenhöhe den Ausdruck:

$$\mathfrak{h} = 0{\cdot}082 \sqrt[3]{\mathfrak{P}\,\mathfrak{l}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wobei $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{l}$ in Metern, $\mathfrak{P}$ in Tonnen zu 1000 Kilogramm auszudrücken sind.

Stabilität der Wagenbewegung. Die Wägen sollten sich, um ihrem Zweck ganz vollkommen zu entsprechen, ganz geschmeidig, d. h. in einer solchen Weise längs der Bahn hinbewegen, dass jeder beliebige Punkt des Wagenbaues, so wie jeder Punkt der fortzuschaffenden Körper, eine mit der Axenlinie der Bahn parallele Kurve beschreiben würde, in welchem Falle die Bewegung für die Personen gar nicht spürbar wäre. Allein in solcher Weise erfolgt die Bewegung nicht, sondern der auf den Federn liegende Bau wogt beständig auf und nieder, wankt hin und her, neigt sich vor und zurück. Diese drei Bewegungen wollen wir das Wogen, Wanken und Nicken nennen. Die Gesetze, nach welchen diese Bewegungen erfolgen, werden wir in der Folge mit aller Schärfe kennen lernen, wenn wir die störenden Bewegungen der Lokomotive durch analytische Mittel untersuchen, einstweilen möge eine einfache Besprechung dieses Gegenstandes genügen.

Die Störungen in der Bewegung der Bahnwägen entstehen entweder direkt, oder indirekt durch die Einwirkung der Bahn auf die Räder. Die Schienen sind nie vollkommen glatt; ihre Verbindung unter einander, so wie auch ihr Aufliegen auf dem Unterbau ist nie fehlerfrei. Auch die Räder haben, wenn sie längere Zeit im Gebrauch waren, mancherlei Unvollkommenheiten an sich, sie sind dann nicht mehr glatt und nehmen insbesondere durch die ungleiche Elastizität, welche der Speichenbau verursacht, eine polygonale Form an. Diese Unvollkommenheiten der Bahn und der Räder machen, dass die Räder, während sie auf der Bahn fortrollen, fort und fort, insbesondere aber an den Schienenstössen in die Höhe geprellt werden und dadurch entsteht das Wanken, Wogen und Nicken und in Folge des Wankens auch noch ein Hin- und Herschlängeln der Wägen zwischen den Schienen. Das Wanken ist nämlich ein Hin- und Herpendeln des auf den Federn liegenden Baues um eine durch seinen Schwerpunkt gehende Längenaxe. So wie nun eine solche pendelnde Bewegung eintritt, fassen die Axengabeln die Axenbüchsen und suchen sie auf den Axen hin und her zu schieben; da aber die Axenbüchsen nicht verschiebbar sind, so werden die Axen mit den Rädern zwischen den Schienen hin- und hergeschoben, und diese Bewegung in Verbindung mit der fortrollenden Bewegung der Räder bringt das Schlängeln hervor.

Es ist nun die Frage, was man zu thun hat, damit diese störenden Bewegungen in einem möglichst schwachen Grad eintreten? Natürlich, dass eine solide Anlage und Ausführung des Bahnbaues, so wie eine sorgfältige Instandhaltung der Wägen die erste und wichtigste Bedingung ist. Allein damit ist noch nicht alles gethan, sondern es hängt auch sehr viel von der Construktionsart der Wägen ab, und in dieser Hinsicht mögen folgende Bemerkungen zur Aufklärung der Sache dienen.

Zunächst ist klar, dass die störenden Oscillationen von dem Starrheitsgrad der Federn abhängen. Starre Federn verursachen schnell auf einander folgende Oscillationen von geringer Ausdehnung, bringen also harte Erschütterungen hervor. Weiche Federn verursachen langsam erfolgende Oscillationen von grösserer Ausdehnung. Es ist selbstverständlich, dass nur durch die Erfahrung derjenige Starrheitsgrad der Federn bestimmt werden kann, bei welchem die nachtheiligen Folgen der störenden Bewegungen am kleinsten ausfallen.

Das Wogen ist von der Bauart der Wägen ganz unabhängig und richtet sich auf einer Bahn von gewisser Beschaffenheit nur allein nach dem Starrheitsgrad der Federn und dem Gewicht des auf den Federn liegenden Baues.

Das Wanken hängt wesentlich theils von der Spurweite, theils von der Höhe des Schwerpunktes über den Axen der Räder ab. Eine grosse Spurweite und eine möglichst tiefe Lage des Schwerpunktes schützen gegen das Wanken, und folglich auch gegen die durch das Wanken entstehende schlängelnde Bewegung.

Das Nicken hängt ab von der Anzahl, der Entfernung und Belastung der Axen. Ein grosser Radstand, eine starke Belastung der äusseren Axen und eine schwache Belastung der inneren Axen, wenn welche vorhanden sind, schwächen das Nicken. Am besten ist es aber, gar keine mittleren Axen anzuwenden, sondern die Wägen entweder nur mit zwei weit auseinander gestellten Axen, oder mit zwei weit auseinander gestellten vierräderigen Laufwerken zu versehen. Die Stabilität der Bewegung in geraden Bahnstrecken verlangt also eine Radstellung, die für die Befahrung von Bahnkrümmungen nachtheilig ist, denn für Krümmungen ist eine enge Radstellung und eine schmale Spurweite günstig. Indessen Krümmungen sind doch nur Ausnahmen und die Widerstände, welche Krümmungen verursachen, sind in Vergleich mit denen der Steigungen von keiner grossen Bedeutung; es ist daher angemessen, die Wägen auf Stabilität zu bauen. Am besten entspricht man jedenfalls sowohl den Bedingungen der Stabilität, als auch jenen der Krümmungen durch zwei weit auseinander gestellte, gegen einander verstellbare vierräderige Laufwerke, d. h. durch die amerikanische Construktion der sogenannten Salonwägen. Allein eine Bahn mag noch so gut gebaut sein und die Wägen mögen den Bedingungen der Stabilität noch so gut entsprechen, so gibt es doch Verhältnisse, unter welchen sehr heftige störende Bewegungen eintreten können. Dies geschieht nämlich, wie wir in der Folge nachweisen werden, wenn die Zeit einer Wogung, oder die Zeit einer Wankung, oder endlich wenn die Zeit einer Nickung genau mit der Zeit übereinstimmt, in welcher die Lokomotive eine Schienenlänge durchläuft; denn in jedem dieser drei Fälle summiren sich die störenden Wirkungen, welche durch die Stösse an den Schienenverbindungen hervorgebracht werden, und je nachdem die erste, oder die zweite, oder die dritte der genannten Schwingungszeiten mit der Zeit übereinstimmt, in welcher die Lokomotive über eine Schiene läuft, wird im ersten Falle das Wogen, im zweiten das Wanken, im dritten das Nicken allmählig stärker und stärker. Damit eine solche Ansammlung der störenden Einwirkungen nicht eintreten kann, muss die Länge einer Schiene so gross sein, dass die Zeit, welche die Lokomotive braucht um eine Schiene zu überlaufen, selbst bei ihrer grössten Fahrgeschwindigkeit grösser ist, als die grösste der drei Schwingungszeiten, welche dem Wanken, Wogen und Nicken entsprechen.

Sehr lange Schienen sind also nicht blos desshalb vortheilhaft, weil dadurch die Anzahl der Schienenverbindungen und mithin die Anzahl der störenden Einwirkungen vermindert wird, sondern man schützt sich zugleich durch lange Schienen gegen die Ansammlung der störenden Bewegungen. Auch wäre es in dieser Hinsicht gut, wenn die Längen der einzelnen Schienen ungleich wären und die Bewegung der Lokomotive nicht mit Gleichförmigkeit erfolgte.

Ergebnisse der vorhergehenden Studien. Wenn wir in Kürze die wesentlichsten Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchungen über die Bewegung der Wägen auf geraden und gekrümmten Bahnstrecken zusammenfassen, so erhalten wir für den Bau der Bahn und der Wägen folgende leitende Gesetze:

A. Hinsichtlich der Stabilität der Bewegung auf geraden Bahnstrecken ist vortheilhaft:
   1. eine grosse Geleisweite;
   2. ein grosser Radstand der Wägen;

3. Wägen mit zwei weit auseinander gestellten Axen, oder Wägen mit zwei weit auseinander gestellten, gegen einander beweglichen vierräderigen Laufwerken;
4. ein geringer Spielraum der Räder zwischen den Schienen;
5. eine schwache Conizität der Räder;
6. eine niedrige Lage des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues;
7. sehr lange Bahnschienen;
8. eine Zusammenhängung der Wägen, bei welcher sie selbst die Glieder einer Kette bilden.

B. Für die Befahrung von Bahnkrümmungen ist vortheilhaft:
1. eine enge Geleisweite;
2. ein enger Radstand und keine Mittelräder;
3. Wägen mit weit auseinander gestellten, gegen einander beweglichen vierräderigen Laufwerken;
4. schwache Bahnkrümmungen;
5. eine angemessene Conizität der Räder und insbesondere der Lokomotivräder;
6. eine angemessene Höherlegung der äusseren Schienen;
7. eine angemessene Geleiserweiterung;
8. eine mässige Fahrgeschwindigkeit.

Die Bewegungen der Lokomotive.

Einleitendes. Die vollständige Lokomotive besteht aus drei Massensystemen: 1. Das Massensystem der Lauf- und Triebwerke. 2. Das zu einem starren Ganzen verbundene System des Rahmenbaues, des Kessels und der theils mit dem Rahmenbau, theils mit dem Kessel unveränderlich vereinigten Maschinencylinder und Kolbenstangenführungen. 3. Das gegen den Rahmenbau und gegen den Kessel bewegliche System der Kolbenmassen und Bewegungsmechanismen. Im Beharrungszutand, den wir vorzugsweise im Auge behalten müssen, kommen im ganzen Bewegungssysteme folgende Einzelbewegungen vor: 1. Der mittlere Fortlauf der Bewegung. 2. Die durch den Kurbelmechanismus verursachten periodischen Bewegungen des Fortlaufes. 3. Die Bewegungen, welche durch die hin und her gehenden Massen der Kolben, Kolbenstangen, Schubstangen, Kupplungsstangen etc. entstehen. 4. Die mannigfaltigen Bewegungen, welche in dem Rahmen- und Kesselbau durch den Bewegungsmechanismus der Maschine hervorgerufen werden. Die mittlere Fortbewegung betrifft die Anzahl der Umdrehungen, welche die Triebräder