Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge

Kriemler, Karl

1902

Vorwort

urn:nbn:de:bsz:31-270207

VORWORT.

Vorliegende Arbeit beansprucht nicht, vom mathematischen Standpunkte aus Neues zu bieten, wohl aber für den Techniker wertvolle Folgerungen aus schon vorhandenen mathematischen Resultaten abzuleiten. Der zu diesen Folgerungen führende Weg bestand in der Hauptsache in der Bestimmung der Integrationskonstanten, deren Bestimmung die allgemeinen Lösungen erst auf diejenige Form brachte, aus welcher sich ein klares Bild von den einzelnen Vorgängen ergeben konnte.

Alle Untersuchungen beziehen sich auf Stäbe konstanten Querschnittes aus einem Materiale mit folgenden ideellen Eigenschaften:

1. es sei vollkommen homogen;
2. es habe eine unbegrenzte Festigkeit;
3. für jede Grösse der Spannung sei das Verhältnis von Spannung zur Dehnung oder Pressung gleich dem Festwert (Elastizitätsmodul) E.

Die erste dieser Voraussetzungen ist notwendig, weil es ganz unmöglich ist, in geschlossenen Formeln Zufälligkeiten in der Beschaffenheit des Materials zum Ausdruck zu bringen.

Die zweite Voraussetzung ist gemacht worden, weil die Deformationsvorgänge erkannt werden sollen, nicht aber die Zerstörungsvorgänge; es würde das Bild jener getrübt werden, wenn Bedingungsgleichungen mitgeführt werden müssten, durch welche jeweils der Übergang der Deformation in den Zerfall festgelegt würde. Sehr schön wäre es allerdings, wenn für die Grössen, durch welche die Deformation gemessen wird, Formeln aufgestellt werden könnten, welche den Eintritt des Zerfalles etwa dadurch kennzeichneten, dass diese Formeln für die Deformationsgrössen imaginäre Werte ergäben.

Durch die dritte Voraussetzung werden die gefundenen Resultate in ihrer Gültigkeit beschränkt auf solche Materialien, bei welchen die Zug- und Druckspannung σ und die Dehnung ε dem linearen Gesetz Hooke's $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ genügen, wo E denselben Wert hat für Zug und Druck.

Ausgeschlossen sind also diejenigen Materialien, welche z. B. dem Schüle-Bach'schen Gesetz $\frac{\sigma^m}{\varepsilon} = E_1$ unterworfen sind, wo $m \gtrless 1$ ist.

Im Grossen und Ganzen ist das lineare Gesetz $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ nur bei Walzeisen, Stahl und auch Holz erfüllt, und zwar auch bei diesen nur innerhalb der sogenannten Elastizitätsgrenze. Es ist aber im Mittel die Spannung an der Elastizitätsgrenze

beim Schweisseisen . . . $\sigma_g = 1600$ kg/cm^2,
» Flusseisen . . . . . $\sigma_g = 1900$ bis 2000 kg/cm^2,
» Stahl . . . . $\sigma_g = 3000$ bis 4500 kg/cm^2,
» Holz . . . . $\sigma_g = 100$ kg/cm^2.

Die im Folgenden gefundenen Resultate dürfen in praxi also auf Stäbe aus Walzeisen, Stahl und Holz angewendet werden, so lange als die der gefundenen Deformation entsprechende maximale Spannung höchstens gleich σ_g wird. Da nun bei einer gleichen Grösse der Deformation ein schwacher Stab weniger beansprucht ist als ein starker Stab, so sind die gefundenen Resultate, vorausgesetzt, dass keine unendlichen Stablängen verlangt sind, auch in praxi zu verwirklichen, wenn bei wachsender Deformation Stäbe von abnehmendem Trägheitsmoment benützt werden. Viele der Resultate werden sich also niemals auf einen Balken beziehen können, wohl aber z. B. auf bandförmige Federn.

Es wird unter anderem gezeigt werden:

1. dass ein vollkommen elastischer, gewichtsloser, ursprünglich gerader, an dem einen Ende eingespannter, an dem anderen Ende freier Stab von der Länge l und dem Trägheitsmomente J, auf den am freien Ende eine zur Richtung der Einspannung normale Last P wirkt, nur eine Gleichgewichtsfigur hat, so lange die Lastgrösse der Bedingung genügt $P < 1{,}393210 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$;

2. dass derselbe Stab, wenn die Last P parallel zur Einspannungsrichtung wirkt, nur eine Gleichgewichtsfigur hat, so lange die Lastgrösse der Bedingung genügt $P <= 0{,}25 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

Wenn in dem ersten Falle $P => 1{,}393210 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ und in dem zweiten Falle $P > 0{,}25 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ ist, wird gezeigt werden, dass es — abgesehen von eventuell möglichen anderen Gleichgewichtsfiguren — drei Gleichgewichtsfiguren derart giebt, dass der Stab bei der kleinsten Störung aus der mittleren labilen in eine oder die andere stabile Gleichgewichtsfigur umfällt. Bei dem Stabe, dessen Belastung parallel der Einspannung ist, ist dieses Umfallen als »Knickung« bekannt.

Dem Wesen nach ist also die Knickung nicht eine ausschliessliche Eigentümlichkeit des axial belasteten Stabes; sie kommt aber beim axial belasteten Stab deshalb häufiger zum Vorschein, weil bei demselben die natürliche Gleichgewichtsfigur die labile ist, während beim quer belasteten Stabe die labile Gleichgewichtsfigur erst durch eine vorübergehende künstliche Nachhülfe eingestellt werden kann, die natürliche Gleichgewichtsfigur aber die eine der stabilen ist.

In dem dritten und letzten Abschnitt wird endlich gezeigt werden, dass die sogenannte Knickkraft des axial belasteten Stabes bei Berücksichtigung aller drei deformierenden Einflüsse, nämlich des Momentes, der Normalkraft und der Querkraft, die Grösse hat

$$P = 0{,}25 \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{P}{F}\left(\frac{1}{\beta G} - \frac{1}{E}\right)},$$

worin β ein von der Querschnittsgestalt abhängiger Koeffizient ist. Es ist also bei genauerer Rechnung die Knickkraft abhängig von dem Trägheitsmoment J, von der Querschnittsgrösse F, von der Querschnittsgestalt, von der Elastizitätsziffer E und von der Schubelastizitätsziffer G.

Während im ersten und zweiten Abschnitte die Ableitungen mathematisch vollständig genau durchgeführt werden konnten, musste im dritten Abschnitte zur Ermöglichung eines Einblickes in die Vorgänge Schritt für Schritt minder Einflussreiches vernachlässigt werden.

Die Figuren geben die dargestellten Curven genau wieder mit Ausnahme der Figuren 1 a, 3 bis 8, 28, 35, 48 bis 54, welche nur schematisch sind.