# Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge

Kriemler, Karl

1902

Erster Fall

urn:nbn:de:bsz:31-270207

# Einleitung.

Wird ein Stab von äusseren Kräften beansprucht, welche seine Axe schneiden, so ergiebt die Reduktion der auf der einen Seite eines Querschnittes an dem Stabe angreifenden Kräfte z. B. nach dem Schwerpunkte dieses Querschnittes im allgemeinsten Falle 1. ein Moment, 2. eine zum Querschnitt normale Kraft, 3. eine in der Querschnittsebene liegende Kraft. Je nach der Art der Belastung können eine oder zwei dieser drei Reduktionselemente für einzelne oder für alle Querschnitte verschwinden oder von so geringem Einflusse sein, dass sie vernachlässigt werden können. Im Folgenden soll vorerst der Einfluss der zum Querschnitt normalen Kraft d. h. der Normalkraft und der in der Querschnittsebene liegenden Kraft d. h. der Querkraft ausser Berücksichtigung bleiben, es wird also die Annahme gemacht, dass in allen Querschnitten nur Momente wirken. Unter diesen Umständen besteht die Deformation des Stabes in einer reinen Verbiegung.

Ausführlich untersucht werden sollen folgende als reine Biegung aufgefasste Deformations- bezw. Belastungsfälle.

Das eine Ende eines im natürlichen d. h. spannungslosen Zustande geraden gewichtslosen Stabes, dessen Querschnitte gleich und gleich gelegen sind, ist eingespannt, das andere Ende ist frei. Dieser Stab wird künstlich so gekrümmt, dass seine Axe eine noch unbekannte Kurve (ohne Spitzen) in derjenigen Ebene bildet, welche die eine der Hauptträgheitsaxen der aufeinanderfolgenden Querschnitte enthält. In diesem deformierten Zustande soll nun der Stab dadurch erhalten werden, dass in der Ebene der gekrümmten Axe im Schwerpunkte des Stirnquerschnittes am freien Ende eine Einzelkraft angebracht wird, welche das eine Mal zur Richtung der Einspannung rechtwinkelig, das andere Mal der Richtung der Einspannung parallel ist. Die deformierte Stabaxe wird die elastische Linie des Stabes genannt. Die elastische Linie, die eine Hauptträgheitsaxe der aufeinanderfolgenden Querschnitte und die Kraft, welche die elastische Linie erhalten soll, liegen also in einer Ebene, welche somit, wie in den Figuren 1 und 2 geschehen, als Ebene der zeichnerischen Darstellung Verwendung finden kann.

## Erster Fall.

Der ursprünglich gerade gewichtslose Stab wird in der Krümmung erhalten durch eine im Schwerpunkt des freien Stirnquerschnittes angreifende Einzelkraft $P$, welche zur Richtung der Einspannung rechtwinkelig ist.

### I. Teil.

Da der Stab unter Einwirkung der Kraft $P$ in der Krümmung verbleibt, so sind in jedem Querschnitte die auf dessen Schwerpunkt reduzierten inneren Kräfte im Gleichgewicht mit den eben dorthin reduzierten auf der einen Seite vom Querschnitt am Stab angreifenden Kräften. Von den Reduktionselementen sollen nur die Momente Berücksichtigung finden, also ist $M_i = M_ä$ allein zu erfüllen. Ist ferner $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes bezogen auf die zur Ebene der elastischen Linie rechtwinkelige Hauptträgheitsaxe, und ist $\varrho$ der Krümmungsradius der elastischen Linie an der Stelle, wo sie den betrachteten Querschnitt kreuzt, so ist (Grashof, pag. 59 Gl. 81) $\frac{1}{\varrho} = \frac{M_i}{EJ}$, woraus, da $M_i = M_ä$ ist, folgt, dass in jedem Querschnitt $\frac{1}{\varrho} = \frac{M_ä}{EJ}$ ist.

Bemerkung. Die Unterscheidung zwischen $M_i$ und $M_ä$ ist nötig, weil nur beim Gleichgewicht beide denselben Wert haben; würde der Stab unter der Wirkung der Kraft $P$ aus dem geraden in den gebogenen Zustand übergehen, so wäre während der Deformation in jedem Augenblicke $M_i = M_ä + M_e$, wo $M_e$ das auf den betreffenden Querschnitt bezogene Moment der auf der einen Seite vom Querschnitt angreifend zu denkenden d'Alembert'schen Ergänzungskräfte ist.

Wird die elastische Linie des in Behandlung stehenden Stabes auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem bezogen, dessen Ursprung die Einspannungsstelle, dessen x-Axe die Richtung der Einspannung und dessen y-Axe im Sinne des Pfeiles der Kraft $P$ positiv ist, so hat man die Figur 3.

Es soll nun hier der Krümmungsradius $\varrho$ positiv genommen werden, wenn der betreffende Stabteil so gekrümmt ist, dass diejenige äusserste Faser gedrückt ist, welche im ursprünglichen, geraden Stabe auf der Seite lag, nach welcher der Pfeil von $P$ hinweist. Da aber $\varrho$ das Vorzeichen von $M_ä$ hat, so muss hier, wie aus der Figur 3 ersichtlich ist, $M_ä$ als positiv definiert werden, wenn das auf einen Querschnitt bezogene Moment der zwischen Querschnitt und freiem Stabende angreifenden Kräfte den Sinn der Uhrzeigerbewegung hat.

Wird, wie in der Fig. 3 geschehen ist, die Abscisse des Lastangriffspunktes mit $x_a$ bezeichnet, so ist das auf den Querschnitt, dessen Abscisse $x$ ist, bezogene Moment $M_ä = + P(x_a - x)$, also ist an dieser Stelle $\frac{1}{\varrho} = \frac{P}{EJ}(x_a - x)$. Zur Abkürzung soll $\frac{P}{EJ} = p^2$ gesetzt werden, so dass $\frac{1}{\varrho} = p^2(x_a - x)$ ist.

Es ist aber $\varrho \cdot d\varphi = ds$, wo $ds$ das Element der Bogenlänge ist, positiv im Sinne der Bewegung entlang der elastischen Linie vom eingespannten Ende gegen das freie Ende zu, und $d\varphi$ der Elementarwinkel ist, den die Tangente an die elastische Linie im Endpunkte von $ds$ bildet mit der Tangente im Anfangspunkte. Aus den Definitionen für positives $\varrho$ und für positives $ds$ folgt, dass $d\varphi$ positiv ist, wenn die Tangente im Anfangspunkt von $ds$ in die Tangente im Endpunkt von $ds$ durch eine Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung übergeht. Wird also auf der elastischen Linie vom eingespannten Ende gegen das freie Ende hin fortgeschritten, d. h. wird $ds$ immer positiv genommen, so haben $\varrho$ und $d\varphi$ stets beide dasselbe Vorzeichen, d. h. bei positivem $\varrho$ geht die Tangente in die nächstfolgende über durch eine Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung, bei negativem $\varrho$ geht sie in die nächstfolgende über durch eine Drehung, welche der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt ist. Da nun $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds}$ ist, so ist die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d\varphi}{ds} = p^2(x_a - x).$$

Der Winkel $\varphi$ ist derjenige Winkel, den die Tangente im Sinne der wachsenden $s$ und im Sinne der Drehung von der positiven x-Axe nach der positiven y-Axe mit der x-Axe bildet, es ist aber für die formale Behandlung zweckmässig, nicht diesen Winkel zu benützen, sondern den Winkel $\psi$, welchen die Tangente im Sinne der wachsenden s und im Sinne der Drehung des Uhrzeigers von der x-Axe nach der positiven y-Axe mit der Richtung der y-Axe bildet.

Die Figur 4 giebt $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$; $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$; $d\varphi = d\psi$; $\cos\varphi = \sin\psi$; $\sin\varphi = -\cos\psi$; $\cos\psi = -\sin\varphi$; $\sin\psi = \cos\varphi$.

Mit dieser Substitution wird die Differentialgleichung zu

**Gl. I)** $$\frac{d\psi}{ds} = p^2(x_a - x).$$

Wird links und rechts nach $ds$ differentiert, so hat man

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = -p^2\frac{dx}{ds}, \text{ aber es ist } \frac{dx}{ds} = \cos\varphi = \sin\psi, \text{ also ist } \frac{d^2\psi}{ds^2} = -p^2 \sin\psi.$$

Wird links und rechts mit $d\psi$ multipliciert, wodurch $d\psi \frac{d^2\psi}{ds^2} = -p^2 \sin\psi\, d\psi$, und dann noch die linke Seite mit $ds$ erweitert, so ist $\frac{d\psi}{ds} \frac{d^2\psi}{ds^2} ds = -p^2 \sin\psi\, d\psi$; es ist aber

$$d\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = 2 \frac{d\psi}{ds} \frac{d^2\psi}{ds^2} ds,$$

also hat man $\frac{1}{2} d\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = -p^2 \sin\psi\, d\psi$.

Die einmalige Integration dieser Gleichung giebt $\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = +p^2 \cos\psi + C_1$.

Nun ist für $x = x_a$ nach Gleichung 1 $\frac{d\psi}{ds} = 0$, und in Figur 4 ist für $x = x_a$ der Winkel $\psi$ mit $\gamma$ bezeichnet, also ist $0 = p^2 \cos\gamma + C_1$; $C_1 = -p^2 \cdot \cos\gamma$. Es ist also $\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = p^2 (\cos\psi - \cos\gamma)$.
Da aber $\cos\psi = 1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2}$ und $\cos\gamma = 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$ ist, so ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = p^2\left(2\sin^2\frac{\gamma}{2} - 2\sin^2\frac{\psi}{2}\right); \quad \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = 4p^2\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}\right);$$

**Gl. 2)**
$$\frac{d\psi}{ds} = 2p\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}.$$

Hieraus findet man durch Trennung der Variablen $2p\,ds = \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}}$.

Führt man nun die neue Variable ein $u = \frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$, so ist $\sin\frac{\psi}{2} = u \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$, und da

$$du = \frac{\cos\frac{\psi}{2}\, d\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{\psi}{2}\, d\psi}{\sin\frac{\gamma}{2}} \text{ ist, so ist umgekehrt } d\psi = 2\,du \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}};$$

$$d\psi = 2\,du \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\psi}{2}}}; \quad d\psi = 2\,du \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - u^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}}.$$

Es ist also mit dieser Substitution

$$2p\,ds = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2}(1-u^2)}} \cdot \frac{2\,du \sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - u^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}}; \quad 2p\,ds = \frac{2\,du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1 - u^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}}.$$

Zur Abkürzung soll jetzt $\sin\frac{\gamma}{2} = k$ gesetzt werden, so dass umgekehrt $\frac{\gamma}{2} = arc\sin k$; $\gamma = 2\, arc \sin k$ ist.
Demnach ist $p\,ds = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$. Hieraus ergiebt sich durch Integration

$$p(s - s_c) = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Die Grösse $s_c$ ist eine noch unbekannte Konstante.

Die Inversion dieses Integrales giebt $u = sn[p(s - s_c)]$, und da $\sin\frac{\psi}{2} = k \cdot u$ ist, so ist

**Gl. 3)**
$$\sin\frac{\psi}{2} = k \cdot sn[p(s - s_c)].$$

Da ferner $\cos\frac{\psi}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\psi}{2}}$, so ist $\cos\frac{\psi}{2} = \sqrt{1 - k^2 sn^2[p(s - s_c)]}$, also

**Gl. 4)**
$$\cos\frac{\psi}{2} = dn\,[p\,(s - s_c)]\,.$$

Nach Gleichung 2 ist $\frac{d\psi}{ds} = 2\,p\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}$. Mit $\sin\frac{\gamma}{2} = k$ und mit $\sin\frac{\psi}{2} = k\,sn\,[p\,(s-s_c)]$ wird nun $\frac{d\psi}{ds} = 2\,pk\sqrt{1 - sn^2\,[p\,(s - s_c)]}\,;\ \ \frac{d\psi}{ds} = 2\,p\,k\,cn\,[p\,(s - s_c)]$. Nach Gleichung 1 ist aber $\frac{d\psi}{ds} = p^2\,(x_a - x)$, es ist also $p^2\,(x_a - x) = 2\,p\,k\,cn\,[p\,(s - s_c)]$ oder

**Gl. 5)**
$$x_a - x = \frac{2\,k}{p}\,cn\,[p\,(s - s_c)],$$

worin $x_a$ die Abscisse des Lastangriffspunktes ist.

Ferner ist allgemein $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$, hier also $\frac{dy}{ds} = -\cos\psi = -\left(1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)$, oder wegen Gleichung 3 $\frac{dy}{ds} = -\,\{1 - 2\,k^2\,sn^2\,[p\,(s - s_c)]\}$; $\ dy = -\,\{1 - 2\,k^2\,sn^2\,[p\,(s - s_c)]\}\,ds$, woraus sich durch Integration ergiebt $y - y_c = -\int\{1 - 2\,k^2\,sn^2\,[p\,(s - s_c)]\}\,ds$; $\ y_c - y = s - \int 2\,k^2\,sn^2\,[p\,(s - s_c)]\,ds$.

Die Grösse $y_c$ ist die noch unbekannte Integrationskonstante. Setzt man zur Abkürzung $[p\,(s - s_c)] = v$ und demgemäss $ds = \frac{dv}{p}$, so ist $y_c - y = s - \frac{2}{p}\,k^2\int sn^2\,(v)\,dv$.

Es ist aber (Appell-Lacour pag. 144)
$$k^2\int sn^2\,[v]\,dv = -\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + v\cdot\frac{\Theta''(o)}{\Theta(o)},\ \text{also ist}\ y_c - y = s - \frac{2}{p}\left\{v\cdot\frac{\Theta''(o)}{\Theta(o)} - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\right\},$$
wo $\Theta$ die sogenannte Jacobi'sche Funktion ist. Diese Funktion $\Theta\,(v)$ ist durch folgendes unendliche Produkt dargestellt (Appell pag. 120)
$$\Theta\,(v) = A\left(1 - 2\,q\cos\frac{\pi v}{K} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi v}{K} + q^6\right)\cdots\cdot,\ \text{worin}\ q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$
wenn $K$ das Viertel der reellen und $K'$ der halbe Faktor der imaginären Periode von $sn\,(v)$ ist.

Setzt man kurz $\Theta\,(v) = A\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots\cdots$, so ist
$$\Theta'\,(v) = A\cdot\{a_1'\cdot a_2\,a_3\,a_4\cdots + a_1\cdot a_2'\cdot a_3\cdot a_4\cdots + a_1\cdot a_2\cdot a_3'\cdot a_4\cdots + a_1\,a_2\,a_3\,a_4'\cdots + \cdots\}\ \text{und}$$
$$\Theta''\,(v) = A\left\{\begin{array}{l} a_1''\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots + a_1'\,a_2'\,a_3\,a_4\cdots + a_1'\,a_2\,a_3'\,a_4\cdots + a_1'\,a_2\,a_3\,a_4'\cdots + \cdots \\ a_1'\cdot a_2'\,a_3\,a_4\cdots + a_1\,a_2''\,a_3\,a_4\cdots + a_1\,a_2'\,a_3'\,a_4\cdots + a_1\,a_2'\,a_3\,a_4'\cdots + \cdots \\ a_1'\cdot a_2\,a_3'\,a_4\cdots + a_1\,a_2'\,a_3'\,a_4\cdots + a_1\,a_2\,a_3''\,a_4\cdots + a_1\,a_2\,a_3'\,a_4'\cdots + \cdots \\ a_1'\cdot a_2\,a_3\,a_4'\cdots + a_1\,a_2'\,a_3\,a_4'\cdots + a_1\,a_2\,a_3'\,a_4'\cdots + a_1\,a_2\,a_3\,a_4''\cdots + \cdots \\ \cdots\cdots + \cdots\cdots + \cdots\cdots + \cdots\cdots + \cdots \end{array}\right\},$$
woraus sich ergiebt
$$\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} = \frac{a_1'}{a_1} + \frac{a_2'}{a_2} + \frac{a_3'}{a_3} + \frac{a_4'}{a_4} + \cdots\cdots;$$
$$\frac{\Theta''(v)}{\Theta(v)} = \frac{a_1''}{a_1} + \frac{a_2''}{a_2} + \frac{a_3''}{a_3} + \frac{a_4''}{a_4} + \cdots\cdots + 2\,\frac{a_1'}{a_1}\sum_2^\infty\frac{a_n'}{a_n} + 2\,\frac{a_2'}{a_2}\sum_3^\infty\frac{a_n'}{a_n} + \cdots\cdots;$$
Da aber $a_1 = 1 - 2\,q\cos\frac{\pi v}{K} + q^2$ ist, so ist $a_1' = +\,2\,q\,\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K}$; $a_1'' = +\,2\,q\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\cos\frac{\pi v}{K}$, und da
$$a_2 = 1 - 2\,q^3\cos\frac{\pi v}{K} + q^6\ \text{ist, so ist}\ a_2' = +\,2\,q^3\,\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K};\ a_2'' = +\,2\,q^3\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\cos\frac{\pi v}{K}.$$
Man hat somit $\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} = 2\,\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K}\left\{\frac{q}{1 - 2\,q\cos\frac{\pi v}{K} + q^2} + \frac{q^3}{1 - 2\,q^3\cos\frac{\pi v}{K} + q^6} + \cdots\right\}$ und
$$\left[\frac{\Theta''(v)}{\Theta(v)}\right]_{v=o} = 2\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\left\{\frac{q}{1 - 2\,q + q^2} + \frac{q^3}{1 - 2\,q^3 + q^6} + \cdots\right\},$$
weil die Glieder mit den Faktoren $a_1'$; $a_2'$ etc. verschwinden, da diese für $v = o$ zu Null werden.

Setzt man nun zur Abkürzung $\left(\frac{2\pi}{K}\right)^2\left\{\frac{q}{1-2q+q^2}+\frac{q^3}{1-2q^3+q^6}+\cdots\right\}=b$ und

$$\left\{\frac{q}{1-2q\cos\frac{\pi v}{K}+q^2}+\frac{q^3}{1-2q^3\cos\frac{\pi v}{K}+q^6}+\cdots\right\}=f\left\{\cos\frac{\pi v}{K}\right\},$$

so wird $y_c-y=s-\frac{2}{p}\left\{v\cdot\frac{b}{2}-2\,\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K}\cdot f\left[\cos\frac{\pi v}{K}\right]\right\}$, oder mit $v=p\,(s-s_c)$;

$$y_c-y=s-(s-s_c)\,b+\frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K}\,f\left\{\cos\frac{\pi v}{K}\right\};$$

lässt man noch das konstante Glied $b\cdot s_c$ in die noch unbestimmte Konstante $y_c$ eintreten, dann ist

$$y_c-y=s\,(1-b)+\frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(s-s_c)\right]\cdot f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(s-s_c)\right]\right\},$$

woraus sich ergiebt $y=y_c+(b-1)\,s-\frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(s-s_c)\right]\,f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(s-s_c)\right]\right\}$, und setzt man $b-1=a$, so hat man

**Gl. 6)** $$y=y_c+a\cdot s-\frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(s-s_c)\right]\,f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(s-s_c)\right]\right\},$$

worin $y_c$ und $s_c$ noch zu bestimmende Integrationskonstanten sind, während

$$a=\left(\frac{2\pi}{K}\right)^2\left\{\frac{q}{1-2q+q^2}+\frac{q^3}{1-2q^3+q^6}+\cdots\right\}-1 \text{ ist, und}$$

$$f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(s-s_c)\right]\right\}=\frac{q}{1-2q\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(s-s_c)\right]+q^2}+\frac{q^3}{1-2q^3\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(s-s_c)\right]+q^6}+\cdots \text{ ist.}$$

Die Grösse $a$ hat, wie sich beim zweiten Fall ergiebt, eine sehr einfache Bedeutung.

Nun soll der Wert der Integrationskonstante $s_c$ bestimmt werden. Dies kann mit Hilfe der Gleichung 5 geschehen, wenn man berücksichtigt, dass $x=x_a$ und $s=l$ zusammengehörige Werte sind, wenn mit $l$ die Länge des Stabes bezeichnet wird zwischen Einspannungsquerschnitt und Stirnquerschnitt. Aus Gleichung 5 folgt $o=\frac{2k}{p}\,cn\,[p\,(l-s_c)]$, damit aber diese Gleichung erfüllt sei, muss $cn\,[p\,(l-s_c)]=o$ sein, d. h. es muss $p\,(l-s_c)=K$ sein.

Es ist also $l-s_c=\frac{1}{p}K$; $s_c=l-\frac{K}{p}$;

**Gl. 7)** $$s_c=\frac{1}{p}\,(pl-K).$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante $y_c$ dienen die zusammengehörigen Werte $s=o$; $y=o$, mit welchen aus Gleichung 6 folgt $o=y_c-\frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(-s_c)\right].\ f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(-s_c)\right]\right\}$, woraus

$$\text{mit } -s_c=\frac{1}{p}\,(K-pl);\ y_c=\frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,(K-pl)\right]\cdot f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}\,(K-pl)\right]\right\};$$

$$y_c=\frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\pi-\frac{\pi}{K}\,pl\right]\cdot f\left\{\cos\left[\pi-\frac{\pi}{K}\,pl\right]\right\}.$$

Es ist aber $\sin\left[\pi-\frac{\pi}{K}\,pl\right]=+\sin\left[\frac{\pi}{K}\,pl\right]$; $\cos\left[\pi-\frac{\pi}{K}\,pl\right]=-\cos\left[\frac{\pi}{K}\,pl\right]$, also ist

**Gl. 8)** $$y_c=\frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,pl\right]\cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K}\,pl\right]\right\}.$$

Mit dem Werte $-s_c=\frac{1}{p}\,(K-pl)$ hat man $p\,(s-s_c)=p\cdot s-p\cdot s_c=p\cdot s+K-p\cdot l$; $p\,(s-s_c)=K-p\,(l-s)$, so dass Gleichung 5 wird zu

**Gl. 9)** $$x_a - x = \frac{2k}{p}\, cn\,[K - p\,(l - s)]$$

und Gleichung 6 wird zu $y = y_c + as - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}(K - p\,(l-s))\right]\cdot f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}(K - p\,(l-s))\right]\right\}$;

$$y = y_c + as - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\pi - \frac{\pi}{K}p\,(l-s)\right]\cdot f\left\{\cos\left[\pi - \frac{\pi}{K}p\,(l-s)\right]\right\}, \text{ also}$$

**Gl. 10)** $$y = y_c + as - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p\,(l-s)\right]\cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K}p\,(l-s)\right]\right\}.$$

Diese zwei Gleichungen geben für jede Bogenlänge $s$ die Koordinaten $x$ und $y$ der elastischen Linie, falls $p$, $k$, $K$, $q$ und $x_a$ bekannt sind. Da aber $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ ist, so sind die noch anzugebenden Werte $p$, $k$, $K$, $K'$ und $x_a$. Nun bestehen zwischen $k$ und $K$ beziehungsweise $K'$ folgende Beziehungen (Appell-Lacour pag. 156)

**Gl. A)** $$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2 k^{2n} + \cdots\right]$$

und mit $k'^2 = 1 - k^2$

**Gl. B)** $$K' = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k'^4 + \cdots + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2 k'^{2n} + \cdots\right].$$

Praktisch wird man zweckmässiger das zu $k$ gehörige $q$ aus einer der vorhandenen Tabellen entnehmen

**Gl. A+]** $q$ aus Tabelle entsprechend $k$

und hat dann (Schlömilch Band II pag. 449)

**Gl. B+]** $$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots\right]^2.$$

Es bleiben nun noch anzugeben die Werte von $p$, $k$ und $x_a$.

Es sind aber zusammengehörig $s = o$, $x = o$ und $\varphi = o$; mit den zwei ersteren folgt aus Gleichung 9

**Gl. C]** $$x_a = \frac{2k}{p}\, cn\,[K - pl].$$

Ferner war allgemein (Seite 4) $\frac{dy}{ds} = -\{1 - 2k^2 sn^2[K - p\,(l-s)]\}$, und weil $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$ ist, $\varphi$ aber für $s = o$ auch gleich null ist, so ist $1 - 2k^2 sn^2[K - pl] = o$, woraus folgt $sn^2[K - pl] = \frac{1}{2k^2}$.

Aus Gleichung C folgt aber $cn^2[K - pl] = \frac{p^2}{4k^2}\cdot x_a^2$, und da $sn^2(v) + cn^2(v) = 1$ ist, so ist $\frac{1}{2k^2} + \frac{p^2}{4k^2}x_a^2 = 1$; $1 + \frac{p^2}{2}x_a^2 = 2k^2$;

**Gl. D]** $$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}x_a^2.$$

Wie ursprünglich die Aufgabe gestellt war, war die Deformation angenommen, d. h $x_a$ wurde als bekannt vorausgesetzt. Ist aber $x_a$ bekannt, so können aus den Gleichungen C und D die Grössen $k$ und $p$ berechnet werden. Es wird aber in den meisten Fällen $p$ gegeben sein, dann können aus den Gleichungen C und D die Grössen $k$ und $x_a$ berechnet werden.

Für die rechnerische Behandlung bedarf Gleichung C der Umformung. Da $cn\,[K+v] = -k'\frac{sn\,(v)}{dn\,(v)}$ ist, und $v = -pl$ ist, so hat man $cn\,[K-pl] = -k'\frac{sn(-pl)}{dn(-pl)}$, und da $sn\,(-v) = -sn\,(v)$, aber $dn\,(-v) = +dn\,(v)$ ist, so ist $cn\,[K-pl] = k'\frac{sn\,(pl)}{dn\,(pl)}$, also ist (Schlömilch pag. 420)

$$cn\,[K-pl] = \frac{2\pi}{kK}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\left[\frac{\pi}{2K}pl\right] - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\left[\frac{3\pi}{2K}pl\right] + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin\left[\frac{5\pi}{2K}pl\right] - \dots\dots\right\},$$

und die Gleichung C wird zu

**Gl. C*]** $$x_a = \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\left[\frac{\pi}{2K}pl\right] - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\left[\frac{3\pi}{2K}pl\right] + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin\left[\frac{5\pi}{2K}pl\right] - \dots\right\}.$$

Die gesuchten Werte für $k$ und $x_a$ finden sich nun durch successive Annäherung aus den Gleichungen D und C*. Man hat einen wahrscheinlichen Wert von $x_a$ anzunehmen, mit demselben ein vorläufiges $k$ aus Gleichung D zu berechnen, aus den Gleichungen A* und B* vorläufige Werte von $q$ und $K$ zu bestimmen und mit diesen aus Gleichung C* das sich ergebende $x_a$ zu ermitteln. Dieses Verfahren hat man fortzusetzen, bis das sich ergebende $x_a$ mit dem zuletzt angenommenen $x_a$ übereinstimmt.

In den speziellen Fällen, wo der Stab sehr steif und die Last verhältnismässig klein ist, wird die Krümmung des Stabes nur gering sein, und $x_a$ wird nur wenig von $l$ verschieden sein. Dann kann als erste Annäherung $x_a = l$ gesetzt werden, so dass sich aus Gleichung D der vorläufige Wert ergiebt $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}l^2$.

Da ferner (Appell-Lacour pag. 135) $sn\,(pl) = pl\left\{1 - (k^2+1)\frac{p^2l^2}{6} + (k^4+14k^2+1)\frac{p^4l^4}{120} + \dots\right\}$ und $dn\,(pl) = 1 - 3k^2\frac{p^2l^2}{6} + (5k^4+20k^2)\frac{p^4l^4}{120} + \dots$, so ist

$$\frac{sn\,(pl)}{dn\,(pl)} = pl\cdot\left\{1 + (2k^2-1)\frac{p^2l^2}{6} + (1+16k^2(k^2-1))\frac{p^4l^4}{120} + \dots\right\}$$

und $cn\,[K-pl] = k'pl\left\{1 + (2k^2-1)\frac{p^2l^2}{6} + (1+16k^2[k^2-1])\frac{p^4l^4}{120} + \dots\right\}$.

Es wird also Gleichung C zu

**Gl. C**]** $$x_a = 2kk'l\left\{1 + (2k^2-1)\frac{p^2l^2}{6} + [1+16k^2(k^2-1)]\frac{p^4l^4}{120} + \dots\right\}.$$

In erster Annäherung ist aber $2k^2 - 1 = 1 + \frac{p^2}{2}l^2 - 1 = \frac{p^2l^2}{2}$ und

$$16k^2(k^2-1) = (8+4p^2l^2)\left(\frac{p^2l^2}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2p^2l^2 - 4 + p^4l^4 - 2p^2l^2 = p^4l^4 - 4,$$

also $[1+16k^2(k^2-1)] = p^4l^4 - 3$.

Ferner ist $k'^2 = 1 - k^2$, also in erster Annäherung $k'^2 = \frac{1}{2} - \frac{p^2l^2}{4}$ und

$$2kk' = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{p^2l^2}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{p^2l^2}{4}\right)} = 2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{p^4l^4}{16}} = \sqrt{1-\frac{p^4l^4}{4}};$$

somit hat man in zweiter Annäherung

$$x_a = l\cdot\sqrt{1-\frac{p^4l^4}{4}}\left\{1 + \frac{p^4l^4}{12} - 3\frac{p^4l^4}{120} + \dots\right\};\quad x_a = l\cdot\sqrt{1-\frac{p^4l^4}{4}}\left\{1 + \frac{7}{120}p^4l^4 + \dots\right\},$$

und mit $\sqrt{1-\frac{p^4l^4}{4}} = \left(1-\frac{p^4l^4}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{p^4l^4}{4} + \dots;\quad x_a = l\cdot\left(1-\frac{1}{8}p^4l^4\right)\left(1+\frac{7}{120}p^4l^4\right)$

$$= l\left\{1 + \frac{7}{120}p^4l^4 - \frac{1}{8}p^4l^4 - \dots\right\} = l\left\{1 - \left(\frac{1}{8}-\frac{7}{120}\right)p^4l^4\right\} = l\left\{1 - \frac{16}{240}p^4l^4\right\}.$$

Es wird also bei nur schwachen Krümmungen des Stabes in zweiter Annäherung Gleichung C zu

**Gl. C***]** $$x_a = l\left(1 - \frac{1}{15}p^4l^4\right).$$

Mit diesem Werte von $x_a$ kann nun aus Gleichung D, wenn nötig, ein verbesserter Wert von $k$ berechnet werden, dann ergiebt Gleichung C** einen verbesserten Wert von $x_a$.

---

Anmerkung. Bei dieser Aufgabe ist vorausgesetzt, dass die Last $P$ in einem ganz bestimmten Punkte $s = l$ der Axe des Stabes angreift, so dass die Wirkungslinie der Last parallel mit sich bei der Deformation des Stabes verschoben wird, wie in Figur 5 dargestellt.

Es soll nun angenommen werden, dass der Last eine unverschiebliche Wirkungslinie angewiesen ist, dann werden bei der Deformation des Stabes immer andere Punkte der Axe zum Lastangriffspunkte, wie in Figur 6 dargestellt.

Bei dieser Annahme bleiben die Gleichungen 1 bis 10, A und B bestehen, während die Verwertung der Gleichungen C und D anderer Art wird.

Ohne Probieren ergiebt sich aus Gleichung D $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4} \cdot x_a^2$, worin jetzt $x_a$ gegeben ist.

Aus Gleichung C folgt durch Umformung $cn\,[K - pl] = \frac{p}{2k} x_a$; $K - pl = arg\; cn \left[\frac{p}{2k} x_a\right]$; $pl = K - arg\; cn \left[\frac{p}{2k} x_a\right]$; $l = \frac{1}{p}\left\{K - arg\; cn \left[\frac{p}{2k} x_a\right]\right\}$, so dass auch $l$ ohne Probieren gefunden werden kann. In den speziellen Fällen, wo die Krümmung nur schwach ist, kann in Gleichung C** innerhalb der Klammern als erste Annäherung $l = x_a$ gesetzt werden, so dass man hat $x_a = 2kk'l\left\{1 + (2k^2 - 1)\frac{p^2 x_a^2}{6} + [1 + 16k^2(k^2 - 1)]\frac{p^4 x_a^4}{120} + \cdots\right\}$, also mit dem obigen Werte für $k^2$;

$$x_a = l\sqrt{1 - \frac{p^4 x_a^4}{4}}\left\{1 + \frac{7}{120} p^4 x_a^4\right\}, \text{ woraus } l = x_a\left(1 - \frac{p^4 x_a^4}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{7}{120} p^4 x_a^4\right\}^{-1};$$

$$l = x_a\left(1 + \frac{1}{8} p^4 x_a^4\right)\left\{1 - \frac{7}{120} p^4 x_a^4\right\}; \quad l = x_a\left[1 + \frac{1}{8} p^4 x_a^4 - \frac{7}{120} p^4 x_a^4\right]; \quad l = x_a\left[1 + \frac{1}{15} p^4 x_a^4\right].$$

---

Auf die ursprüngliche Aufgabe zurückgehend, bei welcher $x_a$ veränderlich ist, so hat man aus Gleichung D

$$x_a^2 = \frac{4}{p^2}\left(k^2 - \frac{1}{2}\right); \quad x_a = \frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}.$$

Es giebt also nur ein reelles $x_a$, wenn

$$k^2 => \frac{1}{2}; \quad k => \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da anderseits (Seite 3) $k = \sin\frac{\gamma}{2}$ ist, so giebt es anderseits nur ein reelles $x_a$, wenn $k <= 1$ ist.

Für vorliegende Aufgabe kann sich also $k$ nur bewegen zwischen den Grenzen $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und 1, demnach ist $\frac{1}{\sqrt{2}} <= k <= 1$.

Es ist aber der Grenzfall $k = 1$ für die Amplitudenfunktionen ein Fall der Entartung, auf welchen besonders eingegangen werden muss. Mit $k = \sin\frac{\gamma}{2} = 1$ wird Gleichung 2 zu

$$\frac{d\psi}{ds} = 2p\sqrt{1 - \sin^2\frac{\psi}{2}};$$

**Gl. 2a)** $$\frac{d\psi}{ds} = 2p \cdot \cos\frac{\psi}{2}.$$

Durch Trennung der Variablen wird hieraus $2\,pds = \frac{d\psi}{\cos\frac{\psi}{2}}$; $pds = \frac{d\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}}$, und durch Integration

$$ps = \log tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{4}\right) + \log\frac{1}{c}; \quad ps = \log\frac{1}{c}\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{4}\right).$$

Durch die Inversion erhält man $ce^{ps} = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{4}\right)$, worin $c$ eine noch unbekannte Integrationskonstante ist.

Nun ist $tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{4}\right)=\frac{1+tg\frac{\psi}{4}}{1-tg\frac{\psi}{4}}$, also ist

$$\left(1-tg\frac{\psi}{4}\right)\cdot c\cdot e^{ps}=1+tg\frac{\psi}{4};\quad c\cdot e^{ps}-1=(ce^{ps}+1)\,tg\frac{\psi}{4};\quad tg\frac{\psi}{4}=\frac{c\cdot e^{ps}-1}{c\cdot e^{ps}+1}.$$

Es ist aber $\sin\frac{\psi}{2}=\frac{2\,tg\frac{\psi}{4}}{1+tg^2\frac{\psi}{4}}$; $\cos\frac{\psi}{2}=\frac{1-tg^2\frac{\psi}{4}}{1+tg^2\frac{\psi}{4}}$, also ist

**Gl. 3a)** $$\sin\frac{\psi}{2}=\frac{c^2e^{2ps}-1}{c^2e^{2ps}+1}$$ **Gl. 4a)** $$\cos\frac{\psi}{2}=2\frac{c\cdot e^{ps}}{c^2e^{2ps}+1}.$$

Wegen Gleichung 2a ist also $\frac{d\psi}{ds}=4\cdot p\frac{c\cdot e^{ps}}{c^2e^{2ps}+1}$; nach Gleichung 1 ist aber $\frac{d\psi}{ds}=p^2(x_a-x)$, also hat man

**Gl. 5a)** $$x_a-x=\frac{4}{p}\,\frac{c\cdot e^{ps}}{c^2e^{2ps}+1}.$$

Ferner ist (Seite 4) $\frac{dy}{ds}=-\left(1-2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)$, somit $-dy=\left(1-2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)ds.$

Aus Gleichung 2a aber ergiebt sich $ds=\frac{d\psi}{2\,p\cos\frac{\psi}{2}}=\frac{d\frac{\psi}{2}}{p\cos\frac{\psi}{2}}$, also

$$-dy=\frac{1-2\left(1-\cos^2\frac{\psi}{2}\right)}{p\cdot\cos\frac{\psi}{2}}d\frac{\psi}{2};\quad -dy=\frac{-1+2\cos^2\frac{\psi}{2}}{p\cdot\cos\frac{\psi}{2}}d\frac{\psi}{2};\quad -dy=\frac{2}{p}\cos\frac{\psi}{2}\,d\frac{\psi}{2}-\frac{1}{p}\frac{d\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}},$$

woraus durch Integration, weil $pds=\frac{d\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}}$ ist,

$$y_c-y=\frac{2}{p}\int\cos\frac{\psi}{2}\,d\frac{\psi}{2}-\int ds;\quad y_c-y=\frac{2}{p}\sin\frac{\psi}{2}-s;\quad y_c-y=\frac{2}{p}\frac{c^2e^{2ps}-1}{c^2e^{2ps}+1}-s;$$

**Gl. 6a)** $$y=y_c+s-\frac{2}{p}\frac{c^2e^{2ps}-1}{c^2e^{2ps}+1}.$$

Nun sind noch die Integrationskonstanten $c$ und $y_c$ zu bestimmen. Es sind $s=o$ und $\psi=\frac{\pi}{2}$ zusammengehörige Werte, dann ist $\frac{\psi}{2}=\frac{\pi}{4}$ und man hat $\cos\frac{\psi}{2}=\sin\frac{\psi}{2}$, d. h. mit den Werten aus den Gleichungen 3a und 4a, wenn $s=o$ gesetzt wird,

$$\frac{2c}{c^2+1}=\frac{c^2-1}{c^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}},\text{ oder } 2c=c^2-1;\quad c^2-2c-1=o;\quad c=1\pm\sqrt{1+1}=1\pm\sqrt{2}.$$

Nun ist der kleinste Wert von $\psi$ der Wert $\frac{\pi}{2}$, der grösste aber ist hier, wo $k=1$ ist,

$$\gamma=2\,arc\sin(1)=\pi,$$

also bewegt sich der Winkel $\frac{\psi}{2}$ zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$, so dass $\sin\frac{\psi}{2}$ und $\cos\frac{\psi}{2}$ beide positiv sind, und man hat als allein giltig

**Gl. 7a)** $$c=1+\sqrt{2}.$$

Wegen einer späteren Untersuchung soll $c=e^{-p\cdot s_c}$ gesetzt werden, dann ist $-p\cdot s_c=\log c$;

$$s_c=-\frac{1}{p}\log c.$$

Es sind ferner zusammengehörig $s = o$ und $y = o$, also giebt Gleichung 6a

$$o = y_c - \frac{2}{p}\frac{c^2 - 1}{c^2 + 1}; \quad y_c = \frac{2}{p}\frac{1}{\sqrt{2}};$$

**Gl. 8a)**
$$y_c = \frac{\sqrt{2}}{p}.$$

Ausserdem sind noch zusammengehörig $s = o$ und $x = o$, also ist nach Gleichung 5a

$$x_a = \frac{4}{p}\frac{c}{c^2 + 1}; \quad x_a = \frac{2}{p}\frac{2c}{c^2 + 1};$$

**Gl. Ca)**
$$x_a = \frac{\sqrt{2}}{p}$$

in Übereinstimmung mit dem Werte für $x_a$, den man aus Gleichung D mit $k = 1$ bekommt.

Nun sind noch zusammengehörig $s = l$ und $x = x_a$, also giebt Gleichung 5a

$$o = \frac{4}{p}\frac{c \cdot e^{pl}}{c^2 e^{2pl} + 1}.$$

Diese Gleichung ist aber nur erfüllt, wenn $e^{2pl} = \infty$ ist, damit dies aber der Fall sei, muss $l = \infty$ sein.

---

Anmerkung. Die formal mögliche andere Lösung $p = \infty$ setzt, da $p = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$ ist, voraus, dass entweder $J = o$ ist, d. h. dass der Stab in einen vollkommen biegsamen Faden ausgeartet ist, oder dass $P = \infty$ ist; dann konzentriert sich die ganze Biegung auf die Einspannungsstelle, der Stab erscheint, trotzdem er steif ist, gegenüber der unendlich grossen Kraft, nur als ein vollkommen biegsamer Faden. Mit $p = \infty$ hat man richtig $x$ konstant $= o$ und $y = s$, entsprechend einem gezogenen Faden, bei welchem die Deformation durch die Normalkraft vernachlässigt ist. [Es ist in dem Falle $p = \infty$ das Verhalten von $M_ä = P(x_a - x)$ interessant. Da allgemein $P(x_a - x) = 4\frac{P}{p}\frac{c e^{ps}}{c^2 e^{2ps} + 1}$, und da $P$ proportional $p^2$ ist, so ist für $p = \infty$; $P(x_a - x) = \frac{\infty^2}{\infty}\cdot\frac{\infty_1}{\infty_1^2} = \frac{\infty}{\infty_1} = 0$, weil $\infty_1$ von höherer Ordnung ist als $\infty$. Es ist also $P(x_a - x) = o$ für alle $x$. Rechnet man aber direkt $P \cdot x_a$, so hat man $P x_a = \frac{P}{p}\sqrt{2} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$. Für $x = o$ hat also $M_ä$ zwei Werte, dies erklärt sich daraus, dass der Stab resp. Faden scharf um 90° abgebogen wird.]

---

Der obere Grenzfall $k = 1$ ist also nur möglich, wenn die Stablänge $l$ unendlich gross ist. Da aber für $k = 1$ der Winkel $\gamma$ den Wert $\pi$ hat, so ist die Lastlinie selbst Berührende an die elastische Linie im Lastangriffspunkt. Nun sind aber die Koordinaten des Lastangriffspunktes in diesem Falle $x = x_a = \frac{\sqrt{2}}{p}$ und $y = y_a = y_c + l - \frac{2}{p}\frac{c^2 e^{2pl} - 1}{c^2 e^{2pl} + 1} = \infty$.

Es ist also, wenn $k = 1$ ist, die Lastlinie $x = x_a = \frac{\sqrt{2}}{p}$ Asymptote der elastischen Linie.

Ist die Stablänge endlich, so kann $k$ den Wert 1 nicht annehmen; die elastische Linie kann bei endlicher Stablänge im Lastangriffspunkt nicht die Richtung der Kraft haben.

## Beispiel für die Anwendung.

Ein Stab konstanten Querschnittes aus Schweisseisen ist mit seinem einen Ende horizontal eingespannt und trägt an seinem freien Ende die lotrechte Last $P$ (Figur 7); welche Werte haben nach der Deformation die Koordinaten des Lastangriffspunktes?

Wenn für den Krümmungsradius nicht der genaue Wert

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)}$$

sondern, wie üblich, als Annäherung

$$\varrho = \frac{1}{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)}$$

gesetzt wird, und wenn gleichzeitig die Änderungen der Abscissen vernachlässigt werden, so ist (vergleiche Grashof pag. 72) $x_a = l$; $y_a = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3} = p^2 \frac{l^3}{3}$. Ist nun $l = 400$ cm; $\mathfrak{J} = 100$ cm$^4$; $E = 2\cdot000\cdot000$ klg/cm$^2$, und das eine Mal $P_1 = 40$ klg, das andere Mal $P_2 = 80$ klg, so ist

$$p_1^2 = \frac{40}{2\cdot000\cdot000\cdot100}\,;\quad p_2^2 = \frac{80}{2\cdot000\cdot000\cdot100}\,;\quad p_1^2 = \frac{1}{5\cdot10^6}\,;\quad p_2^2 = \frac{2}{5\cdot10^6}\,;\ \text{also ist}$$

$$y_{1a} = \frac{1}{5\cdot10^6}\cdot\frac{4^3\cdot10^6}{3}\,;\quad y_{2a} = 2\cdot y_{1a}\,;\quad y_{1a} = \frac{4^3}{15} = 4{,}27\ \text{cm}\,;\quad y_{2a} = 8{,}53\ \text{cm}.$$

Nach den genauen Formeln ist die Rechnung wie folgt:

$$P_1 = 40\,\text{kg};\quad p_1^2 = \frac{4}{5\cdot10^6}\,.$$

In zweiter Annäherung ist nach Gleichung C*** $x_a = l\left(1 - \frac{1}{15}p^4 l^4\right)$, hier ist also

$$x_a = 400\left(1 - \frac{1}{15}\,\frac{1}{5^2\cdot10^{12}}\cdot4^4\cdot10^8\right);\quad x_a = 400\left(1 - \frac{1}{15}\,\frac{1}{25\cdot10^4}\,256\right);$$

$$x_a = 400\left(1 - \frac{0{,}6827}{10000}\right) = 400\cdot0{,}999932\,;\quad x_a = 399{,}97\ \text{cm}.$$

Es ist aber nach Gleichung D $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p^2\cdot x_a^2$; hier ist also $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5\cdot10^6}\cdot399{,}97^2$;
$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{20\cdot10^6}\cdot159976$; $k^2 = 0{,}507999$; $k = 0{,}7127$.

Hiermit durch lineare Interpolation aus der Tafel Schlömilch Compendium II pag. 448
$q = 0{,}04421$; $q^2 = 0{,}00196$; $q^3 = 0{,}000086$; $q^4 = 0{,}0000038$; $q^5 = \cdots\cdots$; $q^6 = \cdots\cdots$

Es ist also nach Gleichung B*

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 0{,}08842 + 0{,}0000076 + \cdots\right]^2;\quad K = \frac{\pi}{2}\left[1{,}1847\right] = \pi\cdot0{,}59235 = 1{,}8609.$$

Nun ist nach Gleichung 10, wenn $s = l$ gesetzt wird, $y_a = y_c + a\cdot l$.

Nach Gleichung 8 ist aber

$$y_c = \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}pl\right]\left\{\frac{q}{1 + 2q\cos\left[\frac{\pi}{K}pl\right] + q^2} + \frac{q^3}{1 + 2q^3\cos\left[\frac{\pi}{K}pl\right] + q^6}\right\}.$$

Hier ist $\frac{\pi}{K}pl = \frac{\pi}{1{,}8609}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}\cdot10^3}\cdot400 = \pi\cdot\frac{1}{10{,}403} = 17^\circ\,18'\,00''$, also ist

$$\sin\left[\frac{\pi}{K}pl\right] = 0{,}29737;\quad \cos\left[\frac{\pi}{K}pl\right] = 0{,}95476,$$

und man hat

$$y_c = 4\cdot\sqrt{5}\cdot10^3\,\frac{1}{0{,}59235}\,0{,}29737\left\{\frac{0{,}04421}{1 + 2\cdot0{,}04421\cdot0{,}95476 + 0{,}002} + \frac{0{,}00009}{1 + 2\cdot0{,}00009\cdot0{,}95476 + 0}\right\}$$

$$= 4\cdot\sqrt{5}\cdot10^3\cdot0{,}50202\left\{\frac{0{,}04421}{1{,}08637} + \frac{0{,}00009}{1{,}00017}\right\}$$

$$= 4\cdot\sqrt{5}\cdot10^3\cdot0{,}50202\left\{\begin{matrix}0{,}04070\\0{,}00009\\\hline 0{,}04079\end{matrix}\right\} = 4\cdot\sqrt{5}\cdot10^3\cdot0{,}02048\,;\quad y_c = 183{,}16\ \text{cm}.$$

Es ist ferner nach der Gleichung auf Seite 5

$$a = \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 \left(\frac{q}{1-2q+q^2} + \frac{q^3}{1-2q^3+q^6} + \cdots\right) - 1.$$

Hier ist

$$\frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0{,}59235} = 3{,}37638; \quad \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 11{,}39992;$$

$$1 + a = 11{,}39992 \cdot \left(\frac{0{,}04421}{1 - 2\cdot 0{,}04421 + 0{,}00196} + \frac{0{,}00009}{1 - 2\cdot 0{,}00009 + 0}\right);$$

$$1 + a = 11{,}39992 \cdot \left(\frac{0{,}04421}{0{,}91354} + \frac{0{,}00009}{0{,}99982}\right);$$

$$1 + a = 11{,}39992 \cdot \left\{\begin{matrix} 0{,}04841 \\ 0{,}00009 \\ \hline 0{,}04850 \end{matrix}\right\} = 0{,}55290;$$

$$a = -(1 - 0{,}55290); \quad a = -0{,}44710; \quad a\cdot l = -178{,}84 \text{ cm}.$$

Es ergiebt sich somit durch die genauen Formeln, wenn $P_1 = 40$ kg ist,

$$x_a = 399{,}97 \text{ cm}; \quad y_a = 183{,}16 - 178{,}84; \quad y_a = 4{,}32 \text{ cm}.$$

Der Unterschied gegen die angenäherten Werte ist

$$\text{bei } x_a,\ \Delta = -\frac{3}{10} \text{ mm}; \quad \text{bei } y_a,\ \Delta = +\frac{5}{10} \text{ mm}.$$

Jetzt sei $P_2 = 80\,kg$; $p_2{}^2 = \frac{2}{5\cdot 10^6}$.

In zweiter Annäherung ist nach Gleichung C*** $x_a = l\left(1 - \frac{1}{15} p^4 l^4\right)$, hier ist also

$$x_a = 400\left(1 - \frac{1}{15}\,\frac{4}{5^2\cdot 10^{12}}\cdot 4^4\cdot 10^8\right), \text{ und mit Benützung des früheren Resultates}$$

$$x_a = 400\left(1 - 4\cdot\frac{0{,}6827}{10000}\right) = 400\cdot 0{,}999727; \quad x_a = 399{,}89 \text{ cm}.$$

Es ist aber nach Gleichung D $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} p^2 \cdot x_a{}^2$, hier ist also $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5\cdot 10^6}\, 399{,}89^2$;

$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10^7}\cdot 159912; \quad k^2 = 0{,}50000 + 0{,}01599; \quad k^2 = 0{,}515991; \quad k = 0{,}71832.$$

Für dieses $k$ findet man durch lineare Interpolation aus der Tafel Schlömilch pag. 448 $q = 0{,}04523$; $q^2 = 0{,}002045$; $q^3 = 0{,}000092$; $q^4 = 0{,}000004$.

Es ist also nach Gleichung B*

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 0{,}09046 + 0{,}000008\right]^2; \quad K = \frac{\pi}{2}\cdot 1{,}18912 = \pi\cdot 0{,}59456 = 1{,}86787.$$

Demnach hat man hier

$$\frac{\pi}{K} pl = \frac{\pi}{1{,}86787}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\,\frac{1}{10^3}\cdot 400 = \pi\cdot 0{,}13544; \quad \frac{\pi}{K} pl = 24^\circ 22' 46'', \text{ und es ist } \sin\frac{\pi}{K} pl = 0{,}41277;$$

$$\cos\frac{\pi}{K} pl = 0{,}91083.$$

Es ist somit

$$y_c = 4\cdot\frac{\sqrt{5}\cdot 10^3}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{0{,}59456}\,0{,}41277\cdot\left\{\frac{0{,}04523}{1 + 2\cdot 0{,}04523\cdot 0{,}91083 + 0{,}002045} + \frac{0{,}000092}{1 + 2\cdot 0{,}000092\cdot 0{,}91083 + 0} + \cdots\right\};$$

$$y_c = 4\,\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\,10^3\cdot 0{,}69423\left\{\frac{0{,}04523}{1{,}08444} + \frac{0{,}000092}{1{,}00017}\right\}$$

$$= 4\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cdot 10^3\cdot 0{,}69423\left\{\begin{matrix} 0{,}04171 \\ 0{,}00009 \\ \hline 0{,}04180 \end{matrix}\right\} = 4\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\,10^3\cdot 0{,}02902 = 183{,}56 \text{ cm}; \quad y_c = 183{,}56 \text{ cm}.$$

Es ist ferner hier

$$\frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0{,}59456} = 3{,}36383; \quad \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 11{,}31535;$$

$$1 + a = 11{,}31535\left(\frac{0{,}04523}{1 - 2\cdot 0{,}04523 + 0{,}002045} + \frac{0{,}00009}{1 - 2\cdot 0{,}00009 + 0}\right) = 11{,}31535\left(\frac{0{,}04523}{0{,}91159} + \frac{0{,}00009}{0{,}99982}\right)$$

$$= 11{,}31535\left\{\begin{array}{|l|}0{,}04962\\0{,}00009\\\hline 0{,}04971\end{array}\right\} = 0{,}56248;\quad a = -(1 - 0{,}56248);\quad a = -0{,}43752;\quad a\cdot l = -175{,}008 \text{ cm.}$$

Es ergiebt sich somit durch die genauen Formeln, wenn $P_2 = 80$ kg ist, $x_a = 399{,}89$ cm; $y_a = 183{,}56 - 175{,}01$; $y_a = 8{,}55$ cm.

Der Unterschied gegen die angenäherten Werte ist

$$\text{bei } x_a,\ \Delta = -\frac{11}{10}\text{ mm};\quad \text{bei } y_a,\ \Delta = +\frac{2}{10}\text{ mm.}$$

In diesen beiden Beispielen sind die Differenzen in $y_a$ so klein, dass sie jedenfalls nur von den Zufälligkeiten der Rechnung herrühren; die Krümmungen sind demnach innerhalb derjenigen Grenzen, innerhalb welcher die angenäherten Formeln vollständig genügen.

Nun soll bei einem Stabe $l = 400$ cm; $p^2 = \frac{1}{10^5}\cdot 1{,}07163$ gegeben sein, welches sind die Koordinaten des Lastangriffspunktes nach der Deformation?

Nach Gleichung D hat man $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}\cdot x_a{}^2$. Es soll nun $x_a$ zu 349,4 cm geschätzt werden, also ist vorläufig

$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{10^5}\cdot 1{,}07163\cdot 122080{,}36;\quad k^2 = \frac{1}{2} + 0{,}32706;\quad k^2 = 0{,}82706;\quad k = 0{,}90943$$

vorläufig. Jetzt soll mit diesem $k$ nach Gleichung C** ein verbesserter Wert von $x_a$ gerechnet werden.

Es ist $k'^2 = 1 - k^2 = 0{,}17294$; $k' = 0{,}41586$, also $2\,kk'l = 2\cdot 0{,}90943\cdot 0{,}41586\cdot 400$;

$$2\,kk'l = 302{,}544;\quad 2\,k^2 - 1 = 0{,}65412;\quad \frac{2\,k^2 - 1}{6} = 0{,}10902;\quad k^2 - 1 = -0{,}17294;\quad 16\,k^2 = 13{,}23296;$$

$$16\,k^2(k^2 - 1) = -2{,}28851;\quad 1 + 16\,k^2(k^2 - 1) = -1{,}28851;\quad \frac{1 + 16\,k^2(k^2 - 1)}{120} = -0{,}01074;$$

$$p^2 l^2 = \frac{1}{10^5}\cdot 1{,}07163\cdot 160000 = 1{,}71461;\quad p^4 l^4 = 2{,}93990;\quad \frac{2\,k^2 - 1}{6}\cdot p^2 l^2 = 0{,}18692;$$

$$\frac{1 + 16\,k^2(k^2 - 1)}{120}\,p^4 l^4 = -0{,}03157;$$

$$1{,}00000 + 0{,}18692;\quad 1{,}18692 - 0{,}03157 = 1{,}15535;\quad x_a = 302{,}544\cdot 1{,}15535;\quad x_a = 349{,}54421.$$

Das angenommene und das gerechnete $x_a$ stimmen genügend überein, also ist $k = 0{,}90943$ endgültig.

Für dieses $k$ findet man mit Hülfe der Tafel Schlömilch II pag. 448:

$$q = 0{,}10800;\quad q^2 = 0{,}01166;\quad q^3 = 0{,}00126;\quad q^4 = 0{,}00014.$$

Es ist also nach Gleichung B*

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 0{,}21600 + 0{,}00028\right]^2;\quad K = \frac{\pi}{2}\cdot 1{,}47934 = \pi\cdot 0{,}73967 = 2{,}32373.$$

Hiermit ist

$$\frac{\pi}{K}\,pl = \frac{\pi}{2{,}32373}\cdot\sqrt{\frac{1{,}07163}{10^5}}\cdot 400 = \frac{\pi}{2{,}32373}\cdot\frac{\sqrt{10{,}7163}}{10^3}\cdot 400 = \frac{\pi}{2{,}32373}\cdot\frac{3{,}27358}{10^3}\,400$$

$= \pi\cdot 0{,}56350 = 101^\circ 25{,}8'$; $\frac{\pi}{K}\,pl = 90^\circ + 11^\circ 25{,}8'$, also ist

$$\sin\left[\frac{\pi}{K}\,pl\right] = \sin\left[90^\circ + 11^\circ 25{,}8'\right] = \cos\left[11^\circ 25{,}8'\right] = 0{,}98016;$$

$$\cos\left[\frac{\pi}{K}\,pl\right] = -\sin\left[11^\circ 25{,}8'\right] = -0{,}19817.$$

Man hat somit

$$y_c = 4\,\frac{10^3}{3{,}27358}\cdot\frac{1}{0{,}73967}\,0{,}98016\left\{\frac{0{,}10800}{1 - 2\cdot 0{,}108\cdot 0{,}19817 + 0{,}01166} + \frac{0{,}00126}{1 - 2\cdot 0{,}00126\cdot 0{,}19817 + 0}\right\};$$

$$y_c = 4\cdot\frac{10^3}{3{,}27358}\cdot\frac{1}{0{,}73967}\cdot 0{,}98016\left\{\frac{0{,}10800}{0{,}96886} + \frac{0{,}00126}{0{,}99950}\right\};$$

$$y_c = 4\cdot\frac{10^3}{3{,}27358}\cdot\frac{1}{0{,}73967}\cdot 0{,}98016\left\{\begin{array}{|l|}0{,}11147\\0{,}00127\\\hline 0{,}11274\end{array}\right\};\quad y_c = 182{,}56\text{ cm.}$$

Ferner ist hier

$$\frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0{,}73967} = 2{,}70390; \quad \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 7{,}31107;$$

$$1 + a = 7{,}31107 \left(\frac{0{,}10800}{1 - 2 \cdot 0{,}10800 + 0{,}01166}\right) + \frac{0{,}00126}{1 - 2 \cdot 0{,}00126 + 0}\Bigg);$$

$$1 + a = 7{,}31107 \left\{\frac{0{,}10800}{0{,}79566} + \frac{0{,}00126}{0{,}99748}\right\};$$

$$1 + a = 7{,}31107 \left\{\begin{matrix} 0{,}13571 \\ 0{,}00127 \\ \hline 0{,}13698 \end{matrix}\right\} = 1{,}00147;$$

$$a = +0{,}00147; \quad a \cdot l = +0{,}59 \text{ cm}.$$

Es ergiebt sich also bei dieser Aufgabe $y_a = 182{,}56 + 0{,}59$; $y_a = 183{,}15$ cm, und es ist schon gefunden worden $x_a = 349{,}54$ cm.

Obschon die angenäherten Formeln zur Voraussetzung haben, dass die ursprünglichen Hebelsarme sich nicht ändern, obschon sie also hier, wo der Hebelsarm der Last sich von 400 cm auf 349,54 cm verringert, gar nicht angewendet werden dürften, soll doch zum Vergleich $y_a$ nach der angenäherten Formel berechnet werden. $y_a = p^2 \frac{l^3}{3} = \frac{1{,}07163}{10^5} \cdot \frac{4^3 \cdot 10^6}{3}$; $y_a = 228{,}6$ cm.

Das angenäherte $y_a$ ist zu gross; dies rührt offenbar daher, dass die Momente infolge der zu grossen Hebelsarme zu gross ausfallen.

---

Bei dieser letzten Aufgabe war

$$p^2 = \frac{1{,}07163}{10^5}$$

gegeben. Wenn nun der Stab aus Schweisseisen war, so war

$$\frac{P}{2 \cdot 000 \cdot 000 \cdot J} = \frac{1{,}07163}{10^5}; \quad \frac{P}{J} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}07163}{10^5}; \quad \frac{P}{J} = 21{,}43260.$$

Die Lösung hat nur so lange Gültigkeit, als die grösste Spannung kleiner als die Spannung an der Elasticitätsgrenze ist. Die Spannung an der Elasticitätsgrenze ist aber bei Schweisseisen $\sigma_g = 1600$ klg/cm².

Bei vorliegendem Stabe ist im Gleichgewichtszustand

$$\sigma_{\max} = \frac{P \cdot x_a}{J} \cdot e,$$

wenn $e$ der Abstand der äussersten Faser von der neutralen Axe ist, also muss

$$\frac{P \cdot x_a}{J} \cdot e <= 1600$$

sein, d. h.

$$e <= \frac{1600}{x_a}\left(\frac{J}{P}\right); \quad e <= \frac{1600}{349{,}54 \cdot 21{,}4326}; \quad e <= \frac{1600}{7491{,}55}; \quad e <= 0{,}214 \text{ cm}.$$

Angenommen der Querschnitt des Stabes sei ein Rechteck, mit der Breite $b = 2$ cm und der Höhe $h = 2 \cdot e = 0{,}42$ cm, dann ist

$$J = \frac{2 \cdot 0{,}42^3}{12} = 0{,}012 \text{ cm}^4; \quad P = 0{,}012 \cdot 21{,}4326 = 0{,}26 \text{ kg}; \quad \sigma_{\max} = \frac{0{,}26 \cdot 349{,}54}{0{,}012} \cdot 0{,}21 = 1590 \text{ kg}.$$

Es findet sich demnach an diesem Beispiele bestätigt, dass die sich ergebenden Resultate bei starken Deformationen nur auf bandförmige Federn angewendet werden können.

---

Bei dem letzten Zahlenbeispiel hat sich zufällig ergeben, dass für $q = 0{,}10800$ der Wert von $a$ sehr wenig von $o$ verschieden ist. Es soll an dieser Stelle gleich zur späteren Benützung festgestellt werden, dass $a$ mit genügender Annäherung $= o$ wird für $q = 0{,}10770$.

Wenn $q = 0{,}10770$ ist, dann ist $q^2 = 0{,}01159$; $q^3 = 0{,}00125$; $q^4 = 0{,}00014$;

$$K = \frac{\pi}{2}\left\{1{,}00000 + 0{,}21540 + 0{,}00028\right\}^2; \quad K = \frac{\pi}{2} \cdot 1{,}47789 = \pi \cdot 0{,}73894 = 2{,}32144;$$

$$\frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0{,}73894} = 2{,}70658; \quad \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 7{,}32557;$$

$$1 + a = 7{,}32557 \left( \frac{0{,}10770}{1 - 2 \cdot 0{,}10770 + 0{,}01159} + \frac{0{,}00125}{1 - 2 \cdot 0{,}00125 + 0} \right)$$

$$= 7{,}32557 \left\{ \begin{array}{l} 0{,}13526 \\ \underline{0{,}00125} \\ 0{,}13651 \end{array} \right\} = 1{,}00001\,; \quad a = o$$

mit einer Abweichung jenseits der vierten Decimale.

Diesem $q = 0{,}10770$ entspricht $k = 0{,}90895$, und da $k = \sin \frac{\gamma}{2}$ ist, so ist $\frac{\gamma}{2} = 65^\circ 21{,}6'$; $\gamma = 130^\circ 43{,}2'$. Dem Winkel $\psi_a = \gamma$ entspricht der Winkel $\varphi_a$, wo $\varphi_a = \gamma - 90$; $\varphi_a = 40^\circ 43{,}2'$.

Für den ersten Belastungsfall (nach Fig. 8) sind demnach folgende ausgezeichnete Werte vorhanden:

$$\varphi_a = 0; \quad \gamma = 90^\circ; \quad k = \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70711.$$

$$\varphi_a = 40^\circ 43{,}2'; \quad \gamma = 130^\circ 43{,}2'; \quad k = \sin \frac{\gamma}{2} = 0{,}90895.$$

$$\varphi_a = 90^\circ; \quad \gamma = 180^\circ; \quad k = \sin \frac{\gamma}{2} = 1{,}00000.$$

## II. Teil.

Es mögen die Hauptformeln, welche die allgemeine Lösung der ursprünglichen Aufgabe bilden, an dieser Stelle zusammengestellt werden:

$$\frac{1}{\varrho} = p^2 (x_a - x) = \frac{d\psi}{ds}\,;$$

$$\sin \frac{\psi}{2} = k\, sn\,[K - p\,(l - s)]; \quad \cos \frac{\psi}{2} = dn\,[K - p\,(l - s)];$$

$$dy = -\,\{1 - 2\,k^2\, sn^2\,[K - p\,(l - s)]\}\; ds;$$

$$x_a = \frac{2\,k}{p}\, cn\,[K - pl];$$

$$x_a - x = \frac{2\,k}{p}\, cn\,[K - p\,(l - s)];$$

$$y = y_c + as - F\left\{\sin\left[\frac{\pi}{K}\, p\,(l - s)\right]; \quad \cos\left[\frac{\pi}{K}\, p\,(l - s)\right]\right\},$$

worin $F\{\cdot\cdot\cdot\}$ sich aus Gleichung 10 ergiebt.

Nach den Voraussetzungen der ursprünglichen Aufgabe haben diese Formeln nur Gültigkeit von $s = o$ bis $s = l$, denn falls der Stab länger wäre als $l$, d. h. falls der Stab über den Lastangriffspunkt hinausragte, so wäre dieser hinausragende Teil geradlinig tangential an die elastische Linie im Lastangriffspunkt. Wenn man aber bei obigen Formeln von der Entstehung derselben ganz absieht, den Grössen $k$, $K$, $p$, $l$ und damit auch den Grössen $y_c$ und $a$ die Bedeutung von Konstanten, der Grösse $s$ aber die Bedeutung einer unabhängigen Variablen giebt, so ist durch diese Formeln eine unbegrenzte Kurve festgelegt. Das Studium dieser Kurve wird rückwärts wieder Schlüsse auf den belasteten Stab ermöglichen.

Die unabhängige Variable $s$ stellt natürlich auch bei dieser Kurve die von $O$ aus gemessene Bogenlänge dar, nur kann bei der Kurve $s$ auch negative Werte annehmen, nämlich wenn von $O$ aus rückwärts gegangen wird.

Da bei dieser Kurve $x_a - x = \frac{2\,k}{p}\, cn\,[K - p\,(l - s)]$ ist, so hat $x_a - x$ sein Maximum resp. sein Minimum, wenn $cn\,[K - p\,(l - s)]$ sein Maximum resp. sein Minimum hat.

Es ist aber $\underset{\max}{cn\,(v)} = 1$; $\underset{\min}{cn\,(v)} = -1$, also ist

$$\underset{\max}{(x_a - x)} = +\frac{2\,k}{p}; \quad \underset{\min}{x} = x_a - \frac{2\,k}{p}; \quad \underset{\min}{(x_a - x)} = -\frac{2\,k}{p}; \quad \underset{\max}{x} = x_a + \frac{2\,k}{p}.$$

Der ganze Verlauf der Kurve ist somit eingeschlossen zwischen den zwei Parallelen zur y-Axe, welche links und rechts von $x_a$ den Abstand $\frac{2k}{p}$ haben. Es ist aber $cn(v) = +1$ für $v = 0$; damit aber $K - p(l-s) = 0$ sei, muss $s = l - \frac{K}{p}$ sein.

Nach Gleichung 7 ist aber $l - \frac{K}{p} = s_c$, so dass $s_c$ diejenige Bogenlänge ist, um welche der Kurvenpunkt von $O$ entfernt ist, welchem $x_{\min}$ entspricht.

Ferner ist $cn(v) = -1$ für $v = 2K$; damit aber $K - p(l-s) = 2K$ sei, muss $s = l + \frac{K}{p}$ sein.

Also gehört zu $s = s_c = l - \frac{K}{p}$ das $\underset{\min}{x} = x_a - \frac{2k}{p}$ und zu $s = l + \frac{K}{p}$ das $\underset{\max}{x} = x_a + \frac{2k}{p}$.

Da $x_a$ positiv ist, so ist in $x_a = \frac{2k}{p} cn[K - pl]$ der Wert von $cn[K - pl]$ positiv, ausserdem ist $cn[K - pl] < 1$, also ist $x_a < \frac{2k}{p}$ d. h. es ist $x_{\min}$ negativ; d. h. der dem $x_{\min}$ entsprechende Kurvenpunkt liegt links von $O$, und $s_c$ ist eine negative Grösse, es ist also $\frac{K}{p} > l$.

Für $s = l - \frac{K}{p}$ ist $\sin\left[\frac{\pi}{K} p(l-s)\right] = \sin \pi = 0$, also ist $F\{\cdots\}$ in der Gleichung für $y$ gleich null, und für $x_{\min}$ hat man $y_{li} = y_c + a\left(l - \frac{K}{p}\right)$.

Für $s = l + \frac{K}{p}$ ist $\sin\left[\frac{\pi}{K} p(l-s)\right] = \sin(-\pi) = 0$, also für $x_{\max}$ hat man

$$y_r = y_c + a\left(l + \frac{K}{p}\right) = y_{li} + 2a\frac{K}{p}.$$

Da für $s = l$; $y = y_a = y_c + al$ ist, so ist auch $y_{li} = y_a - a \cdot \frac{K}{p}$; $y_r = y_a + a \cdot \frac{K}{p}$.

Für $x_{\min}$ d. h. für $s = l - \frac{K}{p}$ ist $K - p(l-s) = 0$, und infolge dessen $\sin\frac{\psi}{2} = 0$; $\cos\frac{\psi}{2} = +1$; also ist $\psi = 0$.

Für $x_{\max}$ d. h. für $s = l + \frac{K}{p}$ ist $K - p(l-s) = 2K$, also ist $\sin\frac{\psi}{2} = 0$; $\cos\frac{\psi}{2} = 1$, und es ist wieder $\psi = 0$.

Es ist also sowohl bei $x_{\min}$ als auch bei $x_{\max}$ die Tangente an die Kurve im Sinne der wachsenden $s$ parallel der $y$-Axe aufwärts gerichtet.

Da $d\psi = p^2(x_a - x)\,ds$ ist, so ist bei wachsendem $s$ der Kontingenzwinkel positiv, so lange $x_a > x$ ist, also ist $d\psi$ links von $x_a$ positiv, rechts von $x_a$ negativ, d. h. beim Fortschreiten von $x_{\min}$ über $x_a$ nach $x_{\max}$ dreht sich zuerst die Tangente im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers, wobei $\psi$ von $0$ auf $\gamma$ wächst, von $x_a$ an aber dreht sich die Tangente wieder rückwärts entgegen dem Sinne der Bewegung des Uhrzeigers, wobei $\psi$ von $\gamma$ auf $0$ abnimmt. Nach dem getroffenen Übereinkommen bedeutet dies, dass in einem nach der Kurve gekrümmten Stabe die ursprünglich untere Faser links von $x_a$ gedrückt, rechts von $x_a$ aber gezogen wird.

Nimmt man links und rechts von $x_a$ zwei gleiche Abstände $(x_a - x)$ so ist beiderseits der Kontingenzwinkel $d\psi$ von derselben absoluten Grösse, und die links und rechts von $x_a$ liegenden Teilkurven sind infolge dessen im Bezug auf den Punkt $x_a$; $y_a$ diametral symmetrisch. Da nun der Kurvenpunkt $s = 0$ (Einspannungsstelle) eine zur x-Axe parallele Tangente hat, so hat auch der Punkt $s = 2l$ eine zur x-Axe parallele Tangente, und die Ordinaten dieses Punktes sind

$$x = 2x_a \text{ und } y = 2y_a.$$

Schreitet man bei wachsendem $s$ rückwärts von $x_{\max}$ über $x_a$ nach $x_{\min}$ zurück, so ist $d\psi$ rechts von $x_a$ immer noch negativ, links von $x_a$ wird es aber wieder positiv, also dreht sich auf dem Rückwege von $x_{\max}$ nach $x_a$ die Tangente entgegen dem Sinne des Uhrzeigers, von $x_a$ aber nach $x_{\min}$ dreht sie sich wieder im Sinne des Uhrzeigers, also ist auch auf dem Rückwege rechts von $x_a$ in einem nach der Kurve gekrümmten Stabe die an der Einspannungsstelle nach unten gelegene Faser gezogen, während sie links von $x_a$ wieder gedrückt ist. Nimmt man auf dem Hinwege und auf dem Rückwege Kurvenpunkte, welche von $x_{\max}$ gleiche Abstände haben, so haben sie auch von $x_a$ gleiche Abstände $(x_a - x)$, also haben sie auch gleiche Kontingenzwinkel $d\psi$; es sind demnach die vor dem der Abscisse $x_{\max}$ entsprechenden Kurvenpunkte und die hinter ihm gelegenen Teilkurven symmetrisch in Bezug auf die durch diesen Kurvenpunkt gehende Parallele zur x-Axe, denn die Tangente in dem Punkte ist ja zur x-Axe rechtwinkelig. Auf dem Hinwege ist bei $x_a$ der Winkel $\psi = \gamma$, auf dem Rückwege ist bei $x_a$ der Winkel $\psi = -\gamma$.

Schreitet man bei wachsendem $s$ von dem Kurvenpunkte, in welchem zum zweiten Male $x = x_{\min}$ wurde, wieder vorwärts über $x_a$ nach $x_{\max}$, so findet man durch dieselben Überlegungen, dass die vor dem der Abscisse $x_{\min}$ entsprechenden Kurvenpunkte und die hinter ihm gelegenen Teilkurven symmetrisch sind in Bezug auf die durch diesen Punkt gehende Parallele zur x-Axe.

Die ganze Kurve ist also eine Aufeinanderfolge von Kurvenstücken, die kongruent sind mit dem Kurvenstück $s = s_c$ bis $s = l$. Dieses Kurvenstück wird zuerst diametral um den Punkt $x_a y_a$ umgeklappt, d. h. um $180^\circ$ um $x_a y_a$ gedreht, dann werden die beiden Stücke zusammen um die Gerade $y = y_r$ umgeklappt, und man ist so wieder zu einem dem $x_{\min}$ entsprechenden Kurvenpunkte angekommen; klappt man alles Vorausgehende um die durch diesen letzten Punkt gehende Parallele zur x-Axe, so erhält man die einem weiteren Umlauf von $x_{\min}$ nach $x_{\max}$ und zurück entsprechende Kurve.

Die dem ersten Umlauf von $x_{\min}$ nach $x_{\max}$ und zurück entsprechende Kurve ist in den Figuren 9 und 10 dargestellt für die zwei Annahmen $a < o$ und $a > o$. In diesen Figuren ist noch ein Teil der dem nächsten Umlauf entsprechenden Kurve hinzugefügt.

Nimmt man das eine Mal eine Bogenlänge $s = s_1$, das nächste Mal eine Bogenlänge $s_2 = s_1 \pm 4\frac{K}{p}$, so ist das eine Mal

$$x_a - x_1 = \frac{2k}{p} cn\,[K - p(l - s_1)]; \quad y_1 = y_c + as_1 - F\left\{\sin\left[\frac{\pi}{K} p(l - s_1)\right];\ \cos\left[\frac{\pi}{K} p(l - s_1)\right]\right\},$$

das andere Mal

$$x_a - x_2 = \frac{2k}{p} cn\,[K - p(l - s_1) \pm 4K] = \frac{2k}{p} cn\,[K - p(l - s_1)];$$

$$y_2 = y_c + a \cdot s_1 \pm 4a\frac{K}{p} - F\left\{\sin\left[\frac{\pi}{K} p(l - s_1) \mp 4\pi\right];\ \cos\left[\frac{\pi}{K} p(l - s_1) \mp 4\pi\right]\right\};$$

$$y_2 = y_c + as_1 \pm 4a\frac{K}{p} - F\left\{\sin\left[\frac{\pi}{K} p(l - s_1)\right];\ \cos\left[\frac{\pi}{K} p(l - s_1)\right]\right\}.$$

Wenn demnach die Bogenlänge von $s_1$ auf $s_2 = s_1 \pm 4\frac{K}{p}$ angewachsen ist, so wird

$$x_2 = x_1; \quad y_2 = y_1 \pm 4a\frac{K}{p}.$$

Aus den Figuren 9 und 10 ist zu entnehmen, dass dem ersten vollen Umlauf von $x_{\min}$ bis $x_{\max}$ und zurück die Bogenlänge $4\frac{K}{p}$ entspricht, denn $\frac{3K}{p} + l - \left(l - \frac{K}{p}\right) = 4\frac{K}{p}$.

Also ist das jedem folgenden Umlauf entsprechende Kurvenstück kongruent mit dem dem vorausgehenden Umlauf entsprechenden Kurvenstück und gegen dasselbe versetzt um

$$\varDelta y = \pm 4a\frac{K}{p}.$$

Die Parallelen zur x-Axe durch jede der auf einander folgenden, dem $x_{\min}$ und dem $x_{\max}$ entsprechenden Kurvenpunkte sind für den ganzen unbegrenzten Verlauf der Kurve Symmetrieaxen. Diese Symmetrieaxen folgen in den Abständen $\frac{1}{2}\varDelta y = 2a\frac{K}{p}$ auf einander.

Es war

$\frac{2k}{p} cn\,[K - pl] = x_a$, nun ist $cn\,[K - pl] = cn\,[K - pl - 4K] = cn\,[-pl - 3K] = cn\,[pl + 3K]$, also ist $\frac{2k}{p} cn\,[pl + 3K] = x_a$, oder $\frac{2k}{p} cn\left[K + p\left(\frac{2K}{p} + l\right)\right] = x_a$; ersetzt man also $l$ durch $l + \frac{2K}{p}$ und $l + \frac{2K}{p}$ durch $l + \frac{4K}{p}$ etc., so haben alle diese Punkte die Abscisse $x_a$. Nun ist

$$\frac{\pi}{K}p\left(l-\left(l+\frac{2K}{p}\right)\right)=\frac{\pi}{K}p\cdot\frac{2K}{p}=2\pi;\quad \frac{\pi}{K}p\left(l-\left(l+\frac{4K}{p}\right)\right)=\frac{\pi}{K}p\cdot\frac{4K}{p}=4\pi,$$

so dass die zu diesen $x_a$ gehörigen Ordinaten der Reihe nach sind

$$y=y_a;\quad y=y_a+2a\frac{K}{p};\quad y=y_a+4a\frac{K}{p}\ \text{etc.}$$

Alle die Kurvenpunkte mit der Abscisse $x_a$ sind Wendepunkte, denn die Kurve bildet abwechselnd links und rechts von $x_a$ Schleifen, in welchen ein nach diesen Schleifen gekrümmter Stab in der Faser, welche an der Einspannungsstelle unten liegt, links von $x_a$ Druck, rechts von $x_a$ aber Zug erfahren würde. In der ersten Hälfte jeden Umlaufes d. h. von $x_{\min}$ bis $x_{\max}$ liegt die untere Faser unten, in der zweiten Hälfte jeden Umlaufes d. h. von $x_{\max}$ bis $x_{\min}$ liegt die untere Faser aber oben. In den Schleifen links von $x_a$ ist die untere Faser innen, in den Schleifen rechts von $x_a$ ist die untere Faser aussen.

Aus der Figur 9 ist zu ersehen, dass wenn $a$ negativ ist, die Kurve bei wachsendem $s$ nach aufwärts verläuft; aus der Figur 10 ist zu ersehen, dass, wenn $a$ positiv ist, die Kurve bei wachsendem $s$ nach abwärts verläuft.

Sollen je die auf der einen und der anderen Seite von $x_a$ aufeinanderfolgenden Schleifen sich berühren, so ersieht man aus der Figur 9, dass $2y_r=0$ sein muss, d. h. es muss $y_r=0$ sein, also muss

$$y_a+a\cdot\frac{K}{p}=0;\quad a\frac{K}{p}=-y_a;\quad a=-\frac{p}{K}\cdot y_a$$

sein; da $y_a$ stets positiv ist, so ist diese Berührung nur bei negativem $a$ möglich. Dieser Fall ist in Figur 11 dargestellt. Ist $a$ negativ aber $>-\frac{p}{K}y_a$, d. h. ist absolut genommen $\left[a\frac{K}{p}\right]<y_a$, dann schneidet je auf der einen und auf der anderen Seite von $x_a$ jede folgende Schleife die vorausgehende in zwei Punkten. Je mehr sich $a$ der Null nähert, desto mehr nähern sich diese Schnittpunkte den Kurvenpunkten, welche den Abscissen $x=x_a$ und $x=x_{\min}$ resp. $x_{\max}$ entsprechen.

Ist $a=0$ geworden, dann wird ausser dem immer periodischen $x$ auch die Ordinate $y$ rein periodisch (vergl. Gl. 10), weil der Ausdruck $a\cdot s$ wegfällt. Der Abstand $\Delta y=4a\frac{K}{p}$ der zwei aufeinanderfolgenden Umläufen entsprechenden Kurvenstücke wird mit $a$ zu null, also überdecken sich die einzelnen Umläufe unendlich oft, wie in Figur 12 dargestellt.

Solange $a<0$ ist, so lange sind die einzelnen Schleifen offen; für $a=0$ schliessen sie sich in dem gemeinsamen Punkte $x_a\,y_a$; für $a>0$ hat jede Schleife in sich einen Doppeltpunkt (Fig. 10).

Sollen wieder je die auf der einen und der anderen Seite von $x_a$ auf einander folgenden Schleifen sich berühren, so ersieht man aus der Figur 10, dass $4a\frac{K}{p}-2y_{II}=0$ sein muss, also muss $a\frac{K}{p}=\frac{1}{3}y_a$; $a=\frac{1}{3}\frac{p}{K}y_a$ sein.

Da $y_a$ stets positiv ist, so ist diese Berührung nur bei positivem $a$ möglich. Dieser Fall ist in Figur 13 dargestellt.

Ist $a$ positiv aber $<\frac{1}{3}\frac{p}{K}y_a$, dann schneidet je auf der einen und auf der anderen Seite von $x_a$ jede folgende Schleife die vorausgehende in zwei Punkten.

Die Resultate hinsichtlich der Wirkung von $a$ sind zusammengefasst folgende:

| | |
|---|---|
| $a<0$ | Verlauf nach oben bei wachsendem $s$. |
| $a=0$ | unendlichfache Überdeckung. |
| $a>0$ | Verlauf nach unten bei wachsendem $s$. |
| $a<-\frac{p}{K}y_a$ | offene Schleifen, die sich gegenseitig nicht schneiden. |
| $a=-\frac{p}{K}y_a$ | offene Schleifen die sich berühren. |
| $0>a>-\frac{p}{K}y_a$ | offene Schleifen, die sich gegenseitig in zwei Punkten schneiden. |
| $0<a<\frac{1}{3}\frac{p}{K}y_a$ | Schleifen mit Doppeltpunkt, die sich gegenseitig in zwei Punkten schneiden. |

$a = \frac{1}{3} \frac{p}{K} y_a$ Schleifen mit Doppeltpunkt, die sich berühren.

$a > \frac{1}{3} \frac{p}{K} y_a$ Schleifen mit Doppeltpunkt, die sich gegenseitig nicht schneiden.

Jetzt sind noch die Grenzfälle $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $k = 1$ zu behandeln.

Grenzfall $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Wenn $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so ist (vergl. Seite 8) $x = 0$ und (vergl. Seite 15) $x_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{p}$; $x_{\max} = +\frac{\sqrt{2}}{p}$.

Der ganze Verlauf der Kurve ist somit eingeschlossen zwischen den zwei Parallelen zur y-Axe, welche links und rechts von dieser y-Axe den Abstand $\frac{\sqrt{2}}{p}$ haben. Diese Wendepunkte der Kurve liegen auf der y-Axe, und die Wendetangenten sind parallel zur x-Axe, denn hier ist

$$\gamma = 2\, arc \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 90^{\circ}.$$

Da allgemein $x_a = \frac{2k}{p}\, cn\,[K - pl]$ ist, so ist die erste Bogenlänge, welche zu $x_a = 0$ hinführt, $l = 0$. Es ist also in die allgemeine Formeln überall für $l$ der Wert 0 einzusetzen.

Die übrigen Bogenlängen, welche zu der Abscisse $x_a = 0$ hinführen, sind (vergl. Seite 17)

$$\frac{2K}{p}; \quad \frac{4K}{p}; \quad \frac{6K}{p} \text{ etc., wo } K = 1{,}854080,$$

welchen Bogenlängen auch in den allgemeinen Fällen $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$ die zur x-Axe parallele Tangente zukommt.

Nun soll der Wert von $a$ für $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ermittelt werden.

Für $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70711$ findet man in Schlömilchs Tafel $q = 0{,}043215$; $q^2 = 0{,}001868$; $q^3 = 0{,}000081$; $q^4 = 0{,}000003$.

Dann ist $K = \frac{\pi}{2}\left\{1{,}000000 + 0{,}086430 + 0{,}000006\right\}^2$; $K = \frac{\pi}{2} \cdot 1{,}180343$;

$$K = \pi \cdot 0{,}590172 = 1{,}854080; \quad \frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0{,}590172} = 3{,}388842; \quad \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 11{,}484250;$$

$$1 + a = 11{,}484250 \left\{\frac{0{,}043215}{1 - 0{,}086430 + 0{,}001868} + \frac{0{,}000081}{1 - 0{,}000162 + 0{,}000003}\right\};$$

$$1 + a = 11{,}484250 \left\{\frac{0{,}043215}{0{,}915438} + \frac{0{,}000081}{0{,}999841}\right\};$$

$$1 + a = 11{,}484250 \left\{\begin{matrix} 0{,}047207 \\ 0{,}000081 \\ \hline 0{,}047288 \end{matrix}\right\} = 0{,}543066; \quad a = -0{,}456954, \text{ wenn } k = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da $a$ sich negativ ergeben hat, so verläuft die Kurve bei wachsendem $s$ nach oben.

Die erste zu $x = x_a$ gehörige Ordinate $y = y_a$ ist null, und da in $y_a = y_c + al$, $l = 0$ ist, so ist hier auch $y_c = 0$, wie sich übrigens auch aus Gleichung 8 mit $l = 0$ ergiebt.

Die übrigen zu $x = x_a$ gehörigen Ordinaten sind also

$$2a\frac{K}{p}; \quad 4a\frac{K}{p}; \quad 6a\frac{K}{p} \text{ etc.}$$

Die Bogenlängen, welche zu $x_{\max}$ führen, sind $\frac{K}{p}$; $\frac{5K}{p}$; $\frac{9K}{p}$ etc.; die Bogenlängen, welche zu $x_{\min}$ hinführen, sind $-\frac{K}{p}$; $\frac{3K}{p}$; $\frac{7K}{p}$ etc.

$$y_{li} \text{ ist} = -a\frac{K}{p}; \quad y_r \text{ ist} = +a\frac{K}{p}.$$

Dieser Grenzfall ist in Figur 14 dargestellt.

Grenzfall $k = 1$.

Hier ist nach Gleichung 5a Seite 9 $x = x_a - \frac{4}{p} \cdot \frac{c \cdot e^{ps}}{c^2 e^{2ps} + 1}$. $x$ erreicht sein Maximum oder Minimum, wenn $\frac{dx}{ds} = 0$ ist, es ist aber

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{4}{p} \frac{(c^2 e^{2ps} + 1) pce^{ps} - ce^{ps}(2pc^2 e^{2ps})}{(c^2 \cdot e^{2ps} + 1)^2} = -\frac{4}{p} \frac{pce^{ps}[c^2 e^{2ps} + 1 - 2c^2 e^{2ps}]}{[c^2 \cdot e^{2ps} + 1]^2}$$

$$= -\frac{4}{p} \frac{[1 - c^2 e^{2ps}] pce^{ps}}{[c^2 \cdot e^{2ps} + 1]^2},$$

also ist $\frac{dx}{ds} = 0$, wenn 1) $e^{ps} = \infty$; d. h. wenn $s = \infty$ ist, 2) $c^2 e^{2ps} = 1$; d. h. wenn $e^{2ps} = \frac{1}{c^2}$; $e^{ps} = \frac{1}{c}$; $ps = -\log_n c$; $s = -\frac{1}{p} \log_n c$.

Wenn $s = \infty$ ist, so ist $x = x_a = \frac{\sqrt{2}}{p}$; wenn $s = -\frac{1}{p} \log_n c$ ist, so ist

$$x = x_a - \frac{4}{p} \cdot \frac{c \cdot e^{-\log c}}{c^2 \cdot e^{-2\log c} + 1} = x_a - \frac{4}{p} \frac{1}{2};\quad x = -\left(\frac{2}{p} - x_a\right) = -\frac{2 - \sqrt{2}}{p}.$$

Es ist also hier

$$x_{\max} = x_a = \frac{\sqrt{2}}{p} \text{ für } s = \infty = l;\quad x_{\min} = -\frac{2 - \sqrt{2}}{p} \text{ für } s = -\frac{1}{p} \log c.$$

Da nach Seite 9

$$-\frac{1}{p} \log_n c = s_c \text{ ist,}$$

so bedeutet $s_c$ die Bogenlänge, um welche von $O$ aus zurückgegangen werden muss, damit derjenige Kurvenpunkt erhalten werde, dem $x_{\min}$ als Abscisse entspricht.

Dem $x_{\max}$ entspricht

$$y_r = y_a = y_c + \infty - \frac{2}{p} \frac{\infty^2}{\infty^2};\quad y_r = y_a = \infty.$$

Dem $x_{\min}$ entspricht

$$y_{li} = y_c - \frac{1}{p} \log_n c - \frac{2}{p} \frac{1-1}{1+1};\quad y_{li} = y_c - \frac{1}{p} \log_n c;\quad y_{li} = \frac{\sqrt{2} - \log_n c}{p}.$$

Für $x_{\max}$ ist $s = \infty$, also ist nach Gleichungen 3a und 4a $\sin\frac{\psi}{2} = 1$; $\cos\frac{\psi}{2} = 0$, also ist $\psi = 180^\circ$.

Für $x_{\min}$ ist $s = -\frac{1}{p} \log_n c$, also ist $\sin\frac{\psi}{2} = 0$; $\cos\frac{\psi}{2} = 1$, also ist $\psi = 0$.

Sowohl bei $x_{\min}$ als auch bei $x_{\max}$ ist die Tangente parallel der y-Axe, bei $x_{\min}$ ist sie aber für wachsendes $s$ aufwärts, bei $x_{\max}$ ist sie für wachsendes $s$ abwärts gerichtet.

Da die ganze Kurve links von $x_a$ liegt, so ist bei wachsendem $s$ der Kontingenzwinkel $d\psi$ stets positiv, ein nach der Kurve gekrümmter Stab würde stets in der Faser gedrückt sein, welche an der Einspannungsstelle unten ist.

Wenn man die Gleichungen 5a und 6a in folgender Form anschreibt

$$x_a - x = \frac{4}{p} \frac{1}{c e^{ps} + c e^{-1-ps}};\quad y = y_c + s - \frac{2}{p} \frac{c e^{ps} - c e^{-1-ps}}{c e^{ps} + c e^{-1-ps}},$$

und für $c$ den Wert $e^{-ps_c}$ setzt, so hat man

$$x_a - x = \frac{4}{p} \frac{1}{e^{p(s-s_c)} + e^{-p(s-s_c)}};\quad y = y_c + s - \frac{2}{p} \frac{e^{p(s-s_c)} - e^{-p(s-s_c)}}{e^{p(s-s_c)} + e^{-p(s-s_c)}};$$

$$y = y_c + s_c + (s - s_c) - \frac{2}{p} \frac{e^{p(s-s_c)} - e^{-p(s-s_c)}}{e^{p(s-s_c)} + e^{-p(s-s_c)}},$$

woraus, weil nach Seite 20 $y_c + s_c = y_{li}$ ist,

$$y = y_{li} + (s - s_c) - \frac{2}{p} \frac{e^{p(s - s_c)} - e^{-p(s - s_c)}}{e^{p(s - s_c)} + e^{-p(s - s_c)}}.$$

Setzt man nun das eine Mal $s - s_c = + \Delta s$, das andere Mal $s - s_c = - \Delta s$, so hat $x_a - x$ beide Mal denselben Wert, während $y - y_{li}$ Werte gleicher Grösse, aber verschiedenen Vorzeichens bekommt, also ist die Parallele zur x-Axe, welche durch den Kurvenpunkt geht, der dem $x_{min}$ entspricht, eine Symmetrieaxe für die ganze Kurve. Dieser Grenzfall ist in Figur 15 dargestellt.

---

Es ist schon betont worden, dass von allen diesen Kurven nur derjenige Teil, der zwischen $s = o$ und $s = l$ liegt, den Seite 1 und Seite 2 angegebenen Voraussetzungen der ursprünglichen Aufgabe genügt.

Berücksichtigt man aber nun, dass im unbegrenzten Verlauf dieser Kurven stets an jeder Stelle, deren Abscisse $x$ ist, der Krümmungsradius der Gleichung $\frac{1}{\varrho} = p^2 (x_a - x)$ genügt, so sieht man sofort, dass beliebige Stücke dieser Kurven als elastische Linien gekrümmter Stäbe aufgefasst werden können, sofern eine Belastung des betreffenden Stabes möglich ist, bei der an jeder Stelle $x$ das Moment $M_ä$ der äusseren Kräfte im Zustand des Gleichgewichtes den Wert hat

$$M_ä = \frac{EJ}{\varrho} = EJ p^2 \cdot (x_a - x) = P (x_a - x).$$

Das Erfülltsein der einzigen Bedingung $M_ä = P (x_a - x)$ ist das notwendige und hinreichende Kriterium dafür, dass das Kurvenstück die elastische Linie des betreffenden Stabes im Gleichgewichtszustande ist. Allerdings wird die grosse Mehrzahl dieser richtigen elastischen Linien sich nicht von selbst einstellen können, sondern der Stab nimmt die betreffende Krümmung erst an, wenn ihm eine vorübergehende künstliche Nachhülfe dazu zuteil geworden ist. Dies hat zur Folge, dass die Ergebnisse sich nur an schwachen Stäben verwirklichen lassen, bei welchen die künstliche Nachhilfe nicht übermässig grosse Kräfte verlangt. Praktisch werden die Stäbe gegen die Verbiegung senkrecht zur Ebene der elastischen Linie ein nicht unbedeutendes Trägheitsmoment haben müssen, damit ein unbeabsichtigtes seitliches Umfallen verhindert wird. Man kommt also wieder auf die bandförmigen Federn. Da, wo die Kurve sich selbst schneidet, müssten diese bandförmigen Federn zweiteilige Stellen haben, damit sie sich durchdringen können.

Das Übrige ergiebt sich aus den folgenden Figuren, deren jede einen aus den Figuren 9 und 10 sich ergebenden möglichen Belastungsfall darstellt. Vorderhand sollen nur solche Belastungsfälle abgeleitet werden, bei welchen der Stab an der Stelle $s = o$ rechtwinkelig zur Kraftrichtung eingespannt ist.

Setzt man voraus, dass in den aufeinanderfolgenden Figuren 16 bis 23 $P$, $p$ und $L$ dieselbe Grösse haben, so ist jede folgende Figur in einem grösseren Masstabe gezeichnet als die vorausgehende; dies hat den Vorteil, dass diese Figuren sich leicht vergleichen lassen mit den Urfiguren 9 und 10.

Da sich Seite 16 ergeben hat, dass $l < \frac{K}{p}$ ist, so kann man in den Fällen, wo $l$ noch zu ermitteln ist, als sicher voraussagen, dass $l$ zwischen den Grenzen $o$ und $\frac{K}{p}$ eingeschlossen ist, also

$$o <= l < \frac{K}{p}.$$

In der ursprünglichen elastischen Linie Figur 3 und 4 ist $L = l$, also ist in Figur 3 und 4

$$\frac{K}{p} > L; \quad K > p \cdot L.$$

In Figur 16 ist $L = 2l$, also ist in Figur 16 $\frac{2K}{p} > L; \quad K > p \cdot \frac{L}{2}.$

In Figur 17 ist $L = \frac{K}{p} + l$; setzt man für $l$ seinen untersten Grenzwert, so ist $l = o$, und infolge dessen $L => \frac{K}{p}$; $K <= p \cdot L$. Setzt man für $l$ seinen obersten Grenzwert, so ist $l = \frac{K}{p}$, und infolge dessen $L < \frac{2K}{p}$; $K > p \cdot \frac{L}{2}$, also ist in Figur 17 $p \cdot \frac{L}{2} < K <= p \cdot L$.

In Figur 18 ist $L = \frac{2K}{p}$, also ist in Figur 18 $K = p \cdot \frac{L}{2}$.

In Figur 19 ist $L = \frac{2K}{p} + l$, es ist somit $L => \frac{2K}{p}$; $K <= p \cdot \frac{L}{2}$; $L < \frac{3K}{p}$; $K > p \cdot \frac{L}{3}$, also ist in Figur 19 $p \frac{L}{3} < K <= p \frac{L}{2}$.

In Figur 20 ist $L = \frac{2K}{p} + 2l$, es ist somit $L => \frac{2K}{p}$; $K <= p \frac{L}{2}$; $L < \frac{4K}{p}$; $K > p \frac{L}{4}$, also ist in Figur 20 $p \frac{L}{4} < K <= p \frac{L}{2}$.

In Figur 21 ist $L = \frac{3K}{p} + l$, es ist somit $L => \frac{3K}{p}$; $K <= p \frac{L}{3}$; $L < \frac{4K}{p}$; $K > p \frac{L}{4}$, also ist in Figur 21 $p \frac{L}{4} < K <= p \frac{L}{3}$.

In Figur 22 ist $L = \frac{4K}{p}$, also ist in Figur 22 $K = p \cdot \frac{L}{4}$.

In Figur 23 ist $L = \frac{4K}{p} + l$, es ist somit $L => \frac{4K}{p}$; $K <= p \frac{L}{4}$; $L < \frac{5K}{p}$; $K > p \frac{L}{5}$, also ist in Figur 23 $p \frac{L}{5} < K <= p \frac{L}{4}$.

Würde man in weiteren Figuren noch mehr Umläufe in die elastische Linie bei gleichem $P$, $p$ und $L$ einbeziehen, so würde der Wert von $K$ ein immer kleinerer Bruchteil des Produktes $p \cdot L$ sein.

Nun ist nach Seite 19 der kleinste Wert, den bei einer Einspannung rechtwinkelig zur Kraftrichtung $K$ annehmen kann,

$$K = 1{,}854080 \text{ entsprechend } k = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Es ist also der angenommene Gleichgewichtsfall bei den betreffenden Werten von $P$, $p$ und $L$ nur möglich, wenn der Bruchteil von $p \cdot L$, kleiner oder gleich welchem bei demselben $K$ sein muss, grösser oder gleich 1,854080 sich ergiebt, denn wenn

$$1{,}854080 <= K <= p \frac{L}{n} \text{ ist, dann ist } p \frac{L}{n} => 1{,}854080.$$

Es folgt bei konstantem $P$, $p$ und $L$ aus diesen Ungleichungen, dass $K$ um so kleiner wird, je mehr ganze Umläufe oder Teile von Umläufen der angenommene Gleichgewichtsfall enthalten soll.

War $K$ ursprünglich $> 2{,}32144$ d. h. war $a > o$, so kann man es durch Vermehrung der Zahl der Umläufe dahin bringen, dass $K < 2{,}32144$ wird, d. h. $a < o$ wird.

Wegen Gleichung A nehmen $K$ und $k$ gleichzeitig ab oder zu, also wird $k$ durch Vermehrung der Anzahl der Umläufe verkleinert, durch Verminderung der Anzahl der Umläufe aber vergrössert.

Da nach Seite 8 $x_a = \frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}$ ist, so nimmt $x_a$ bei wachsender Anzahl der Umläufe ab, bei abnehmender Anzahl der Umläufe wird $x_a$ aber grösser. Die Anzahl der Umläufe ist nicht auf ganze Zahlen beschränkt, sondern kann auch eine gebrochene oder gemischte Zahl sein.

Ferner ist nach Seite 15 $x_{\max} - x_a = \frac{2k}{p}$, also nimmt bei wachsender Anzahl der Umläufe der Abstand des Scheitels einer Schleife vom Wendepunkt ab.

Der Abstand des Scheitels einer Schleife von der nächsten horizontalen Tangente ist $x_{\max} - 2\,x_a$, d. h. $\frac{2\,k}{p} - x_a$ oder, weil $x_a = \frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}$ ist, $\frac{2\,k}{p} - \frac{2}{p}\sqrt{k^2\left(1 - \frac{1}{2\,k^2}\right)} = \frac{2\,k}{p}\left(1 - \left[1 - \frac{1}{2\,k^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right)$.

Nun ist $k$ in max $= 1$, aber in min $= \frac{1}{\sqrt{2}}$, also bewegt sich $\frac{1}{2\,k^2}$ zwischen den Grenzen $\begin{cases}\frac{1}{2}, \\ 1\end{cases}$ so dass man $\left[1 - \frac{1}{2\,k^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{2\,k^2}$ entwickeln darf.

$$\frac{2\,k}{p} - x_a = \frac{2\,k}{p}\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\,k^2}\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{2\,k^2}\right)^2 - \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{2\,k^2}\right)^3 + \cdots\right)\right\};$$

$$\frac{2\,k}{p} - x_a = \frac{2\,k}{p}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\,k^2}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2\,k^2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2\,k^2}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{2\,k}{p}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{32}\frac{1}{k^4} + \frac{1}{128}\frac{1}{k^6} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{2}{p}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{k} + \frac{1}{32}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{128}\frac{1}{k^5} + \cdots\right\}.$$

Es wird also durch Vermehrung der Anzahl der Umläufe der Abstand des Scheitels einer Schleife von der nächsten horizontalen Tangente vergrössert, bei abnehmender Anzahl der Umläufe wird dieser Abstand verkleinert.

Es nimmt also bei wachsender Anzahl der Umläufe $x_a$ schneller ab als $\frac{2\,k}{p}$.

Macht man z. B., wie in der Mitte von Figur 25 dargestellt, die erste Schleife rechts vollständig, so dass $P$ im Wendepunkte hängt, so erhält man durch die Lösung der zugehörigen drei Gleichungen C, D und $L = \frac{2\,K}{p} + l$ (vergl. Fig. 19) einen gewissen Wert $x_a$.

Macht man aber, wie in Figur 25 oben dargestellt ist, die erste Schleife rechts nicht vollständig fertig, so dass $P$ in einem Punkte hängt, wo $\varrho$ nicht unendlich ist, so setzt dies vor allem voraus, dass zu $P$ noch ein Endmoment $M''$ hinzugefügt wird, welches negativ ist, weil der betreffende Punkt rechts vom zugehörigen Wendepunkt ist. Gegen die Figur in der Mitte ist jetzt die Anzahl der Umläufe verringert, also ist $K_1 > K$; $k_1 > k$; $x_{1a} > x_a$; $\underset{\max}{x_1} - x_{1a} > \underset{\max}{x} - x_a$.

Macht man anderseits, wie in Figur 25 unten dargestellt ist, noch ein Stück der nächsten Schleife links hinzu, so dass $P$ in einem Punkte hängt, wo $\varrho$ nicht unendlich ist, so muss ein Endmoment $M''$ hinzugefügt sein, das positiv ist; gegen die Figur in der Mitte ist jetzt die Anzahl der Umläufe vergrössert, also ist $K_2 < K$; $k_2 < k$; $x_{2a} < x_a$; $\underset{\max}{x_2} - x_{2a} < \underset{\max}{x} - x_a$.

Wandert das Stabende aus der Schleife links über den Wendepunkt nach einem Punkte der Schleife rechts, so wachsen Abscisse des Stabendes und Abscisse $x_a$ des Wendepunktes gleichzeitig, aber diese letztere wächst langsamer als jene, sie wird von jener in dem Augenblicke überholt, in welchem das Stabende im Wendepunkt ist. $M''$ hat hierbei natürlich eine variable Grösse.

Ähnliche Überlegungen lassen sich bei allen Gleichgewichtsfällen machen. Wenn z. B. das Stabende in der Gegend des Gleichgewichtsfalles der Figur 23 unter Hinzufügung der nötigen variablen $M''$ aus der Schleife links über den Wendepunkt nach der nächsten Schleife rechts wandert, so nimmt die Anzahl der Umläufe zu, also nimmt die Abscisse $x_a$ des jeweils zugehörigen Wendepunktes ab; in diesem Falle bewegen sich die Abscissen des Stabendes und des Wendepunktes einander entgegen und kreuzen sich in dem Augenblicke, in welchem das Stabende im Wendepunkte ist.

Gleichgiltig, ob die Anzahl der Umläufe vergrössert oder vermindert worden ist, wenn das Stabende sich links vom Wendepunkt befindet, muss ein positives Endmoment, wenn es sich rechts vom Wendepunkt befindet, muss ein negatives Endmoment zu $P$ hinzugefügt werden, damit Gleichgewicht möglich sei. (Fig. 24.)

Die aus den Figuren 16 bis 25 abgeleiteten Resultate beziehen sich auf die Fälle, in welchen der Stab bei $s = o$ eingespannt ist.

Man erhält aber auch richtige elastische Linien, wenn man die Einspannungsstelle rückwärts von $s = o$ nach $s = -\left(\frac{2\,K}{p} - 2\,l\right)$ versetzt.

Dann entspricht dem ursprünglichen Falle Figuren 3 und 4 die Figur 26. Ist $\lambda$ die Stablänge, so ergiebt sich aus der Figur, dass $l = \frac{2K}{p} - \lambda$ ist.

Bezeichnet man ferner mit $S$ die von der Einspannungsstelle aus gemessene Bogenlänge, so ist

$$s = S - \left(\frac{2K}{p} - 2l\right); \quad s = S - \frac{2K}{p} + \frac{4K}{p} - 2\lambda; \quad s = \frac{2K}{p} - 2\lambda + S,$$

und damit wird

$$l - s = \frac{2K}{p} - \lambda - \frac{2K}{p} + 2\lambda - S = \lambda - S, \text{ und es wird } \frac{\pi}{K} pl = \frac{\pi}{K}(2K - p\lambda) = 2\pi - \frac{\pi}{K} p\lambda,$$

$$\text{also ist } \sin\left[\frac{\pi}{K} pl\right] = -\sin\left[\frac{\pi}{K} p\lambda\right]; \quad \cos\left[\frac{\pi}{K} pl\right] = +\cos\left[\frac{\pi}{K} p\lambda\right],$$

und es wird Gleichung 8 zu

**Gl. VIII)**
$$y_c = -\frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K} p\lambda\right] \cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K} p\lambda\right]\right\}.$$

Gleichung 9 wird zu

$$x_a - x = \frac{2k}{p} cn\,[K - p(\lambda - S)].$$

Gleichung 10 wird zu

$$y = y_c + 2a\frac{K}{p} - 2a\lambda + aS - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K} p(\lambda - S)\right] \cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K} p(\lambda - S)\right]\right\}.$$

Nun war bisher der Koordinatenursprung an der Einspannungsstelle und die Einspannungstangente war gegen die positiven $x$ gerichtet. Klappt man in Figur 26 die elastische Linie um die y-Axe um und versetzt man $O$ an die Einspannungsstelle, so hat man die Figur 27, in welcher also alle $x$ das entgegengesetzte Vorzeichen haben, die $y$ um $2y_{li}$ kleiner sind und $S$ mit $s$ übereinstimmt.

Bildet man zur Vorbereitung die Differenz

$$y_c + 2a\frac{K}{p} - 2a\lambda - 2y_{li},$$

so hat man nach Seite 16

$$y_c + 2a\frac{K}{p} - 2a\lambda - 2y_c - 2al + 2a\frac{K}{p}$$

$$= -y_c + 4a\frac{K}{p} - 2a(\lambda + l) = -y_c + 4a\frac{K}{p} - 2a \cdot 2\frac{K}{p} = -y_c.$$

Also hat man mit dem Koordinatensystem der Figur 27 die Gleichungen

**Gl. IX)**
$$x_a - x = -\frac{2k}{p} cn\,[K - p(\lambda - s)]$$

**Gl. X)**
$$y = -y_c + a \cdot s - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K} p(\lambda - s)\right] \cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K} p(\lambda - s)\right]\right\},$$

weil jetzt $S$ mit $s$ übereinstimmt.

Gleichung 3 wird zu

**Gl. III)**
$$\sin\frac{\psi}{2} = -k\,sn\,[K - p(\lambda - s)].$$

Gleichung 4 bleibt bestehen

**Gl. IV)**
$$\cos\frac{\psi}{2} = dn\,[K - p(\lambda - s)].$$

Die Gleichungen A und B resp. A* und B* bleiben bestehen, dagegen wird die Gleichung C zu

$$x_a = -\frac{2k}{p} cn\,[K - 2K + p\lambda]; \quad x_a = -\frac{2k}{p} cn\,[-K + p\lambda];$$

**Gl. Γ]**
$$x_a = -\frac{2k}{p} cn\,[K - p\lambda].$$

Gleichung D bleibt bestehen, also

**Gl. D]** $$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4} \cdot x_a^2.$$

Aus den Gleichungen $\Gamma$ und D lassen sich $x_a$ und $k$ berechnen.

Bei der Berechnung von $x_a$ aus Gleichung D hat man die negative Wurzel zu nehmen, d. h. es ist in diesem Falle

$$x_a = -\frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}.$$

---

Bemerkung. Hätte man von vornherein in Gleichung 2 Seite 3, wie zulässig, die negative Wurzel genommen, d. h. hätte man

$$\frac{d\psi}{ds} = -2p\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}$$

gesetzt, so wäre $u = sn[-p(s-s_c)] = -sn[p(s-s_c)]$ gewesen, also hätte man

$$\sin\frac{\psi}{2} = -k\,sn[p(s-s_c)]; \quad \cos\frac{\psi}{2} = dn[p(s-s_c)]$$

gefunden, wobei wohlverstanden $k$ gleich dem Absolutwert von $\sin\frac{\gamma}{2}$ ist.

Damit wird Seite 4 $\frac{d\psi}{ds} = -2pk\,cn[p(s-s_c)]$,

und Gleichung 5 wird zu $x_a - x = -\frac{2k}{p}\,cn[p(s-s_c)]$.

Alles andere wäre unverändert geblieben, so dass sich auch auf diesem Wege ergeben hätte:

**Gl. IX)** $$x_a - x = -\frac{2k}{p}\,cn[K - p(\lambda - s)],$$

**Gl. X)** $$y = \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p\lambda\right]\cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K}p\lambda\right]\right\} + a\cdot s - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p(\lambda - s)\right]\cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K}p(\lambda - s)\right]\right\},$$

**Gl. $\Gamma$]** $$x_a = -\frac{2k}{p}\,cn[K - p\lambda].$$

---

Stellt sich nun bei einem Stabe von der Länge $L$ die Gleichgewichtslage nach Figuren 3 und 4 ein, so ist $L = l$, und man hat nach Seite 16 die Ungleichung

$$\frac{K_1}{p} > L; \quad K_1 > pL.$$

Stellt sich aber bei gleichbleibendem $p$ und $L$ die Gleichgewichtslage nach Figur 27 ein, so ist $L = \lambda$, und man hat, weil nach Seite 24 $l_2 = \frac{2K_2}{p} - \lambda$ und nach Seite 16 $\frac{K_2}{p} > l_2$ ist, die Ungleichung $\frac{K_2}{p} > \frac{2K_2}{p} - \lambda$; $\lambda > \frac{K_2}{p}$, hier also, weil $\lambda = L$ ist, $\frac{K_2}{p} < L$; $K_2 < p\cdot L$.

Es ist also $K_1 > K_2$ und infolge dessen $k_1 > k_2$ sowie dem Absolutwerte nach

$$|x_{a_1}| > |x_{a_2}|.$$

Diese zwei Gleichgewichtslagen sind in Figur 28 skizziert.

Weil hier $x_a = -\frac{2}{p}\sqrt{k_2^2 - \frac{1}{2}}$ ist, so ist natürlich wieder der kleinste Wert, den $k$ haben kann, $k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ entsprechend dem Grenzfall Figur 14. Dann ist $x_a = o$; damit aber in Gleichung $\Gamma$ die Grösse $cn[K_2 - p\lambda]$ gleich null werde und gleichzeitig die Ungleichung $\lambda > \frac{K_2}{p}$ gewahrt bleibe, so muss $p\lambda = 2K_2$ sein, und weil dem $k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ der Wert $K_2 = 1{,}854080$ entspricht, so ist

$\lambda = \frac{2 \cdot 1{,}854080}{p}$ die erste Bogenlänge, welche bei der Gleichgewichtslage der Figur 27 zu $x_a = 0$, somit überhaupt zu einem richtigen $x_a$ hinführt, denn gemäss der Entstehung von Figur 27 kann der Lastangriffspunkt niemals rechts von der y-Axe liegen (vergl. S. 19). Dies wird sich nochmals zeigen in dem später zu behandelnden Fall der zur Einspannung parallelen Kraft.

Berücksichtigt man in der Beziehung $l_2 = \frac{2 K_2}{p} - \lambda$ den Umstand, dass $l_2 => 0$ ist, so sieht man, dass $\frac{2 K_2}{p} => \lambda$; $K_2 => p \frac{\lambda}{2}$ ist, oder mit $\lambda = L$, dass

$$K_2 => p \frac{L}{2} => 1{,}854080.$$

Es ist also bei dem Gleichgewichtsfall der Figur 27 $K_2$ wie folgt begrenzt:

$$1{,}854080 <= p \frac{L}{2} <= K_2 < pL.$$

Wenn $p \frac{L}{2}$ grösser geworden ist als 1,854080, so ist $K_2$ noch schneller gewachsen, je mehr $p \frac{L}{2}$ wächst, um so mehr nähert sich $K_2$ dem Werte $p \cdot L$. Diese Beziehungen werden in Figur 29 veranschaulicht.

Für die Berechnung von $k$ und $x_a$ aus den Gleichungen $\Gamma$ und D auf Seite 25 muss der Weg der successiven Annäherung eingeschlagen werden. Ist z. B. $\lambda$ nicht sehr viel grösser als $\frac{2 \cdot 1{,}854080}{p}$, so kann als erste Annäherung $-x_a = l_2 = \frac{2 K_2}{p} - \lambda$ gesetzt werden, dann ergiebt sich aus Gleichung D

$$k_2^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}\left(\frac{2 K_2}{p} - \lambda\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}\left(\frac{4}{p^2} K_2^2 - \frac{4}{p} K_2 \cdot \lambda + \lambda^2\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}\lambda^2 + K_2^2 - p K_2 \cdot \lambda = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}\lambda^2 - K_2 (p\lambda - K_2).$$

Hierin kann als erste Annäherung $K_2 = 1{,}854080$ geschätzt werden, so dass als erste Annäherung sich ein gewisser Wert für $k_2$ ergiebt. Mit dieser ersten Annäherung kann direkt für $K_2$ ein verbesserter Wert ausgerechnet werden und damit $k_2$ nochmals gerechnet werden. Mit dem verbesserten Werte von $k_2$ wird mit Hilfe von Gleichung $\Gamma$ eine zweite Annäherung von $x_a$ gerechnet und mit Hilfe von Gleichung D eine zweite Annäherung von $k_2$ u. s. f. bis zwei aufeinanderfolgende Werte von $k_2$ und $x_a$ genügend übereinstimmen. Wie auf Seite 7 angegeben, kann hierzu Gleichung $\Gamma$ umgeformt werden zu einer der Gleichung C** entsprechenden Gleichung $\Gamma^{**}$.

Vergleicht man die Figur 27 mit der Figur 19, so sieht man, dass die elastische Linie der Figur 27 sich in Figur 19 wiederfindet in dem Stücke, das sich von $s = 2l$ bis $s = L$ erstreckt. Legt man nun den Punkt $O$ der Figur 27 der Reihe nach in den Punkt $s = 2l$ der Figuren 20—23, so sieht man, dass man von der Gleichgewichtslage Figur 27 ausgehend, bei gleichbleibendem $P$, $p$ und $L$ immer mehr Teile von Umläufen oder ganze Umläufe in die elastische Linie einbeziehen kann. Entsprechend den bei jenen Figuren gefundenen Resultaten nehmen $K_2$, $k_2$ und der Absolutwert von $x_{2a}$ ab, wenn die elastische Linie eine grössere Anzahl vom Umläufen enthalten soll.

Die der Figur 23 entsprechende von der zweiten Gleichgewichtslage bei gleichbleibendem $p$, $P$ und $L$ ausgehende elastische Linie ist in Figur 30 dargestellt. Für diese Linie ist

$$L = \frac{2 K_2}{p} + \lambda.$$

Nun ist nach Seite 25 $\lambda > \frac{K_2}{p}$, also ist $L > \frac{3 K_2}{p}$, d. h. es ist $K_2 < p \frac{L}{3}$.

Ferner ist nach Seite 24 $\lambda = \frac{2 K_2}{p} - l_2$, es ist aber $l_2 => o$, also ist $\lambda <= \frac{2 K_2}{p}$, und es ist $L <= \frac{4 K_2}{p}$ d. h. es ist $K_2 => p \frac{L}{4}$.

Für den Gleichgewichtszustand der Figur 30 bestehen also die Ungleichungen:

$$p \frac{L}{4} <= K_2 < p \frac{L}{3}.$$

Der angenommene Gleichgewichtszustand ist hierbei nur möglich, wenn $K_2 = > 1,854080$ sich ergiebt. Die erste Bogenlänge, bei welcher dieser Gleichgewichtszustand möglich ist, ist nach Figur 14 $p\frac{L}{4} = 1,854080$. Wird $p\frac{L}{4}$ grösser als 1,854080 so wächst $K_2$ ebenfalls und nähert sich immer mehr dem Werte $p\frac{L}{3}$.

Aus Figur 30 leitet sich aufgrund derselben Überlegungen, die Seite 23 gemacht worden sind, die Figur 31 ab, welche drei aufeinander folgende Gleichgewichtszustände darstellt. Ebenso ist Figur 32 aus Figur 4 und Figur 33 aus Figur 27 entstanden.

Angenommen, an dem Stabende hänge nur die Last $P$, ein Endmoment $M''$ könne nicht hergestellt werden.

Es sei nun zuerst beabsichtigt, den Stab nach der elastischen Linie in der Mitte der Figur 32 einzustellen, es werde der Stab aber irrtümlich nach der oberen elastischen Linie eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft $P$ überlassen wird, das zu diesem Gleichgewicht erforderliche positive Endmoment $M''$; dies hat zur Folge, dass über die ganze Länge des Stabes die äusseren Momente $M_ä$ kleiner sind als die der Krümmung entsprechenden inneren Momente $M_i$. Die inneren elastischen Kräfte des Stabes vermögen das Übermass der Krümmung rückgängig zu machen, der Stab streckt sich, bis $P$ in dem Wendepunkt angelangt ist, womit sich der richtige Gleichgewichtszustand von selbst eingestellt hat.

Wird der Stab aber irrtümlich nach der unteren elastischen Linie der Figur 32 eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft $P$ überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche negative Endmoment $M''$; dies hat zur Folge, dass von $s = o$ bis $s = l_2$ die positiven Momente zu gross, von $s = l_2$ bis $s = L$ aber die negativen Momente dem Absolutwert nach nicht gross genug sind, es bekommt der Stab auf seine ganze Länge in der unteren Faser einen Zuwachs an Druckspannung, er krümmt sich stärker in positiver Krümmung bis $P$ in dem Wendepunkt angelangt ist, womit sich der richtige Gleichgewichtszustand von selbst eingestellt hat. Es ist also der Gleichgewichtszustand Figur 4 gegen kleine Fehler unempfindlich, er ist stabil.

Es sei fernerhin beabsichtigt, den Stab nach der elastischen Linie in der Mitte der Figur 33 einzustellen, es werde der Stab aber irrtümlich nach der unteren elastischen Linie eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft $P$ überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche positive Endmoment $M''$; dies hat zur Folge, dass von $s = o$ bis $s = \lambda_2$ die negativen Momente absolut genommen zu gross, von $s = \lambda_2$ bis $s = L$ die positiven Momente aber nicht gross genug sind, es bekommt der Stab auf seine ganze Länge in der Faser, welche an der Einspannungsstelle unten ist, einen Zuwachs an Zugspannung, er krümmt sich stärker in negativer Krümmung, bis $P$ in dem Wendepunkte angelangt ist, womit sich der richtige Gleichgewichtszustand von selbst eingestellt hat.

Wird der Stab aber irrtümlich nach der oberen elastischen Linie der Figur 33 eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft $P$ überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche negative Endmoment $M''$; dies hat zur Folge, dass von $s = o$ bis $s = L$ die negativen Momente dem Absolutwert nach nicht gross genug sind, die äusseren Momente $M_ä$ sind kleiner als die der Krümmung entsprechenden inneren Momente $M_i$. Die inneren elastischen Kräfte des Stabes vermögen das Übermass der Krümmung rückgängig zu machen, der Stab streckt sich in allen seinen Punkten und geht dabei in die weniger gekrümmte mittlere elastische Linie zurück, womit sich das Gleichgewicht von selbst eingestellt hat.

Es ist also der Gleichgewichtszustand Figur 27 gegen kleine Fehler unempfindlich, er ist stabil.

Ist es beabsichtigt, den Stab nach der elastischen Linie in der Mitte der Figur 25 einzustellen, wird er aber irrtümlich nach der oberen elastischen Linie eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft $P$ überlassen wird, das zu diesem Gleichgewicht erforderliche negative Endmoment $M''$; dies hat zur Folge, dass von $s = l_1$ bis $s = L$ die negativen Momente nicht gross genug, von $s = o$ bis $s = l_1$ die positiven Momente zu gross sind. Von $s = l_1$ bis $s = L$ streckt sich zwar der Stab, von $s = o$ bis $s = l_1$ aber wölbt er sich stärker. Nun ist aber die elastische

Linie in der Mitte durchgängig schwächer gekrümmt als die obere; weil also der Teil von $s = o$ bis $s = l_1$ wegen des Fehlens von $M''$ sich noch stärker krümmt als in der oberen Figur, so kann sich die richtige elastische Linie nicht von selbst einstellen.

Wird der Stab irrtümlich nach der unteren elastischen Linie der Figur 25 eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft $P$ überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche positive Endmoment $M''$; dies hat zur Folge, dass von $s = l_2$ bis $s = \frac{2\,K_2}{p} + l_2$ die negativen Momente zu gross sind, dass aber von $s = o$ bis $s = l_2$ und von $s = \frac{2\,K_2}{p} + l_2$ bis $s = L$ die positiven Momente nicht gross genug sind. Der Stab wölbt sich zwar stärker von $s = l_2$ bis $s = \frac{2\,K_2}{p} + l_2$, in den übrigen Teilen streckt er sich. Nun ist aber die elastische Linie in der Mitte durchgängig stärker gekrümmt als die untere; weil also sich Teile des Stabes wegen des Fehlens von $M''$ noch schwächer krümmen als in der unteren elastischen Linie, so ist der Übergang zur richtigen elastischen Linie nicht mehr möglich.

Es ist also der Gleichgewichtszustand der Figur 19 gegen kleine Fehler des Einstellens empfindlich, er ist labil.

Fehlt in der oberen elastischen Linie der Figur 31 das positive Endmoment $M''$, so krümmen sich die negativ gekrümmten Teile noch stärker, die positiv gekrümmten Teile aber strecken sich; da aber die richtige in der Mitte verzeichnete elastische Linie durchgehend schwächer gekrümmt ist als die obere, und Teile der oberen sich noch stärker krümmen, so ist der Übergang zur richtigen elastischen Linie nicht möglich.

Fehlt in der unteren elastischen Linie der Figur 31 das negative Endmoment $M''$, so krümmen sich die positiv gekrümmten Teile stärker, die negativ gekrümmten Teile aber strecken sich. Da aber die richtige elastische Linie durchgängig stärker gekrümmt ist als die untere, und Teile der unteren sich noch mehr strecken, so ist der Übergang zur richtigen elastischen Linie nicht möglich.

Es ist also der Gleichgewichtszustand der Figur 30 ein labiler.

Die an den vier Beispielen gefundenen Resultate lassen sich in allgemeiner Form wie folgt ausdrücken:

Ist das eine Ende des Stabes eingespannt, das andere Ende frei und belastet mit einer zur Einspannung rechtwinkeligen Einzelkraft, so sind die Gleichgewichtslagen stabil, deren elastische Linien nur einerlei Krümmung haben, die Gleichgewichtslagen aber, deren elastische Linien zweierlei Krümmung haben, sind labil.

In Figur 34 sind drei Gleichgewichtslagen dargestellt; die Lage I entspricht der Figur 4, also dem Hauptfalle, die Lage II entspricht der Figur 19, die Lage III entspricht der Figur 27.

Die Gleichgewichtslage II ist labil, die Gleichgewichtslagen I und III sind stabil. Ein kleiner Fehler in der Einstellung der labilen Gleichgewichtslage hat ein »Umfallen« zur Folge, der Stab geht sei es in die stabile Gleichgewichtslage I, sei es in die stabile Gleichgewichtslage III über.

Nun ist Lage I nur an die immer erfüllte Bedingung gebunden (Seite 19) $L = l > o$, während die Lage II an die beschränkende Bedingung gebunden ist (Seite 22) $1{,}854080 <= K <= p\,\frac{L}{2}$, also an die Bedingung $p\,\frac{L}{2} => 1{,}854080$, und Lage III sich nur einstellen kann, wenn (Seite 26)

$$L = \lambda => \frac{2 \cdot 1{,}854080}{p} \text{ ist.}$$

Die Bedingungen, welche für Lagen II und III erfüllt sein müssen, sind identisch, es muss für beide $L => \frac{2 \cdot 1{,}854080}{p}$ sein.

Die Gleichgewichtslage I ist immer möglich, wenn aber $L => \frac{2 \cdot 1{,}854080}{p}$ ist, so sind ausser I noch die Gleichgewichtslagen II und III vorhanden, abgesehen von eventuell noch möglichen Gleichgewichtslagen mit noch mehr Umläufen.

Setzt man 1,854080 = $K_a$, so kann obige Bedingung geschrieben werden

$$p^2 = > \frac{4 \cdot K_a^2}{L^2} \text{ oder } P = > 4 \cdot \frac{EJ K_a^2}{L^2}$$

oder, weil (Seite 19)

$$K_a = \frac{\pi}{2}\, 1{,}180343 \text{ ist, } P = > \frac{EJ\pi^2 \cdot 1{,}180343^2}{L^2};$$

$$P = > \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \cdot 1{,}393210.$$

Solange $P <$ als obiger Wert ist, solange giebt es nur eine Gleichgewichtslage, die natürliche Gleichgewichtslage I. Wenn aber $P >$ als jener Wert ist, so giebt es drei Gleichgewichtslagen, deren die eine, Lage II, derart labil ist, dass der Stab entweder in die Lage I oder in die Lage III umfällt.

Ist $P$ gerade gleich jenem Werte, so fallen Lagen II und III in eine Lage zusammen, welche die Eigentümlichkeiten der beiden Lagen derart in sich vereinigt, dass sie nach links hin stabil, nach rechts hin aber labil ist.

---

## Anhang zum ersten Falle.

Lässt man in Figur 4 die Koordinatenaxen und die Kraft, wie sie sind, wird aber der Stab nicht in der Richtung der x-Axe eingespannt, sondern unter dem Winkel $\varepsilon$ gegen diese x-Axe, d. h. hat man den in Figur 1a dargestellten Belastungsfall, so bleiben alle Ableitungen und Resultate des ersten Falles auch hier noch formal bestehen bis zu Seite 6, denn erst da sind die zusammengehörigen Werte $s = 0$; $x = 0$; $\varphi = 0$ benützt worden. In vorliegendem Falle der schiefen Einspannung sind aber nun $s = o$, $x = o$ und $\varphi = \varepsilon$ die entsprechenden zusammengehörigen Werte. Da $\sin\varphi = \frac{dy}{ds} = -\{1 - 2k^2 sn^2[K - p(l-s)]\}$ ist, so ist demnach für $s = o$

$$\sin\varepsilon = -\{1 - 2k^2 sn^2[K - pl]\}; \quad 2k^2 sn^2[K - pl] = 1 + \sin\varepsilon;$$

$$sn^2[K - pl] = \frac{1 + \sin\varepsilon}{2k^2}.$$

Es ist aber auch hier nach Gleichung C

$$cn^2[K - pl] = \frac{p^2}{4k^2} \cdot x_a^2, \text{ also ist hier } \frac{1 + \sin\varepsilon}{2k^2} + \frac{p^2}{4k^2} x_a^2 = 1;$$

**Gl. D]**
$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sin\varepsilon}{2} + \frac{p^2}{4} x_a^2.$$

Nimmt man die Gleichung

**Gl. C]**
$$x_a = \frac{2k}{p}\, cn[K - pl]$$

hinzu, so können aus diesen zwei Gleichungen $k$ und $x_a$ berechnet werden. Es bleibt auch Gleichung C** formal bestehen, es ist aber hier in erster Annäherung $x_a = l \cdot \cos\varepsilon$, also ist in erster Annäherung

$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sin\varepsilon}{2} + \frac{p^2 l^2}{4} \cos^2\varepsilon.$$

Man hat also in erster Annäherung

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sin\varepsilon}{2} - \frac{p^2 l^2}{4} \cos^2\varepsilon;$$

$$2k^2 - 1 = 1 + \sin\varepsilon + \frac{p^2 l^2}{2} \cos^2\varepsilon - 1 = \sin\varepsilon + \frac{p^2 l^2}{2} \cos^2\varepsilon;$$

$$16k^2(k^2 - 1) = (8 + 8\sin\varepsilon + 4p^2 l^2 \cos^2\varepsilon)\left(\frac{\sin\varepsilon}{2} + \frac{p^2 l^2}{4}\cos^2\varepsilon - \frac{1}{2}\right) = \cos^2\varepsilon\,(p^4 l^4 \cos^2\varepsilon + 4p^2 l^2 \sin\varepsilon - 4);$$

$$[1 + 16k^2(k^2 - 1)] = 1 + \cos^2\varepsilon\,(p^4 l^4 \cos^2\varepsilon + 4p^2 l^2 \sin\varepsilon - 4).$$