Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge

Kriemler, Karl

1902

Zweiter Fall

urn:nbn:de:bsz:31-270207

Damit wird

$$\left\{1+(2k^2-1)\frac{p^2l^2}{6}+[1+16k^2(k^2-1)]\frac{p^4l^4}{120}+\cdots\right\}=\left\{1+\frac{\sin\varepsilon}{6}p^2l^2+\frac{p^4l^4}{120}(1+6\cos^2\varepsilon)\right\}.$$

Ferner ist

$$2kk'=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\varepsilon}{2}+\frac{p^2l^2}{4}\cos^2\varepsilon\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin\varepsilon}{2}-\frac{p^2l^2}{4}\cos^2\varepsilon\right)}=\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^2l^2}{2}\left(\sin\varepsilon+\frac{p^2l^2}{4}\cos^2\varepsilon\right)\right].$$

Also ist in zweiter Annäherung

$$x_a=l\cdot\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^2l^2}{2}\sin\varepsilon-\frac{p^4l^4}{8}\cos^2\varepsilon\right]\cdot\left\{1+\frac{p^2l^2}{6}\sin\varepsilon+\frac{p^4l^4}{120}(1+6\cos^2\varepsilon)\right\};$$

Gl. C+++]

$$x_a=l\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^2l^2}{3}\sin\varepsilon-\frac{p^4l^4}{120}(9-\cos^2\varepsilon)\right].$$

Daraus $x_a=l\cdot\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^2l^2}{3}\sin\varepsilon-\frac{p^4l^4}{120}(8+\sin^2\varepsilon)\right]$;

$$x_a=l\cdot\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^4l^4}{15}-\frac{p^2l^2}{3}\sin\varepsilon-\frac{p^4l^4}{120}\sin^2\varepsilon\right],$$

und da kleine ε vorausgesetzt sind, so ist mit genügender Annäherung

Gl. C++++]

$$x_a=l.\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^4l^4}{15}-\frac{p^2l^2}{3}\sin\varepsilon\right],$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung auf Seite 7, wenn $\varepsilon=0$ ist.

Die zweckentsprechende Anwendung der Gleichungen C und D auf Seite 29 giebt die Lösung der allgemeinsten Aufgabe, bei welcher die Kraft P gegen die Einspannung beliebig gerichtet ist.

Zweiter Fall.

Der ursprünglich gerade gewichtslose Stab wird in der Krümmung erhalten durch eine im Schwerpunkt des freien Stirnquerschnittes angreifende Einzelkraft P, welche der Richtung der Einspannung parallel ist.

I. Teil.

Aufgrund der Überlegungen, die Seite 1 und 2 gemacht wurden, ergiebt sich auch hier, wenn nur die reine Biegung vorerst Berücksichtigung findet, dass in jeder Gleichgewichtslage $\frac{1}{\varrho}=\frac{M_ä}{EJ}$ ist. Wird die elastische Linie des Stabes auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem bezogen, dessen x-Axe die Richtung der Einspannung hat und durch den Lastangriffspunkt geht, dessen y-Axe aber durch die Einspannungsstelle geht, so hat man die Darstellung der Figur 35.

Wird hier wieder $M_ä$ als positiv definiert, wenn das auf einen Querschnitt bezogene Moment der zwischen Querschnitt und freiem Stabende angreifenden Kräfte den Sinn der Uhrzeigerbewegung hat, so ist der Krümmungsradius ϱ positiv, wenn der betreffende Stabteil so gekrümmt ist, dass diejenige äusserste Faser gedrückt ist, welche im ursprünglichen geraden Stabe die unterste Faser war.

Nun ergiebt sich aus Figur 35 $M_ä=+P(-y)$, also ist $\frac{1}{\varrho}=\frac{P}{EJ}(-y)$, d. h. ϱ ist positiv, so lange y negativ ist, ϱ ist aber negativ, wenn y positiv ist.

Setzt man zur Abkürzung $\frac{P}{EJ}=p^2$, so ist $\frac{1}{\varrho}=-p^2y$, und da $\frac{1}{\varrho}=\frac{d\varphi}{ds}$ ist, so hat man

$$\frac{d\varphi}{ds}=-p^2y.$$

Beim Fortschreiten im Sinne der wachsenden s, d. h. von der Einspannung gegen den Lastangriffspunkt zu, dreht sich die Tangente im Sinne der Uhrzeigerbewegung solange y negativ ist, entgegen dem Sinne der Uhrzeigerbewegung, wenn y positiv ist.

Aus der Gleichung

Gl. 1) $$\frac{d\varphi}{ds} = -p^2 y$$

folgt durch Differentiation nach ds; $\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -p^2 \frac{dy}{ds} = -p^2 \sin\varphi$, und wird nun mit $2\frac{d\varphi}{ds}$ erweitert, so ist

$$2\frac{d\varphi}{ds}\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -2p^2 \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}, \text{ also } \frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -2p^2\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds};$$

$$d\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -2p^2\sin\varphi\, d\varphi; \quad \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = +2p^2\cos\varphi + C_1.$$

Nun ist für $y = 0$ nach Gleichung 1 $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ und in Figur 35 ist für $y = 0$ der Winkel φ mit α bezeichnet, also ist $o = 2p^2\cos\alpha + C_1$; $C_1 = -2p^2\cos\alpha$, demnach ist

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2p^2(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Nun ist aber $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$; $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, also ist

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2p^2\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right);$$

Gl. 2) $$\frac{d\varphi}{ds} = \pm 2p\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Nach der getroffenen Wahl in der Figur ist das positive Vorzeichen zu wählen.

Demnach $$\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2pds.$$

Führt man die neue Variable ein $u = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, so ist $\sin\frac{\varphi}{2} = u\sin\frac{\alpha}{2}$, und da $du = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, so ist umgekehrt $d\varphi = 2\,du\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}$; $d\varphi = 2\,du\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$; $d\varphi = 2\,du\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.

Es ist also mit dieser Substitution

$$2pds = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}(1-u^2)}}\cdot\frac{2\cdot du\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}; \quad 2pds = \frac{2\,du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

Zur Abkürzung soll jetzt $\sin\frac{\alpha}{2} = k$ gesetzt werden, so dass umgekehrt $\alpha = 2\,arc\sin k$ ist.

Man hat somit $pds = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$. Hieraus ergiebt sich durch Integration

$$p(s - s_c) = \int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

worin s_c eine noch unbekannte Konstante ist. Die Inversion dieses Integrales giebt $u = sn[p(s-s_c)]$.

Da $s = 0$ und $\varphi = 0$ zusammengehörige Werte sind, und $\sin\frac{\varphi}{2} = u\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ ist, so ist für $s = 0$ auch $u = 0$, somit $0 = sn[p(-s_c)]$, d. h. es ist $s_c = 0$, und man hat $u = sn[ps]$, woraus folgt

Gl. 3) $$\sin\frac{\varphi}{2} = k\cdot sn[ps].$$

Da ferner $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}$ ist, so ist $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1-k^2sn^2[ps]}$;

Gl. 4) $$\cos\frac{\varphi}{2} = dn\,[ps].$$

Nach Gleichung 2 ist $\frac{d\varphi}{ds} = 2\,pk\sqrt{1 - sn^2[ps]}$; $\frac{d\varphi}{ds} = 2\,pk \cdot cn\,[ps]$.

Nach Gleichung 1 ist aber $\frac{d\varphi}{ds} = -p^2 y$, also ist $-p^2 \cdot y = 2\,pk \cdot cn\,[ps]$;

Gl. 5) $$y = -2\,\frac{k}{p}\,cn\,[ps].$$

Ferner ist allgemein $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$ oder $\frac{dx}{ds} = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$; $\frac{dx}{ds} = 1 - 2\,k^2\,sn^2\,[ps]$, also ist $dx = (1 - 2\,k^2\,sn^2\,[ps])\,ds$, woraus sich durch Integration ergiebt $x - x_c = s - 2\,k^2 \int sn^2\,[ps]\,ds$, wenn x_c eine noch unbekannte Konstante ist.

Setzt man zur Abkürzung $p \cdot s = v$ und demgemäss $ds = \frac{dv}{p}$, so ist

$$x - x_c = s - \frac{2}{p}\,k^2 \int sn^2(v)\,dv; \quad x - x_c = s - \frac{2}{p}\left\{v \cdot \frac{\Theta''(o)}{\Theta(o)} - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\right\}.$$

Mit Benützung der beim ersten Falle auf Seiten 4 und 5 gemachten Ableitungen ergiebt sich

$$x - x_c = s - \frac{2}{p}\left\{v \cdot \frac{b}{2} - 2\,\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K} \cdot f\left(\cos\frac{\pi v}{K}\right)\right\} \text{ oder mit } v = ps;$$

$$x - x_c = s - sb + \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right]\right);$$

$$x - x_c = s(1 - b) + \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right]\right).$$

Zur Bestimmung von x_c hat man die zusammengehörigen Werte $s = o$ und $x = o$, woraus sich ergiebt $x_c = o$, also ist, wenn noch, wie beim ersten Fall geschehen ist, $1 - b = -a$ gesetzt wird,

Gl. 6) $$x = -a \cdot s + \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right]\right).$$

In diesen Gleichungen für y und x kommen die Grössen q und K vor, es ergiebt sich aber

Gl. A*] q aus einer Tabelle entsprechend k,

und dann ist

Gl. B*] $$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots\cdots\right]^2.$$

Nun sollen aber noch zusammengehörig sein $s = o$ und $y = -\delta$, also ist nach Gleichung 5

$$\delta = 2\,\frac{k}{p}\,cn\,[o],$$

aber es ist $cn\,[o] = 1$, also ist $\delta = \frac{2k}{p}$;

Gl. C] $$k = \frac{p}{2}\,\delta.$$

Ferner sollen zusammengehörig sein $y = o$ und $s = l$, also ist nach Gleichung 5 $o = \frac{2k}{p}\,cn\,[pl]$, d. h. es ist $cn\,[pl] = o$; damit dies aber der Fall sei, muss sein

Gl. D] $$p \cdot l = K.$$

Mit Hülfe dieser vier Gleichungen A*, B*, C und D können, wenn z. B. p und l gegeben sind, der Reihe nach K, q, k und δ berechnet werden, oder wenn l und δ gegeben sind, so können k, q, K und p berechnet werden, oder endlich wenn p und $k = \sin\frac{\alpha}{2}$ gegeben sind, so können δ, q, K und l berechnet werden.

Sobald k bekannt ist, ist auch der Winkel α der Tangente im Lastangriffspunkt bekannt, denn es ist nach Definition $\alpha = 2\, arc \sin k$. Setzt man in Gleichung 6 für ps aus Gleichung D den Wert $pl = K$, so hat man als Abscisse des Lastangriffspunktes $\underset{s=l}{x} = -a \cdot l$.

Im Gegensatz zu dem ersten Falle besteht hier in den vier Gleichungen A*; B*; C und D kein formaler Grund, warum k nicht alle Werte annehmen sollte, welche $\sin \frac{\alpha}{2}$ annehmen kann, es kann also in diesem zweiten Falle k alle möglichen Werte annehmen zwischen o und 1.

Die Grenzfälle $k = 1$ und $k = 0$ sind aber für die Amplitudenfunktionen Fälle der Entartung, auf welche besonders eingegangen werden muss. Den Fall $k = 1$ zu untersuchen ist aus einem Grunde, der später ersichtlich wird, nicht nötig; bleibt also nur $k = 0$ zu untersuchen.

Aus Gleichung 1 auf Seite 31 ergab sich $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = +2p^2 \cos\varphi + C_1$. Nun ist im vorliegenden speziellen Falle für $y = 0$ ausser $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ auch $\varphi = \alpha = 0$, also ist $0 = 2p^2 + C_1$; $C_1 = -2p^2$, demnach ist

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2p^2(\cos\varphi - 1); \quad \frac{d\varphi}{ds} = p\sqrt{2(\cos\varphi - 1)}; \quad d\varphi = \sqrt{2(\cos\varphi - 1)}\, p\, ds.$$

Soll nun $d\varphi$ nicht imaginär werden, so darf in keinem Querschnitte des Stabes $\cos\varphi$ kleiner als $+1$ werden; grösser als $+1$ kann $\cos\varphi$ aber auch nicht sein; also ist in jedem Querschnitte $\varphi = 0$, d. h. der Stab ist in seinem ganzen Verlaufe geradlinig, und zwar ist dies der Fall ganz unabhängig von der Grösse von p und l, sobald nur $\alpha = 0$ und damit $k = 0$ erfüllt ist.

Frägt man nun bei dem allgemeinen Falle $k > 0$, wann es eine Berührende an die elastische Linie giebt, welche zur Einspannung, oder was dasselbe ist, zur Kraft P normal ist, so hat man denjenigen Punkt aufzusuchen, für welchen $\frac{dy}{dx} = \infty$ ist.

Es ist nach Gleichung 5 $dy = -\frac{2k}{p}\, d(cn\,[ps])$, also ist

$$dy = -\frac{2k}{p}\{-sn\,[ps]\, dn\,[ps]\, p\, ds\}; \quad dy = +2k\, sn\,[ps]\, dn\,[ps]\, ds.$$

Auf Seite 32 aber findet sich $dx = (1 - 2k^2 sn^2[ps])\, ds$. Es ist somit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2k\, sn\,[ps] \cdot dn\,[ps]}{1 - 2k^2 sn^2[ps]}, \text{ und damit } \frac{dy}{dx} = \infty \text{ sei,}$$

$$\text{muss } sn^2[ps] = \frac{1}{2k^2}; \quad 2k^2 = \frac{1}{sn^2[ps]}; \quad k = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot sn\,[ps]} \text{ sein.}$$

Der grösste Wert, den $sn\,[ps]$ annehmen kann, ist aber 1, also ist der kleinste Wert von k, bei welchem eine zur Kraft P normale Berührende vorkommt, $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ist aber $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so ist $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d. h. es ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, und die normale Berührende ist gerade diejenige im Lastangriffspunkt.

Wenn aber $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so ist nach Seite 19 $K = 1{,}854080$, also ist nach Seite 32 Gleichung D $p \cdot l = 1{,}854080$, d. h. die kleinste Stablänge, bei welcher eine zur Kraft P normale Berührende möglich ist, ist $l = \frac{1{,}854080}{p}$.

Da nun $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ der untere Grenzwert ist, bei dem der erste Fall der zur Kraft P normalen Einspannung gerade anfängt möglich zu sein, so folgt, dass die elastischen Linien des zweiten Falles, sobald $k => \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, sich in den beim ersten Falle gefundenen Kurven der Figuren 9 und 10 und den aus diesen abgeleiteten folgenden Figuren wieder vorfinden müssen, wenn man je das Stück der Kurve nimmt, welches nach der dortigen Bezeichnung von $x_{\min}$ über $x = 0$ bis $x = x_a$ reicht, denn in $x_{\min}$ ist die Berührende parallel der Kraft P (Fig. 36).

Um formal die Übereinstimmung der Figur 35 mit dem erwähnten Stücke der Kurve in Figuren 9 und 10 darzustellen, hat man in den Gleichungen 5 und 6 des zweiten Falles, wie sich aus dem Vergleich der gewählten Koordinatensysteme ergiebt, α durch γ; x durch $y_{II} - y = y_c + as_c - y$; y durch $x - x_a$; s durch $s - s_c$; l durch $l - s_c$ zu ersetzen. Ist dies geschehen, so werden die genannten Gleichungen zu

$$x - x_a = -\frac{2k}{p} cn[p(s - s_c)]; \quad x_a - x = \frac{2k}{p} cn[p(s - s_c)], \text{ und}$$

$$y_c + as_c - y = -a(s - s_c) + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p(s - s_c)\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}p(s - s_c)\right]\right);$$

$$y = y_c + as - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p(s - s_c)\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}p(s - s_c)\right]\right),$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen 5 und 6 des ersten Falles. Diese Übereinstimmung ist in Figur 36 bildlich dargestellt.

Da für den Berührungspunkt der zur Kraft normalen Tangente nach Seite 33

$$sn^2[ps] = \frac{1}{2k^2} \text{ ist,}$$

und nach Gleichung 5

$$y = -2\frac{k}{p} cn[ps] = -2\frac{k}{p}\sqrt{1 - sn^2[ps]} \text{ ist, so ist}$$

$$y_n = -2\frac{k}{p}\sqrt{1 - \frac{1}{2k^2}}; \quad y_n = -\frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}},$$

in Übereinstimmung mit dem Werte für x_a auf Seite 8. Setzt man den Absolutwert von y_n statt x_a in die Seite 8 gegebene Gleichung für l ein, so erhält man die Bogenlänge, um welche der Berührungspunkt dieser Tangente von dem Lastangriffspunkt zurückliegt.

Wenn $k < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so sind keine elastische Linien des ersten Falles vorhanden, welche mit denen des zweiten Falles identisch sein könnten, dieser letztere muss somit für sich untersucht werden.

II. Teil.

Wenn in den Formeln

$$\sin\frac{\varphi}{2} = k\, sn[ps]; \quad \cos\frac{\varphi}{2} = dn[ps];$$

$$y = -\frac{2k}{p} cn[ps];$$

$$x = -as + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}ps\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}ps\right]\right)$$

den Grössen k; K; p; l und damit auch der Grösse a die Bedeutung von Konstanten, der Grösse s aber die Bedeutung einer unabhängigen Variablen gegeben wird, so ist durch diese Formeln eine unbegrenzte Kurve festgelegt.

Da $y = -\frac{2k}{p} cn[ps]$ ist, so hat y sein Maximum resp. sein Minimum, wenn $cn[ps]$ sein Minimum resp. sein Maximum hat, also ist

$$y_{\max} = +\frac{2k}{p}; \quad y_{\min} = -\frac{2k}{p} \text{ entsprechend } cn[ps] = -1 \text{ resp. } cn[ps] = +1.$$

Nun ist $cn[ps] = +1$, wenn $ps = 4 \cdot n \cdot K$; $s = 4 \cdot n \cdot \frac{K}{p}$, wo $n = 0; 1; 2; 3$ etc. zu nehmen ist, und es ist $cn[ps] = -1$, wenn $ps = 4 \cdot n \cdot K + 2K$; $s = 2(2n + 1)\frac{K}{p}$, wo $n = 0; 1; 2; 3$ etc. zu nehmen ist.

Man hat also die zusammengehörigen Werte

$$\begin{array}{llllllll} s = & 0 & 2\frac{K}{p} & 4\frac{K}{p} & 6\frac{K}{p} & 8\frac{K}{p} & 10\frac{K}{p} & 12\frac{K}{p} \\ y = & -\frac{2k}{p} & +\frac{2k}{p} & -\frac{2k}{p} & +\frac{2k}{p} & -\frac{2k}{p} & +\frac{2k}{p} & -\frac{2k}{p}. \end{array}$$

Ferner ist $y = 0$, wenn $cn\,[ps] = 0$ ist, dies ist aber der Fall, wenn $ps = (2n+1)K$; $s = (2n+1)\frac{K}{p}$, wo $n = 0;\ 1;\ 2;\ 3$ etc. zu nehmen ist.

Es sind also zusammengehörig

$$\begin{array}{llllll} s = \frac{K}{p} & 3\frac{K}{p} & 5\frac{K}{p} & 7\frac{K}{p} & 9\frac{K}{p} \\ y = 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

Nun möge der Punkt $s = 2 \cdot n\frac{K}{p}$, für welchen nach obigem $y = \pm\frac{2k}{p}$ ist, herausgenommen werden; für denselben ist $x = -a \cdot 2n\frac{K}{p} + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}2nK\right] \cdot f(\cdot\cdot\cdot\cdot)$, aber es ist $\sin[2n\pi] = 0$, also ist $x = -n \cdot 2a\frac{K}{p}$, und man hat die zusammengehörigen Werte

$$\begin{array}{llllllll} s = & 0 & 2\frac{K}{p} & 4\frac{K}{p} & 6\frac{K}{p} & 8\frac{K}{p} & 10\frac{K}{p} & 12\frac{K}{p} \\ y = & -2\frac{k}{p} & +2\frac{k}{p} & -2\frac{k}{p} & +2\frac{k}{p} & -2\frac{k}{p} & +2\frac{k}{p} & -2\frac{k}{p} \\ x = & -0 & -2a\frac{K}{p} & -4a\frac{K}{p} & -6a\frac{K}{p} & -8a\frac{K}{p} & -10a\frac{K}{p} & -12a\frac{K}{p} \end{array}$$

Es ergiebt sich hieraus, dass parallel der Einspannung gemessen der Abstand zweier Minima resp. Maxima von y je die Grösse hat $-4a\frac{K}{p}$, und dass jedes Maximum von dem nächsten Minimum den Abstand hat $-2a\frac{K}{p}$.

Nun sollen für zwei Punkte

$$s_1 = 2n\frac{K}{p} - \varDelta \text{ und } s_2 = 2n\frac{K}{p} + \varDelta$$

die Koordinaten berechnet werden. Es ist

$$y_1 = -\frac{2k}{p}cn\,[2nK - p\varDelta] = \begin{cases} -\frac{2k}{p}cn\,[-p\varDelta] & \text{für } n \text{ gerade} \\ +\frac{2k}{p}cn\,[-p\varDelta] & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases};$$

$$y_1 = \begin{cases} -\frac{2k}{p}cn\,[p\varDelta] & \text{für } n \text{ gerade} \\ +\frac{2k}{p}cn\,[p\varDelta] & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases};$$

$$y_2 = -\frac{2k}{p}cn\,[2nK + p\varDelta] = \begin{cases} -\frac{2k}{p}cn\,[p\varDelta] & \text{für } n \text{ gerade} \\ +\frac{2k}{p}cn\,[p\varDelta] & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases};$$

also ist $y_1 = y_2$.

Die zugehörigen Abscissen sind

$$x_1 = -a\left(2n\frac{K}{p} - \varDelta\right) + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}2nK - \frac{\pi}{K}p\varDelta\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}2nK - \frac{\pi}{K}p\varDelta\right]\right)$$

$$= -n \cdot 2a\frac{K}{p} + a\varDelta - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p\varDelta\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}p\varDelta\right]\right);$$

$$x_2 = -a\left(2n\frac{K}{p} + \varDelta\right) + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}2nK + \frac{\pi}{K}p\varDelta\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}2nK + \frac{\pi}{K}p\varDelta\right]\right)$$

$$= -n \cdot 2a\frac{K}{p} - a\varDelta + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p\varDelta\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}p\varDelta\right]\right).$$

Hieraus folgt, dass die Normalen zur Einspannung, welche durch die Punkte $s = 2n\frac{K}{p}$ gehen, also die Abstände $-2a\frac{K}{p}$ haben, für den ganzen Verlauf der Kurve Symmetrieaxen sind.

Nun möge der Punkt $s = (2n+1)\frac{K}{p}$, für welchen nach früherem $y = 0$ ist, herausgenommen werden; für denselben ist

$$x = -a(2n+1)\frac{K}{p} + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}(2n+1)K\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}(2n+1)K\right]\right),$$

es ist aber $\sin[(2n+1)\pi] = 0$, also ist $x = -(2n+1)a\frac{K}{p}$, und man hat die zusammengehörigen Werte

$$\begin{array}{llllll} s = & \frac{K}{p} & 3\frac{K}{p} & 5\frac{K}{p} & 7\frac{K}{p} & 9\frac{K}{p} \\ y = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x = & -a\frac{K}{p} & -3a\frac{K}{p} & -5a\frac{K}{p} & -7a\frac{K}{p} & -9a\frac{K}{p}. \end{array}$$

Da für diese Punkte $\frac{1}{\varrho} = -p^2 \cdot y = 0$ ist, so sind sie Wendepunkte. Die Wendepunkte folgen demnach parallel der Einspannung gemessen in Abständen von $-2a\frac{K}{p}$ aufeinander, und es befindet sich zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Wendepunkten in der Mitte ihres Abstandes abwechselnd ein Maximum oder ein Minimum für y.

Rechnet man für zwei Punkte $s_1 = (2n+1)\frac{K}{p} - \varDelta$ und $s_2 = (2n+1)\frac{K}{p} + \varDelta$ die Koordinaten, so findet man

$$y_1 = -\frac{2k}{p}\,cn\,[(2n+1)K - p\varDelta] = -\frac{2k}{p}\,cn\,[K - \{p\varDelta - 2nK\}];$$

$$y_2 = -\frac{2k}{p}\,cn\,[(2n+1)K + p\varDelta] = -\frac{2k}{p}\,cn\,[K + \{p\varDelta + 2nK\}]$$

$$= -\frac{2k}{p}\,cn\,[K + \{p\varDelta + 2nK - 4nK\}] = -\frac{2k}{p}\,cn\,[K + \{p\varDelta - 2nK\}].$$

Es ist aber $cn\,[K+v] = cn\,[-K-v] = -cn\,[-K-v+2K] = -cn\,[K-v]$, man hat also $y_2 = -y_1$.

Die zugehörigen Abscissen sind

$$x_1 = -(2n+1)a\frac{K}{p} - a\varDelta + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}(2n+1)K - \frac{\pi}{K}p\varDelta\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}(2n+1)K - \frac{\pi}{K}p\varDelta\right]\right);$$

$$x_1 = -(2n+1)a\frac{K}{p} - a\varDelta + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\pi - \frac{\pi}{K}p\varDelta\right]\cdot f\left(\cos\left[\pi - \frac{\pi}{K}p\varDelta\right]\right);$$

$$x_1 = -(2n+1)a\frac{K}{p} - a\varDelta + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p\varDelta\right]\cdot f\left(-\cos\left[\frac{\pi}{K}p\varDelta\right]\right),$$

und daraus x_2 durch Vertauschung von $\varDelta$ mit $(-\varDelta)$

$$x_2 = -(2n+1)a\frac{K}{p} + a\varDelta - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p\varDelta\right]\cdot f\left(-\cos\left[\frac{\pi}{K}p\varDelta\right]\right).$$

Hieraus folgt, dass jeder Wendepunkt $s = (2n+1)\frac{K}{p}$ ein Punkt diametraler Symmetrie für den ganzen Verlauf der Kurve ist.

Da $cn\,[ps] = cn\,[ps + 4K] = cn\left[p\left(s + \frac{4K}{p}\right)\right]$, so nimmt y denselben Wert wieder an, wenn s um $\frac{4K}{p}$ gewachsen ist.

Da ferner $\sin\left[\frac{\pi}{K}ps\right]$ und $\cos\left[\frac{\pi}{K}ps\right]$ gleich sind mit $\sin\left[\frac{\pi}{K}ps + 4\pi\right]$ resp. mit $\cos\left[\frac{\pi}{K}ps + 4\pi\right]$ d. h. mit $\sin\left[\frac{\pi}{K}p\left(s + 4\frac{K}{p}\right)\right]$ resp. $\cos\left[\frac{\pi}{K}p\left(s+4\frac{K}{p}\right)\right]$, so ist

$$\text{für } s;\ x_{s'} = -as + F,\quad \text{für } s + \frac{4K}{p};\ x_{s''} = -as - 4\frac{aK}{p} + F = x_{s'} - 4\frac{aK}{p}.$$

Es besteht also die Kurve aus kongruenten Ästen, die in parallel der Einspannung gemessenen Abständen von $-4a\frac{K}{p}$ auf einander folgen. Aus dem, was über die Symmetrie gesagt worden ist, folgt noch, dass jeder Ast aus symmetrischen Halbästen und jeder dieser aus umgekehrt symmetrischen Vierteλästen besteht.

Wenn a negativ sich ergiebt, so verläuft die Kurve als Ganzes für wachsende positive s von der Einspannungsstelle aus nach oben, für positive a verläuft sie aber als Ganzes nach unten.

Da aber $a = 0$ ist für $k = 0{,}90895$, und schon von $k = 0{,}70711$ an der zweite Fall im ersten Falle mit enthalten ist, so verlaufen alle elastischen Linien, welche nur dem zweiten Falle angehören, nach oben.

Eine solche elastische Linie ist in Figur 37 dargestellt.

Hätte man in Gleichung 2 die negative Wurzel genommen, so wäre formal der Erfolg gewesen, dass in allen Formeln p mit $(-p)$ vertauscht gewesen wäre. Es wäre also gewesen

Gl. III) $\sin\frac{\varphi}{2} = -k\cdot sn[ps]$ **Gl. IV)** $\cos\frac{\varphi}{2} = dn[ps]$

Gl. V) $y = +2\frac{k}{p}cn[ps]$

Gl. VI) $x = -as + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}ps\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}ps\right]\right)$

Es wäre aber hier k der Absolutwert von $\sin\frac{\alpha}{2}$ gewesen. Die so erhaltene Kurve ist der früheren in Bezug auf die Axe der Einspannung symmetrisch.

Die Figur 37 ist gezeichnet für den Fall $k < 0{,}70711$, es haben aber die Folgerungen, die aus ihr gezogen werden, für alle Werte von k Gültigkeit.

Berücksichtigt man, dass im unbegrenzten Verlauf der Kurve stets an jeder Stelle y der Krümmungsradius der Gleichung genügt $\frac{1}{\varrho} = -p^2 y$, so sieht man, dass beliebige Stücke der Kurve als elastische Linien gekrümmter Stäbe aufgefasst werden können, sofern eine Belastung des betreffenden Stabes möglich ist, bei der an jeder Stelle y das Moment $M_ä$ der äusseren Kräfte im Zustand des Gleichgewichtes den Wert hat $M_ä = \frac{EJ}{\varrho} = -EJp^2y = -Py$.

Diese Bedingung ist z. B. jedesmal erfüllt, wenn bei Beibehaltung der gewählten Einspannung die Last P in einem der Wendepunkte angreift. Auf diese Weise sind aus Figur 37 die Figuren 38 und 39 entstanden.

Lässt man aber den Endpunkt des Stabes einen Kurvenpunkt einnehmen, der nicht ein Wendepunkt ist, so muss zu der Kraft P noch ein Endmoment hinzukommen von der Grösse $-Py_e$, wenn y_e die Ordinate des Stabendpunktes ist. Bei positivem y_e ist also das erforderliche Endmoment negativ, bei negativem y_e aber positiv. Elastische Linien für Belastungen dieser Art sind in Figuren 40 und 41 dargestellt.

Angenommen in den Figuren 38 bis 41 seien P; p und L von derselben Grösse, so ist

in Fig. 38a: $K = p\cdot L$, weil $L = \frac{K}{p}$ ist;

in Fig. 40: $K = p\frac{L}{2}$, weil $L = \frac{2K}{p}$ ist;

in Fig. 38b: $K = p\frac{L}{3}$, weil $L = \frac{3K}{p}$ ist;

in Fig. 41: $K = p\frac{L}{4}$, weil $L = \frac{4K}{p}$ ist;

in Fig. 39: $K = p\frac{L}{5}$, weil $L = \frac{5K}{p}$ ist.

Würde man in weiteren Figuren noch mehr Umläufe in die elastische Linie bei gleichbleibendem P; p und L einbeziehen, so würde der Wert von K ein immer kleinerer Bruchteil des

Produktes $p \cdot L$ sein. Es wird also K um so kleiner, je mehr Teile von Umläufen oder ganze Umläufe der angenommene Gleichgewichtsfall bei konstantem P; p und L enthalten soll.

Da K und k gleichzeitig wachsen und abnehmen, so wird k und mit ihm $\delta = \frac{2k}{p}$ durch Vermehrung der Anzahl der Umläufe verkleinert, durch Verminderung der Anzahl der Umläufe aber vergrössert.

Falls eine zu P normale Tangente vorhanden ist, so ist der Abstand ihres Berührungspunktes vom Wendepunkt $y_n = \mp \frac{2}{p} \sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}$. Es nimmt also y_n bei wachsender Anzahl der Umläufe ab, bei abnehmender Anzahl der Umläufe wird y_n aber grösser.

Führt man z. B., wie in der Mitte der Figur 42 dargestellt, entsprechend der Figur 38a, den Lastangriffspunkt in den Wendepunkt, so hat man $K = pL$; aus K bekommt man einen gewissen Wert für k und aus k einen gewissen Wert für δ.

Führt man aber, wie in Figur 42 oben dargestellt ist, den Lastangriffspunkt nicht ganz bis zum Wendepunkt, so muss zu P ein positives Endmoment M hinzugefügt werden. Gegen die Figur in der Mitte ist die Anzahl der Umläufe vermindert, also ist $K_1 > K$; $k_1 > k$; $\delta_1 > \delta$.

Führt man anderseits den Lastangriffspunkt über den Wendepunkt hinüber, wie in Figur 42 unten dargestellt, so muss zu P ein negatives Endmoment M hinzugefügt werden. Gegen die Figur in der Mitte ist jetzt die Anzahl der Umläufe vermehrt, also ist $K_2 < K$; $k_2 < k$; $\delta_2 < \delta$.

Figur 43 ist auf demselben Wege aus Figur 38b entstanden. In den von oben nach unten aufeinanderfolgenden Darstellungen der Figur 43 nimmt die Anzahl der Umläufe zu, also nehmen K; k und δ von oben nach unten ab.

Wegen des auf Seite 37 Gesagten, giebt es zu jeder der Kurven der Figuren von Figur 35 an eine im Bezug auf die Axe der Einspannung symmetrische Figur.

Angenommen an dem Stabende greife nur die Last P an, ein Endmoment M könne nicht hergestellt werden. Es sei beabsichtigt, den Stab nach der elastischen Linie in der Mitte der Figur 42 einzustellen; es werde der Stab aber irrtümlich nach der oberen elastischen Linie eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewicht erforderliche positive Endmoment M, dies hat zur Folge, dass über die ganze Länge des Stabes die äusseren Momente $M_ä$ kleiner sind als die der Krümmung entsprechenden inneren Momente M_i. Die inneren elastischen Kräfte des Stabes vermögen das Übermass der Krümmung rückgängig zu machen, der Stab streckt sich, bis P in dem Wendepunkt angelangt ist, womit sich der richtige Gleichgewichtszustand von selbst eingestellt hat.

Wird der Stab aber irrtümlich nach der unteren elastischen Linie der Figur 42 eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche negative Endmoment M; dies hat zur Folge, dass von $s = 0$ bis $s = \frac{K_2}{p}$ die positiven Momente zu gross, von $s = \frac{K_2}{p}$ bis $s = L$ die negativen Momente dem Absolutwerte nach nicht gross genug sind; es bekommt der Stab auf seiner ganzen Länge einen Zuwachs an positiver Krümmung, er wölbt sich stärker, bis P in dem Wendepunkt angelangt ist, womit sich der richtige Gleichgewichtszustand von selbst eingestellt hat.

Es ist also der Gleichgewichtszustand Figur 38a gegen kleine Fehler der Einstellung unempfindlich, er ist stabil. Dasselbe gilt natürlich von der bezüglich der Einspannungsaxe symmetrischen Gleichgewichtsfigur.

Ist es beabsichtigt, den Stab nach der elastischen Linie in der Mitte der Figur 43 einzustellen, wird er aber irrtümlich nach der oberen elastischen Linie eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche negative Endmoment M; dies hat zur Folge, dass von $s = \frac{K_1}{p}$ bis $s = L$ die negativen Momente nicht gross genug, von $s = 0$ bis $s = \frac{K_1}{p}$ aber die positiven Momente zu gross sind. Von $s = \frac{K_1}{p}$ bis $s = L$ streckt sich zwar der Stab, von $s = 0$ bis $s = \frac{K_1}{p}$ wölbt er sich aber stärker in positiver Krümmung.

Nun ist aber in der elastischen Linie in der Mitte die positive Krümmung geringer als in der oberen; weil also der Teil dieser von $s = 0$ bis $s = \frac{K_1}{p}$ wegen des Fehlens von M sich noch stärker krümmt als in der oberen Figur, so kann sich die richtige Gleichgewichtsfigur nicht von selbst einstellen.

Wird der Stab irrtümlich nach der unteren elastischen Linie der Figur 43 eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche positive Endmoment M; dies hat zur Folge, dass von $s = \frac{K_2}{p}$ bis $s = \frac{3\,K_2}{p}$ die negativen Momente zu gross, dass aber von $s = 0$ bis $s = \frac{K_2}{p}$ und von $s = \frac{3\,K_2}{p}$ bis $s = L$ die positiven Momente nicht gross genug sind. Infolge des Überschusses der Momente im negativen Biegungssinne wölbt sich zwar der Stab stärker in negativer Krümmung von $s = \frac{K_2}{p}$ bis $s = L$, in dem übrigen Teile aber streckt er sich. In diesem letzteren Teile ist aber die untere elastische Linie schon schwächer gekrümmt als diejenige in der Mitte; weil sich also dieser Teil wegen des Fehlens von M noch schwächer krümmt als in der unteren elastischen Linie, so ist der Übergang in die richtige Gleichgewichtsfigur nicht mehr möglich.

Es ist der Gleichgewichtszustand nach Figur 38b gegen kleine Fehler des Einstellens empfindlich, er ist labil.

Dasselbe gilt natürlich von der inbezug auf die Einspannungsaxe symmetrischen Gleichgewichtsfigur.

Bei irrtümlicher Einstellung nach der oberen Figur 43 fällt der Stab in schlängelnder Bewegung nach rechts um; bei irrtümlicher Einstellung nach der unteren Figur 43 fällt er in ebensolcher Bewegung nach links um, bis er rechts den der Figur 38a entsprechenden stabilen Gleichgewichtszustand, links den ihm symmetrischen erreicht hat.

Die an diesen Beispielen gefundenen Resultate lassen sich in allgemeiner Form, wie folgt, ausdrücken:

Ist das eine Ende des Stabes eingespannt, das andere Ende frei und belastet mit einer zur Einspannung parallelen Einzelkraft, so sind diejenigen gekrümmten Gleichgewichtslagen stabil, deren elastische Linien nur einerlei Krümmung haben, diejenigen Gleichgewichtslagen aber, deren elastische Linien zweierlei Krümmung haben, sind labil.

Bei dem wie angegeben belasteten und gestützten Stabe giebt es aber ausser den gekrümmten Gleichgewichtsfiguren ohne irgend welche beschränkende Bedingungen, also stets, die geradlinige Gleichgewichtsfigur, welche Seite 33 abgeleitet worden ist. Die Untersuchung der Stabilität dieses geradlinigen Gleichgewichtszustandes hat auf andere Art zu geschehen, und ergiebt sich die Bedingung der Stabilität erst durch Benützung nachfolgender in anderem Zusammenhang gemachten Überlegungen.

Der kleinste Wert, den k annehmen kann, ist $k = 0$, und da allgemein

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\cdots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots 2n}\right)^2 \cdot k^{2n} + \cdots\cdots\right]$$

ist, so ist der kleinste Wert, den K annehmen kann $K = \frac{\pi}{2}$.

Hieraus und aus dem Seite 37 Gesagten folgt, dass ein Gleichgewicht nur möglich ist

nach Figur 38a, wenn $L => \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{p}$;

nach Figur 40, wenn $L => \frac{2}{2}\,\frac{\pi}{p} = \frac{\pi}{p}$;

nach Figur 38b, wenn $L => \frac{3}{2}\,\frac{\pi}{p}$;

nach Figur 41, wenn $L => \frac{4}{2}\,\frac{\pi}{p} = 2\,\frac{\pi}{p}$;

nach Figur 39, wenn $L => \frac{5}{2}\,\frac{\pi}{p}$.

Je mehr Umläufe verlangt werden, ein um so grösseres Vielfache von $\frac{1}{2}\frac{\pi}{p}$ muss L mindestens sein.

In Figur 44 sind drei Gleichgewichtslagen dargestellt; die Lage I ist die immer mögliche geradlinige Gleichgewichtsfigur; die Lage II entspricht der Figur 38a; die Lage III ist die zu ihr symmetrische Gleichgewichtsfigur.

Die Gleichgewichtsfiguren II und III sind stabil, damit sie aber möglich seien, muss $L > \frac{1}{2}\frac{\pi}{p}$ sein. Angenommen dies sei der Fall, dann ist Gleichgewichtsfigur I labil. Denn wenn der Stab noch so wenig aus der geraden Linie ausgebogen wird, so muss er in die Lage II oder III umfallen, weil erst wieder bei demjenigen $\delta = \frac{2k}{p}$, welches dem $K = pL$ entspricht, die inneren elastischen Kräfte mit den äusseren Kräften ins Gleichgewicht gelangen; bei jedem kleineren δ sind die erzeugten inneren Kräfte zu schwach, das Gleichgewicht herzustellen, sie sind also erst recht zu schwach, den Stab mit seiner Last nach der geraden Gleichgewichtsfigur zurück zu beschleunigen.

Wenn also $L > \frac{1}{2}\frac{\pi}{p}$ ist, so hat ein kleiner Fehler in der Einstellung der geradlinigen Gleichgewichtslage I ein »Umfallen« zur Folge; der Stab geht sei es in die Gleichgewichtslage II, sei es in die Gleichgewichtslage III über, welche stabil sind.

Wenn aber $L <= \frac{1}{2}\frac{\pi}{p}$ ist, und der Stab wird noch so weit aus der geraden Linie ausgebogen, so muss er in die geradlinige Figur zurückkehren, denn es giebt kein δ, bei dem Gleichgewicht möglich wäre; bei einem noch so kleinen δ sind die äusseren Kräfte im Vergleich zu den erzeugten inneren elastischen Kräften zu schwach, ein Gleichgewicht herzustellen, die inneren Kräfte beschleunigen den Stab mit seiner Last immer wieder nach der geradlinigen Gleichgewichtsfigur zurück.

Wenn also $L <= \frac{1}{2}\frac{\pi}{p}$ ist, so ist die geradlinige Gleichgewichtsfigur I gegen kleine Fehler des Einstellens unempfindlich, sie ist stabil und einzig möglich.

Die Bedingung $L <= \frac{1}{2}\frac{\pi}{p}$ kann auch geschrieben werden

$$p <= \frac{1}{2}\frac{\pi}{L}; \quad p^2 <= \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{L^2}; \quad P <= \frac{1}{4}\frac{\pi^2 EJ}{L^2};$$

$$P <= \frac{\pi^2 EJ}{L^2}\,0{,}25.$$

So lange diese Bedingung erfüllt ist, so lange giebt es nur eine Gleichgewichtsfigur, die natürliche geradlinige Gleichgewichtsfigur I. Ist diese Bedingung aber nicht erfüllt, so giebt es drei Gleichgewichtsfiguren, deren die geradlinige Figur I derart labil ist, dass der Stab in eine der zwei symmetrischen Gleichgewichtsfiguren II und III umfällt.

Bis hierher ist vorausgesetzt worden, dass der Stab an seinem einen Ende fest eingespannt war, an seinem anderen Ende aber frei war. Aus Figur 41 können aber Aufschlüsse gefunden werden für den Fall, dass das eine Ende des Stabes wie bisher fest eingespannt ist, das andere Ende in der Verlängerung der Einspannungsaxe aber etwa in einer festen Röhre geführt ist. Die Röhre ist so fest gedacht, dass sie jedes Moment $P \cdot \delta$ auszuüben im Stande ist. Dieser Stützung des Stabes entspricht die Figur 45.

Ist H der in der Einspannungsaxe gemessene Abstand des inneren Endes der Röhre von der Einspannungsstelle, so ergiebt sich aus Figur 45, dass dem Absolutwert nach $H = 4\left|a\frac{K}{p}\right|$ ist. Da aber der kleinste Wert von K, bei dem es noch eine Ausbiegung δ giebt, $K = \frac{\pi}{2}$ ist, und da aus Gleichung B* Seite 32 für $K = \frac{\pi}{2}$ sich $q = 0$ ergiebt, woraus aus der Gleichung auf Seite 5 folgt, dass das entsprechende $a = -1$ ist, so muss, damit der Stab in Figur 45 die Gleichgewichtsfiguren II oder III annehmen könne, $H => 4\frac{\pi}{2p}$; $H => \frac{2\pi}{p}$ sein.

Vorausgesetzt, dass diese Bedingung erfüllt ist, dann muss noch der Stab, damit er nicht aus der Röhre herausrutsche und so die Stützung ändere, eine solche Länge L haben, dass $L > 4\frac{K}{p}$.

Da a und K ein für alle Male mit einander in einer gewissen Beziehung durch Vermittlung von q stehen, so kann man aus der Gleichung $H = 4\left(-a\frac{K}{p}\right)$ rechnen $K = f(p \cdot H)$.

Kennt man K, dann kann man kontrollieren, ob $L > 4\frac{K}{p}$ erfüllt ist. Wenn dies der Fall ist, dann ist $\delta = \frac{2k}{p}$, wo k die zu dem gerechneten K gehörige Grösse hat.

Wenn sich hierbei $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ergiebt, so sind die entsprechenden elastischen Linien in den Kurven des ersten Falles enthalten. Kann sich der Stab nicht durchdringen, dann hören die Bedingungen der Aufgabe auf erfüllt zu sein, sobald der gebogene Stab sich selbst berührt; dies ist aber nach Figur 11, welche mit der Lage II in Figur 45 übereinstimmt, der Fall, wenn $a = -\frac{p}{K}y_a$ sich ergiebt. Es ist also bei Figur 45 auf alle Fälle a immer negativ.

Die geradlinige Gleichgewichtslage I der Figur 45 ist natürlich immer möglich. Angenommen es sei $H > \frac{2\pi}{p}$, dann ist Gleichgewichtsfigur I labil. Denn wenn der Stab noch so wenig aus der geraden Linie ausgebogen wird, so muss er in die Lagen II oder III »ausknicken«, weil erst wieder bei derjenigen Ausbiegung $2\delta = \frac{4k}{p}$, welche dem $aK = -\frac{p \cdot H}{4}$ entspricht, die inneren elastischen Kräfte mit den äusseren Kräften ins Gleichgewicht gelangen. Bei jedem kleineren Pfeile sind die erzeugten inneren Kräfte zu schwach das Gleichgewicht herzustellen, sie sind also umsomehr zu schwach, den Stab mit der Last nach der geraden Gleichgewichtsfigur zurückzubeschleunigen.

Die Gleichgewichtslagen II und III sind aber stabil, denn wenn der Pfeil verringert wird, so überwiegen die äusseren Kräfte und beschleunigen den Stab in die Gleichgewichtslage II oder III zurück, wenn aber der Pfeil vergrössert wird, so überwiegen die inneren Kräfte und beschleunigen ihrerseits den Stab in die betreffende Gleichgewichtslage zurück.

Wenn also $H > 2\frac{\pi}{p}$ ist, dann hat ein kleiner Fehler in der Einstellung der geradlinigen Gleichgewichtslage I ein »Ausknicken« zur Folge; der Stab geht sei es in die Gleichgewichtslage II, sei es in die Gleichgewichtslage III über, welche stabil sind.

Ist zwar $H > 2\frac{\pi}{p}$ aber $L < 4\frac{K}{p}$, dann hat ein kleiner Fehler in der Einstellung der geradlinigen Gleichgewichtslage I der Figur 45 ein »Umfallen« zur Folge; der Stab rutscht aus der Führung heraus und geht in die Gleichgewichtslagen II oder III der Figur 44 über.

Wenn $H <= 2\frac{\pi}{p}$ ist, und der Stab wird, sofern er noch in der Führung bleibt, noch so weit aus der geraden Linie ausgebogen, so muss er in die geradlinige Figur zurückkehren, denn es giebt kein δ, bei dem Gleichgewicht möglich wäre; bei einem noch so kleinen Pfeil 2δ sind die äusseren Kräfte im Vergleich zu den erzeugten inneren Kräften zu schwach ein Gleichgewicht herzustellen; die inneren Kräfte beschleunigen den Stab mit seiner Last immer wieder nach der geradlinigen Gleichgewichtsfigur zurück.

Wenn demnach $H <= 2\frac{\pi}{p}$ ist, so ist die geradlinige Gleichgewichtsfigur I gegen kleine Fehler des Einstellens unempfindlich, sie ist stabil und die einzig mögliche.

Die Bedingung $H <= 2\frac{\pi}{p}$ kann auch geschrieben werden

$$p <= \frac{2\pi}{H}; \quad p^2 <= \frac{4\pi^2}{H^2}; \quad P <= 4\frac{\pi^2 EJ}{H^2};$$

$$P <= \frac{\pi^2 EJ}{H^2} 4.$$

So lange diese Bedingung erfüllt ist, so lange giebt es bei der Stützung nach Figur 45 nur eine Gleichgewichtslage, die geradlinige Gleichgewichtsfigur I. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so giebt es drei Gleichgewichtsfiguren, deren die geradlinige Figur I derart labil ist, dass der Stab in eine der zwei symmetrischen Gleichgewichtsfiguren II und III »ausknickt«, vorausgesetzt, dass die Stablänge L nicht so klein ist, dass der Stab die Führung verlässt und dann in die Gleichgewichtsfigur II oder III der Figur 44 »umfällt«.

Nimmt man aus der allgemeinen Kurve Figur 37 ein von zwei beliebigen Wendepunkten begrenztes Stück der Kurve heraus, so hat man die richtige elastische Linie eines Stabes, an dessen beiden freien Enden zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte P in einer und derselben Wirkungslinie angreifen. Für zwei unmittelbar aufeinander folgende Wendepunkte ist diese Belastung in Figur 46 dargestellt.

Ausser der Gleichgewichtsfigur II giebt es noch die zu ihr symmetrische Figur III und, wie immer, die geradlinige Figur I.

Aus Figur 46 ergiebt sich, dass $L = \frac{2K}{p}$ ist, also hat man sofort $K = \frac{1}{2} pL$, welchem K bestimmte Werte von k und q entsprechen; aus diesen ergiebt sich der zugehörige Wert von a und δ.

Der Pfeil der elastischen Linie ist dann $\delta = \frac{2k}{p}$, und die Sehne ist $\left| 2a\frac{K}{p} \right|_{\text{absolut}} = \left| aL \right|_{\text{absolut}}$.

Da der kleinste Wert von K, bei dem es noch eine Ausbiegung δ giebt, $K = \frac{\pi}{2}$ ist, so muss, damit die Gleichgewichtslage II resp. III möglich sei, $L \overline{>} \frac{\pi}{p}$ sein. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, dann ist die geradlinige Gleichgewichtsfigur I allein möglich.

Wenn $L \overline{<} \frac{\pi}{p}$ ist, so ist $p \overline{<} \frac{\pi}{L}$; $p^2 \overline{<} \frac{\pi^2}{L^2}$;

$$P \overline{<} \frac{\pi^2 EJ}{L^2}.$$

Solange diese Bedingung erfüllt ist, solange giebt es bei der Belastung nach Figur 46 nur eine Gleichgewichtslage, die geradlinige Gleichgewichtsfigur I. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so giebt es drei Gleichgewichtsfiguren, deren die gerade Gleichgewichtsfigur I derart labil ist, dass der Stab in eine der zwei symmetrischen Gleichgewichtsfiguren II und III »ausknickt«.

Allgemein ist bei diesem Falle der Figur 46 $L = \frac{2K}{p}$. Nun fängt nach Seite 33 eine zur Kraft P normale Tangente eben an möglich zu sein, wenn $K = 1{,}854080$ ist, und zwar ist diese Tangente für diesen Wert von K diejenige im Lastangriffspunkt. Also muss, damit in Figur 46 zur Kraft normale Tangenten vorhanden sind, $L \overline{>} \frac{2 \cdot 1{,}854080}{p}$ sein. Hiermit findet die Bemerkung auf Seite 26 ihre Erledigung.

Sobald aber zur Kraft normale Tangenten vorhanden sind, ist man wieder auf die Kurven des ersten Falles zurückgeführt, denn man erhält die der elastischen Linie Figur 46 entsprechenden Kurven, wenn man in den Figuren des ersten Falles das Stück von dem Wendepunkte $s = l$ bis zum Wendepunkte $s = \frac{2K}{p} + l$ nimmt.

Das entsprechende Stück aus Figur 14 giebt die der Figur 46 entsprechende elastische Linie, deren Enden zu der Kraft normal stehen.

Das entsprechende Stück aus den Figuren 9 und 11 giebt die elastische Linie, deren Enden sich zunehmend gegeneinander neigen.

Das entsprechende Stück aus der Figur 12 giebt die elastische Linie, deren Enden zusammentreffen.

Das entsprechende Stück aus den Figuren 13 und 10 giebt die elastische Linie, deren Enden, nachdem der Stab, falls dies möglich ist, sich durchdrungen hat, sich wieder von einander wegneigen.

Welche von diesen elastischen Linien bei konstantem L, E und J die zutreffende ist, hängt von der Grösse der Kräfte P ab. Denn aus $L = \frac{2K}{p}$ ergiebt sich $p = \frac{2K}{L}$; $p^2 = \frac{4K^2}{L^2}$;

$$P = 4\frac{K^2EJ}{L^2}.$$

Je nach der Gestalt der elastischen Linie, die man erhalten will, wählt man das K, und dann hat man aus obiger Gleichung den Wert von P, der zu der betreffenden elastischen Linie gehört.

Beispiele für die Berechnung der Durchbiegung der Enden eines nach Figur 46 belasteten Stabes.

Es möge, wie oben angegeben, der für die Gestalt der elastischen Linie in erster Reihe massgebende Wert K gewählt werden, es soll aber hier die Rechnung nicht bis auf P geführt werden, sondern nur bis auf p. Die Auflösung von p in P und J hat dann in jedem besonderen Fall so zu geschehen, dass die Elasticitätsgrenze nirgends überschritten wird.

Aus $p = \frac{2K}{L}$ erhält man, wenn $L = 1$ genommen wird, $p = 2K$. Unter dieser Annahme sind die folgenden Beispiele gerechnet.

Wenn $K = \frac{\pi}{2} = 1{,}57080$ gewählt wird, so ist $p = 2K = \pi = 3{,}14159$, und da diesem K die Werte $k = 0$; $q = 0$; $a = -1$ entsprechen, so hat die zugehörige elastische Linie den Pfeil $\delta = \frac{2k}{p} = 0$; die Sehne $S = |a\ L| = 1$.

Wenn $K = 1{,}62001$ gewählt wird, so ist $p = 2K = 3{,}24002$, und da diesem K die Werte $k = 0{,}34202$; $q = 0{,}00777$ entsprechen, so findet man durch Benützung der Formel für a auf Seite 5, dass $a = -0{,}88116$ ist, und hat dann den Pfeil $\delta = \frac{2k}{p} = \frac{2k}{2K} = \frac{k}{K} = 0{,}21112$; die Sehne $S = |a \cdot L| = 0{,}88116$; die Neigung der Endtangente gegen die Kraftrichtung $\alpha = 2\ arc \sin k = 40^\circ$.

Wenn $K = 1{,}85408$ gewählt wird, so ist $p = 2K = 3{,}70816$, und da diesem K nach Seite 19 die Werte entsprechen $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70711$; $q = 0{,}04322$; $a - 0{,}45695$, so ist der Pfeil

$$\delta = \frac{2k}{p} = \frac{2k}{2K} = \frac{k}{K} = 0{,}38140;$$

die Sehne $S = |a \cdot L| = 0{,}45695$; die Endneigung $\alpha = 2 \cdot arc \sin k = 90^\circ$.

Wenn $K = 2{,}32144$ gewählt wird, so ist $p = 2K = 4{,}64288$, und da diesem K nach Seite 14 die Werte entsprechen $k = 0{,}90895$; $q = 0{,}10770$; $a = 0$, so ist der Pfeil

$$\delta = \frac{2k}{p} = \frac{2k}{2K} = \frac{k}{K} = 0{,}39155;$$

die Sehne $S = a\,L = 0$; die Endneigung $\alpha = 2\ arc \sin k = 130^\circ\ 43{,}2'$; die Ordinate des Berührungspunktes der zur Kraft normalen Tangente $y_n = \left| -\frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}} \right| = 0{,}24603.$

Wenn $K = 3{,}15327$ gewählt wird, so ist $p = 2K = 6{,}30654$, und da diesem K die Werte $k = 0{,}98481$; $q = 0{,}20661$ entsprechen, so findet man durch Benützung der Formel für a auf Seite 5, dass $a = 0{,}34048$ ist, und hat dann den Pfeil

$$\delta = \frac{2k}{p} = \frac{2k}{2K} = \frac{k}{K} = 0{,}31231;$$

die Sehne $S = a \cdot L = 0{,}34048$; die Endneigung $\alpha = 2\ arc \sin k = 160^\circ$; den Abstand der normalen Tangente $y_n = \left| -\frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}} \right| = 0{,}21738.$

Wählt man endlich $K = \infty$, so ist $p = \infty$ und $k = 1$, also hat man den Seite 10 besprochenen Fall der Entartung, welchem Figur 15 entspricht, nur sind hier die beiden Äste geradlinig gesteckt, und die Schleife ist unendlich klein geworden.

Diese sechs Beispiele sind in Figur 47 zur Darstellung gebracht.

Um einen Überblick über die Veränderlichkeit von α, δ und S mit P zu erhalten, hat man in Figur 47a als Abscissen die Werte der diesen Beispielen entsprechenden $p^2 = \frac{P}{EJ}$ und als Ordinaten die zugehörigen Werte von α, δ und S aufgetragen, und zwar sind δ und S in demselben Masstabe gezeichnet.

Gemäss ihrer Entstehung gelten diese Kurven der Figur 47a zunächst nur für $L = 1$. Ist aber L nicht gleich 1, dann ist $2K = pL$, und in den Beispielen ist überall der benützte Zahlenwert für p jetzt der Wert des Produktes $p \cdot L$, so dass die erhaltenen Zahlenwerte für δ und S jetzt die Verhältnisse $\frac{\delta}{L}$ und $\frac{S}{L}$ darstellen.

Nimmt man also zur Abscisse die Werte $p^2 L^2 = \frac{P}{EJ} L^2$, so stellt die eine Kurve die α dar, die beiden anderen aber die Verhältnisse $\frac{\delta}{L}$ und $\frac{S}{L}$.

Das beim Belastungsfall der Figur 46 vorkommende Maximalmoment hat die Grösse

$$M_{\max} = P\delta = P\frac{2k}{p} = \frac{2kP}{\sqrt{\frac{P}{EJ}}}; \quad M_{\max} = 2k\sqrt{\frac{P^2 EJ}{P}} = 2k\sqrt{PE\mathfrak{J}}, \text{ und es ist } \sigma_{\max} = \pm\frac{M_{\max}}{J} \cdot e,$$

wenn e der Abstand der äussersten Fasern von der neutralen Axe ist. Demnach ist

$$\sigma_{\max} = \pm 2ke\sqrt{\frac{PEJ}{J^2}}; \quad \sigma_{\max} = \pm 2ek\sqrt{\frac{P \cdot E}{J}}.$$

Diese selbe Grösse hat übrigens $\sigma_{\max}$ in jedem aus der allgemeinen Kurve der Figur 37 abgeleiteten richtigen Gleichgewichtszustand.

Der grösste Wert, den k annehmen kann, ist 1, wenn aber $k = 1$ ist, so ist nach Seite 10 entweder $\mathfrak{J} = 0$ oder $P = \infty$.

Die von der reinen Biegung hervorgerufene Spannung kann also bei endlichem e, E und $\mathfrak{J}$ niemals unendlich gross werden, wenn nicht P selbst unendlich gross wird.

In dem letzten Gleichgewichtszustand der Figur 47, welcher den unendlich kleinen Knoten in der Mitte hat, ist das Maximalmoment $M_{\max} = P \cdot \delta$ von der Form $\infty \cdot 0$, setzt man aber die Werte ein, so hat man $M_{\max} = 2k\frac{\infty}{\sqrt{\infty}}\sqrt{E\mathfrak{J}} = \sqrt{\infty} = \infty$.

Im Bereich der unendlich kleinen Schleife ist also die Beanspruchung unendlich gross, was sich auch aus $\frac{1}{\varrho} = \frac{M_{\ddot{a}}}{E\mathfrak{J}}$ ergiebt, weil $\varrho = 0$ ist.

Es war allgemein der Absolutwert der grössten Biegungsspannung $\sigma_{\max} = 2ek\sqrt{\frac{P \cdot E}{J}}$, oder, wenn $2 \cdot e = h =$ der Querschnittshöhe gesetzt wird,

$$\sigma_{\max} = h \cdot k \cdot \sqrt{\frac{P \cdot E}{J}}; \quad \sigma^2 = h^2 k^2 \frac{P \cdot E}{J}; \quad \sigma^2 \frac{L^2}{E^2} = h^2 k^2 \frac{P}{EJ} L^2;$$

$$\sigma^2 \frac{L^2}{E^2} = h^2 k^2 p^2 L^2; \quad \sigma^2 \frac{L^2}{E^2} = h^2 k^2 (2K)^2; \quad \frac{\sigma}{\frac{h}{L}E} = k(2K).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann in den bisherigen Beispielen zu den einzelnen Werten von $\frac{P}{EJ}L^2$ das Verhältnis $\sigma_{\max} : \frac{h}{L}E$ berechnet werden; dies ist geschehen, und in Figur 47b sind die betreffenden Werte zu einer Kurve verbunden worden. Dass diese Kurve der $\sigma_{\max} : \frac{h}{L}E$ jenseits von $\frac{P}{EJ}L^2 = 39{,}772$ annähernd geradlinig ansteigt, erklärt sich daraus, dass in Figur 47a jenseits von 39,772 der Wert von δ nur sehr langsam abnimmt, so dass $M_{\ddot{a}} = P \cdot \delta$, also auch $\sigma_{\max}$, annähernd proportional mit P wächst.

Sollen nun bei einem Stabe aus Schweisseisen, für welchen z. B. $\frac{P}{EJ}L^2 = 39{,}772$ ist, in der zugehörigen Gleichgewichtslage nach Figur 46, die Voraussetzungen, unter welchen alle Resultate nur giltig sind, erfüllt bleiben, so darf das entsprechende $\sigma_{\max}$ die Elektrizitätsgrenze 1600 kg/cm² nicht überschreiten. Nun ist bei $\frac{P}{EJ} \cdot L^2 = 39{,}772$ in dem Beispiel gefunden worden $2K = 6{,}30654$;

$k = 0{,}98481$, also ist $\dfrac{\sigma}{\frac{h}{L}E} = 6{,}210744$; $\sigma = \left(\frac{h}{L}\right) 6{,}210744 \cdot 2000000$; $\sigma = \left(\frac{h}{L}\right) \cdot 12\,421\,488$, es muss also sein $\left(\frac{h}{L}\right) <= \frac{1600}{12\,421\,488}$; $\frac{h}{L} <= \frac{1}{7763{,}4}$, d. h. ein 1 cm hoher Stab müsste mindestens 77,634 m lang sein. Solche Verhältnisse lassen sich natürlich niemals verwirklichen, ganz abgesehen davon, dass in solchen Fällen der Einfluss des Eigengewichtes denjenigen der Belastung bei weitem überragen würde, falls der Stab nicht auf einer vollkommen glatten horizontalen Unterlage seiner ganzen Länge nach aufsässe.

Was hier von den Spannungen gesagt worden ist, bezieht sich auf die reine Biegungsspannung; in Wirklichkeit kommt die Normalspannung der Normalkraft noch hinzu. In dem Querschnitte, in welchem durch die Biegung $\sigma_{\max}$ erzeugt wird, ist die zusätzliche Spannung $\frac{P}{F}$, so dass alle Ordinaten der Figur 47b um den Betrag $\dfrac{P}{\frac{h}{L}EF}$ zu vergrössern sind.

Beispiel für die Anwendung der Figuren 47a und 47b.

Man habe einen schweisseisernen Rundstab von 1 cm Durchmesser, seine Länge sei $L = 1000$ cm, seine Querschnittshöhe ist $h = 1$ cm, also ist $\frac{h}{L} = \frac{1}{1000}$. Soll nun das Maximum der Biegungsspannung 1500 kg/cm² sein, so hat man

$$\frac{\sigma}{\frac{h}{L} \cdot E} = \frac{1500}{2000} = \frac{3}{4}.$$

Sucht man in Figur 47b denjenigen Wert von $\frac{P}{EJ} L^2$, der zu $\dfrac{\sigma}{\frac{h}{L}E} = \frac{3}{4}$ gehört, so findet man $\frac{P}{EJ} L^2 = 10{,}2$.

Da $J = 0{,}0491$ cm⁴ ist, so ist $P = 10{,}2 \cdot \frac{0{,}0491 \cdot 2000000}{1000000}$; $P = 1$ kg.

Aus Figur 47a findet man ferner, dass zu $\frac{P}{EJ} L^2 = 10{,}2$ gehört $\frac{\delta}{L} = 0{,}147$; $\frac{S}{L} = 0{,}92$, also ist $\delta = 147$ cm und $S = 920$ cm.

Geht demnach der Stab unter Einwirkung der beiden ursprünglich axialen Kräfte $P = 1$ kg aus der labilen geradlinigen Gleichgewichtsfigur heraus, so ist er in der krummlinigen stabilen Gleichgewichtsfigur immer noch tragfähig, eine andere Frage ist aber, ob der Stab mit dem Pfeile $\delta = 147$ cm und der Sehne $S = 920$ cm den Zweck, zu welchem die Lasten zu tragen sind, noch erfüllt.

Zu der Biegungsspannung ist noch die Spannung durch die Normalkraft hinzuzufügen; es ist

$$\frac{P}{F} = \frac{1}{0{,}7854} = 1{,}27 \text{ kg}.$$

Man sieht, dass die von der Normalkraft herrührende Spannung in diesem Zusammenhange von ganz untergeordneter Bedeutung ist.