Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge

Kriemler, Karl

1902

Der parallel zur Einspannung belastete Stab mit Berücksichtigung der drei deformierenden Kraftwirkungen

urn:nbn:de:bsz:31-270207

Visual Library

Der parallel zur Einspannung belastete Stab mit Berücksichtigung der drei deformierenden Kraftwirkungen.

In der Einleitung zur vorliegenden Arbeit ist gesagt worden, dass die Reduktion der äusseren Kräfte auf den Schwerpunkt irgend eines Querschnittes im Allgemeinen ein Moment, eine Normalkraft (nach der Richtung der Tangente) und eine Querkraft (nach der Normalen zur Tangente) giebt. Bis hierher ist aber nur das Moment berücksichtigt worden, weil thatsächlich die reine Biegung für die Deformation ausschlaggebend ist.

Im Folgenden soll nun zur Vervollständigung der Versuch gemacht werden, alle Reduktionselemente zu berücksichtigen, und zwar für die Belastung nach dem zweiten Falle, weil in diesem auch der erste Fall mit enthalten ist.

Mit dem in Figur 35 angenommenen Koordinatensystem hat man (vergl. Fig. 48) das Moment $M = -P \cdot y$; die Normalkraft $N = -P \cdot \cos\varphi$; die Querkraft $Q = +P \cdot \sin\varphi$.

Vor Allem muss nun der Kontingenzwinkel ermittelt werden, dies ist der Winkel, den zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente der Stabaxe oder, was dasselbe ist, den zwei aufeinanderfolgende Stabquerschnitte mit einander bilden.

Es möge zuest der Einfluss von M und N auf diesen Kontingenzwinkel ermittelt werden.

War der Abstand zweier aufeinanderfolgender Querschnitte im ursprünglichen geraden Stabe ds, so wird dieser Abstand durch die mit der Deformation verbundene relative Bewegung des zweiten Querschnittes derart verändert, dass er in der äussersten Zugfaser die Grösse hat $(1+\varepsilon_1)\,ds$, in der axialen Faser die Grösse hat $(1+\varepsilon_0)\,ds$, in der äussersten Druckfaser die Grösse hat $(1+\varepsilon_2)\,ds$, dabei wird die übliche Voraussetzung gemacht, dass die Querschnitte eben bleiben. Nun ist $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{N}{EF}$; $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{1}{E}\left(\frac{N}{F} + \frac{M}{J}e\right)$; $\varepsilon_1 = \frac{N}{EF} + \frac{M}{EJ}e$, wo e der Abstand jeder der äussersten Fasern von der axialen Faser ist, und endlich $\varepsilon_2 = \frac{N}{EF} - \frac{M}{EJ}e$.

Diese Beziehungen sind in Figur 49 dargestellt.

Der Winkel, um den sich hierbei der zweite Querschnitt gegen den ersten neigt, d. h. der von M und N herrührende Beitrag zu dem Kontingenzwinkel ist

$$d\varphi_1 = \frac{ds\,(1+\varepsilon_1) - ds\,(1+\varepsilon_2)}{2e} = \frac{ds}{2e}\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) = \frac{ds}{2e}\left(\frac{N}{EF} + \frac{M}{EJ}e - \frac{N}{EF} + \frac{M}{EJ}e\right); \quad d\varphi_1 = \frac{M}{EJ}\,ds.$$

Nun möge der Einfluss von Q auf den Kontingenzwinkel ermittelt werden. Hierzu bedarf es einer vorbereitenden Untersuchung.

Berücksichtigt man beim Belastungsfalle der Figur 50 nur die Querkräfte und vernachlässigt man die veränderte Neigung der Axe gegen die Kräfte, so ergiebt die übliche Querkraftslinie

$$\alpha_1 = \frac{P_1 + P_2}{\beta FG}; \quad \alpha_2 = \frac{P_2}{\beta FG},$$

worin G die Ziffer der Schubelastizität ist, und β ein von der Querschnittsform abhängiger Festwert ist, worüber sich in Bach's Buch: Elastizität und Festigkeit, 1. Aufl., S. 283, Näheres vorfindet.

Anmerkung. Bei dem in Figur 50 dargestellten Stabe ist, trotzdem er eingespannt ist, der Winkel bei $s = 0$ nicht $\varphi = 0$, sondern

$$\varphi = \alpha_1 = \frac{A}{\beta F \cdot G},$$

wenn A die zur Einspannung quer gerichtete Reaktion ist.

Die Winkeländerung an der Stelle, wo sich die Querkraft ändert, ist

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{P_2 - P_1 - P_2}{\beta\, FG} = -\frac{P_1}{\beta\, FG};$$

nun ist $\alpha_2 - \alpha_1 = d\alpha$; $-P_1 = dQ$, also ist der Kontingenzwinkel an der Stelle, wo sich Q um dQ ändert $d\alpha = \frac{dQ}{\beta\, FG}$.

Mit Vernächlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung kann dieses Resultat auch auf den stark gekrümmten Stab, auf welchen sich diese Untersuchung erstreckt, angewendet werden.

Es ist also der Beitrag der Querkraft zu dem Kontingenzwinkel $d\varphi_2 = \frac{dQ}{\beta\, GF}$, und es kann insgesamt, wobei allerdings kleine Grössen höherer Ordnung vernachlässigt sind, der Kontingenzwinkel des Stabes gesetzt werden $d\varphi = d\varphi_1 + d\varphi_2$;

Gl. 1)
$$d\varphi = \frac{M}{EJ}\, ds + \frac{dQ}{\beta\, GF}.$$

Diese Beziehung ist in Figur 51 zur Darstellung gebracht.

Aus dieser Figur 51 ergiebt sich $\frac{d\sigma}{\varrho} = d\varphi$; $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{d\sigma}$, und zwar ist aufgrund von Figur 49

Gl. 2)
$$d\sigma = (1 + \varepsilon_0)\, ds.$$

Es folgt hiermit aus Gleichung 1

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ}\frac{ds}{d\sigma} + \frac{1}{\beta\, GF}\frac{dQ}{d\sigma};\quad \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{M}{EJ}\frac{1}{(1+\varepsilon_0)} + \frac{1}{\beta\, GF}\frac{dQ}{d\sigma};\quad (1+\varepsilon_0)\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{M}{EJ} + \frac{(1+\varepsilon_0)}{\beta\, GF}\frac{dQ}{d\sigma}.$$

Nun ist $Q = P \sin\varphi$ und $\frac{dQ}{d\sigma} = \frac{dQ}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\sigma} = P\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{d\sigma}$, also ist

$$(1+\varepsilon_0)\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{M}{EJ} + \frac{(1+\varepsilon_0)}{\beta\, GF}\, P\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{d\sigma};\quad (1+\varepsilon_0)\frac{d\varphi}{d\sigma}\left(1 - \frac{P}{\beta\, GF}\cos\varphi\right) = \frac{M}{EJ}.$$

Es ist aber $\varepsilon_0 = \frac{N}{EF} = -\frac{P}{EF}\cos\varphi$, und wenn man $\frac{P}{EF} = \nu^2$; $\frac{P}{\beta\, GF} = \omega^2$ setzt, so hat man $(1 - \nu^2\cos\varphi)(1 - \omega^2\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{M}{EJ}$, und da $M = -P \cdot y$ ist, so ist, wenn $\frac{P}{EJ} = p^2$ gesetzt wird, $(1 - \nu^2\cos\varphi)(1 - \omega^2\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma} = -p^2 \cdot y$; $(1 - \nu^2\cos\varphi - \omega^2\cos\varphi + \nu^2\omega^2\cos^2\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma} = -p^2 \cdot y$.

Nun kann, da im Vorausgehenden schon Vernachlässigungen zugelassen worden sind, auch $\nu^2\omega^2\cos^2\varphi$ als kleine Grösse höherer Ordnung vernachlässigt werden, also hat man $(1 - (\nu^2 + \omega^2)\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma} = -p^2 \cdot y$. Setzt man noch zur Abkürzung $\nu^2 + \omega^2 = \lambda^2$, so dass

Gl. 3)
$$\lambda^2 = \frac{P}{F}\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\beta\, G}\right)$$

ist, dann hat man

Gl. 4)
$$(1 - \lambda^2\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma} = -p^2 \cdot y.$$

Durch Differentiation bekommt man hieraus $d\left[\frac{(1 - \lambda^2\cos\varphi)\, d\varphi}{d\sigma}\right] = -p^2 \cdot dy$; es ist aber $d\frac{(1 - \lambda^2\cos\varphi)\, d\varphi}{d\sigma} = \frac{d\sigma\,\{(1 - \lambda^2\cos\varphi)\, d^2\varphi + (\lambda^2\sin\varphi)\, d\varphi^2\} - (1 - \lambda^2\cos\varphi)\, d\varphi\, d^2\sigma}{d\sigma^2}$, also ist

$$-p^2\frac{dy}{d\sigma} = \frac{(1 - \lambda^2\cos\varphi)\, d^2\varphi + \lambda^2\sin\varphi\, d\varphi^2}{d\sigma^2} - (1 - \lambda^2\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{d\sigma^2};$$

da aber $\frac{d^2\sigma}{d\sigma^2} = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{d\sigma}\right) = \frac{d}{d\sigma}(1) = 0$ ist, so ist, weil noch $\frac{dy}{d\sigma} = \sin\varphi$ ist,

Gl. 5)
$$(1 - \lambda^2\cos\varphi)\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} + \lambda^2\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = -p^2\sin\varphi.$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Setzt man

Gl. 6)
$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = z,$$

dann ist $\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} = \frac{dz}{d\sigma} = \frac{dz}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{d\sigma} = z\,\frac{dz}{d\varphi}$, und man hat die Gleichung

$$(1-\lambda^2\cos\varphi)\,z\,\frac{dz}{d\varphi} + \lambda^2\sin\varphi\, z^2 \quad -p^2\sin\varphi,\ \text{und daraus}\ \frac{dz}{d\varphi} = \frac{-(p^2+\lambda^2 z^2)\sin\varphi}{z(1-\lambda^2\cos\varphi)},$$

schliesslich durch Trennung der Variablen

$$\frac{z\,dz}{p^2+\lambda^2 z^2} = -\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{1-\lambda^2\cos\varphi};\quad \frac{z\,dz}{\lambda^2\left(\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2\right)} = -\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\lambda^2\left(\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi\right)};\quad \frac{z\,dz}{\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2} = -\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi}.$$

Nun ist $d\left(\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2\right) = 2z\,dz$; $d\left(\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi\right) = \sin\varphi\,d\varphi$, also ist

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\left(\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2\right)}{\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2} = -\frac{d\left(\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi\right)}{\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi},$$

so dass die Integration ergiebt

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2\right) = -\log\left(\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi\right) + \log c;$$

$$\sqrt{\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2} = \frac{c}{\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi};\quad \frac{p^2}{\lambda^2}+z^2 = \frac{c^2}{\left(\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi\right)^2};$$

$$z^2 = \frac{c^2}{\left(\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi\right)^2} - \frac{p^2}{\lambda^2} = \frac{\lambda^4 c^2 - \frac{p^2}{\lambda^2}\left(1-\lambda^2\cos\varphi\right)^2}{(1-\lambda^2\cos\varphi)^2} = \frac{p^2}{\lambda^2}\,\frac{C-(1-\lambda^2\cos\varphi)^2}{(1-\lambda^2\cos\varphi)^2};$$

$$z = \frac{p}{\lambda}\,\frac{\sqrt{C-(1-\lambda^2\cos\varphi)^2}}{1-\lambda^2\cos\varphi}.$$

Man hat somit, weil $z = \frac{d\varphi}{d\sigma}$ ist, $\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{p}{\lambda}\,\frac{\sqrt{C-(1-\lambda^2\cos\varphi)^2}}{1-\lambda^2\cos\varphi}$.

Nun sind nach Figur 35 zusammengehörig $y = 0$ und $\varphi = \alpha$, also ist nach Gleichung 4 $(1-\lambda^2\cos\alpha)\frac{d\varphi}{d\sigma} = 0$, d. h. es sind zusammengehörig $y = 0$; $\varphi = \alpha$; $\frac{d\varphi}{d\sigma} = 0$, und man hat

$$0 = \frac{p}{\lambda}\,\frac{\sqrt{C-(1-\lambda^2\cos\alpha)^2}}{1-\lambda^2\cos\alpha},$$

woraus $C = (1-\lambda^2\cos\alpha)^2$. Also ist

Gl. 7)
$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{p}{\lambda}\,\frac{\sqrt{(1-\lambda^2\cos\alpha)^2-(1-\lambda^2\cos\varphi)^2}}{1-\lambda^2\cos\varphi}$$

oder nach Trennung der Variablen $\frac{(1-\lambda^2\cos\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2\cos\alpha)^2-(1-\lambda^2\cos\varphi)^2}} = \frac{p}{\lambda}\,d\sigma.$

Es ist aber

$$\begin{array}{l}(1-\lambda^2\cos\alpha)^2 = 1 - 2\lambda^2\cos\alpha + \lambda^4\cos^2\alpha\\ (1-\lambda^2\cos\varphi)^2 = 1 - 2\lambda^2\cos\varphi + \lambda^4\cos^2\varphi\\ \hline (1-\lambda^2\cos\alpha)^2-(1-\lambda^2\cos\varphi)^2 = 2\lambda^2(\cos\varphi-\cos\alpha) - \lambda^4(\cos^2\varphi-\cos^2\alpha)\end{array}$$

Ferner ist

$$\begin{array}{r}\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\\ -\cos\alpha = -1 + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\\ \hline \cos\varphi - \cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\end{array}$$

$$\begin{array}{r}\cos^2\varphi = 1 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2} + 4\sin^4\frac{\varphi}{2}\\ -\cos^2\alpha = -1 + 4\sin^2\frac{\alpha}{2} - 4\sin^4\frac{\alpha}{2}\\ \hline \cos^2\varphi - \cos^2\alpha = 4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) - 4\left(\sin^4\frac{\alpha}{2} - \sin^4\frac{\varphi}{2}\right)\end{array}$$

also ist

$$\sqrt{(1-\lambda^2\cos\alpha)^2 - (1-\lambda^2\cos\varphi)^2}$$

$$= \sqrt{4\lambda^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) - 4\lambda^4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + 4\lambda^4\left(\sin^4\frac{\alpha}{2} - \sin^4\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$= 2\lambda\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}\cdot\sqrt{1 - \lambda^2 + \lambda^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Und da nach Gleichung 2 $d\sigma = (1 - \nu^2\cos\varphi)\,ds$ ist, wo ds das Element der ursprünglichen geraden Stabaxe ist, so hat man

$$\frac{1-\lambda^2\cos\varphi}{1-\nu^2\cos\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2+\lambda^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\,p\,ds.$$

Da $\frac{1-\lambda^2\cos\varphi}{1-\nu^2\cos\varphi} = (1-\lambda^2\cos\varphi)\,(1-\nu^2\cos\varphi)^{-1} = (1-\lambda^2\cos\varphi)\,(1+\nu^2\cos\varphi+\cdots\cdots)$ $= 1 - \lambda^2\cos\varphi + \nu^2\cos\varphi$ ist, wenn die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden, so hat man $\frac{1-\lambda^2\cos\varphi}{1-\nu^2\cos\varphi} = 1 - (\lambda^2-\nu^2)\cos\varphi = 1 - (\nu^2+\omega^2-\nu^2)\cos\varphi = 1 - \omega^2\cos\varphi = 1 - \omega^2 + 2\,\omega^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, und obige Differentialgleichung wird zu

$$\text{Gl. 8)}\qquad \frac{1-\omega^2+2\,\omega^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-\lambda^2+\lambda^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\,p\,ds.$$

Anmerkung. Setzt man $\sin\frac{\varphi}{2} = u\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$, so wird der Radicand eine Funktion 6. Grades von u, das Integral ist ein hyperelliptisches, seine Ausführung würde voraussichtlich die Einführung höherer Transcendenten nötig machen.

Wegen der wiederholten Vernachlässigungen verlohnt es sich nicht nach einer exacten Integration dieser Gleichung zu suchen, es soll hier vielmehr nur eine angenäherte Lösung unternommen werden.

Schreibt man zu diesem Zwecke die Gleichung, wie folgt:

$$\frac{\left(1-\omega^2+2\,\omega^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\left(1-\lambda^2+\lambda^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}\cdot d\varphi = 2\,p\,ds,$$

dann hat der Zähler, wenn die Grössen höherer Ordnung vernachlässigt werden, den Wert

$$\left(1-\omega^2+2\,\omega^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\right);$$

$$1-\omega^2+2\,\omega^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right);$$

$$1-\omega^2+\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda^2}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\left(2\,\omega^2-\frac{\lambda^2}{2}\right)\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

so dass mit $1-\omega^2+\frac{\lambda^2}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = C_1$ und $2\,\omega^2-\frac{\lambda^2}{2} = C_2$ die Gleichung wird zu

$$\frac{\left(C_1 + C_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 2\, p ds.$$

Setzt man nun $\sin \frac{\alpha}{2} = k$ und $\sin \frac{\varphi}{2} = u \cdot k$; $d\varphi = 2\, k \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 u^2}}$, so ist

$$\frac{(C_1 + C_2 k^2 u^2) \cdot du}{\sqrt{1 - u^2} \cdot \sqrt{1 - k^2 u^2}} = p ds; \quad C_1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} + C_2 k^2 \frac{u^2\, du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} = p ds.$$

Macht man die Substitution $u = sn\,[z]$, so ist

$$du = cn\,[z]\, dn\,[z]\, dz = \sqrt{1 - u^2} \cdot \sqrt{1 - k^2 u^2} \cdot dz,$$

also hat man $C_1\, dz + C_2\, k^2\, sn^2\,[z]\, dz = p ds$ und durch Integration und Verwendung der Seite 4 und 5 gemachten Ableitungen

$$C_1\, z + C_2 \left\{ z \frac{\Theta''(o)}{\Theta\,(o)} - \frac{\Theta'(z)}{\Theta\,(z)} \right\} = p\,(s - s_c);$$

$$C_1\, z + C_2 \left\{ z \frac{b}{2} - 2 \frac{\pi}{K} \sin \frac{\pi}{K} z \cdot f\left(\cos \frac{\pi}{K} z\right) \right\} = p\,(s - s_c).$$

Es ist aber, wenn $s = 0$ ist, $\sin \frac{\varphi}{2} = 0$; $u = 0$; $z = 0$, denn P ist der Einspannung parallel, also ist dort keine Querkraft vorhanden, daher bleibt $\varphi = 0$.

Es ist demnach $s_c = 0$, und man hat

$$\left(C_1 + \frac{C_2}{2} b\right) z - \frac{C_2}{2} \frac{4\pi}{K} \sin \frac{\pi}{K} z \cdot f\left(\cos \frac{\pi}{K} z\right) = p \cdot s.$$

Es sind aber $s = l$ und $\sin \frac{\varphi}{2} = k$ somit noch $u = 1$ zusammengehörig; damit aber $u = sn\,(z) = 1$ sei, muss $z = K$ sein, also ist $\left(C_1 + \frac{C_2}{2} b\right) \cdot K - 0 = p \cdot l$;

Gl. 9)
$$K = pl \frac{1}{C_1 + \frac{C_2}{2} b}.$$

Da in C_1 die Grösse k und in b die Grösse q enthalten ist, so müssen noch zur Lösung dieser Gleichung die Gleichungen beigezogen werden, welche die Beziehung zwischen K und k sowie zwischen k und q darstellen.

Betrachtet man jetzt z als unabhängige Variable, welche nach dem obigen Werte zwischen 0 und K annehmen kann, so ist

Gl. 10)
$$s = \frac{1}{p}\left\{\left(C_1 + \frac{C_2}{2} b\right) z - \frac{C_2}{2} \frac{4\pi}{K} \sin\left[\frac{\pi}{K} z\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K} z\right]\right)\right\}.$$

Daraus ergiebt sich

$$ds = \frac{1}{p}\left\{\left(C_1 + \frac{C_2}{2} b\right) dz - \frac{C_2}{2} \frac{4\pi}{K} \cos\left[\frac{\pi}{K} z\right] \frac{\pi}{K} \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K} z\right]\right) dz \right.$$
$$\left. + \frac{C_2}{2} \frac{4\pi}{K} \sin\left[\frac{\pi}{K} z\right] \cdot f'\left(\cos\left[\frac{\pi}{K} z\right]\right) \sin\left[\frac{\pi}{K} z\right] \frac{\pi}{K} dz \right\};$$

$$ds = \frac{1}{p}\left\{\left(C_1 + \frac{C_2}{2} b\right) dz - \frac{C_2}{2} \frac{4\pi^2}{K^2}\left[\cos\left[\frac{\pi}{K} z\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K} z\right]\right) - \sin^2\left[\frac{\pi}{K} z\right] \cdot f'\left(\cos\left[\frac{\pi}{K} z\right]\right)\right] dz\right\}.$$

Ferner ist $d\varphi = 2\, k \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 u^2}}$ und $du = \sqrt{1 - u^2} \cdot \sqrt{1 - k^2 u^2}\, dz$, also ist

$$d\varphi = 2\, k \sqrt{1 - u^2} \cdot dz = 2\, k\, cn\,[z]\, dz,$$

und man hat

$$\frac{d\varphi}{ds} = 2\, pk\, cn\,[z] \frac{1}{C_1 + \frac{C_2}{2} b - \frac{C_2}{2} \frac{4\pi^2}{K^2}\left[\cos\left[\frac{\pi}{K} z\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K} z\right]\right) - \sin^2\left[\frac{\pi}{K} z\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K} z\right]\right)\right]}.$$

Es ist aber nach Seite 47

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{M}{EJ}\frac{1}{1-\omega^2\cos\varphi}=-p^2 y\frac{1}{1-\omega^2\cos\varphi}=-p^2 y\frac{1}{1-\omega^2+2\omega^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}=-p^2 y\frac{1}{1-\omega^2+2\omega^2 k^2 sn^2[z]},$$

also ist

Gl. 11)
$$y=-2\frac{k}{p}\,cn\,[z]\,\frac{1-\omega^2+2\omega^2k^2sn^2[z]}{C_1+\frac{C_2}{2}b-\frac{C_2}{2}\frac{4\pi^2}{K^2}\left[\ldots\ldots\;\ldots\right]}.$$

Nun sind zusammengehörig $s=l$, $z=K$ und $y=0$; diese Bedingung wird von der Gleichung richtig erfüllt, denn $cn\,[K]$ ist $=0$.

Ausserdem sind zusammengehörig $s=0$, $z=0$ und $y=-\delta$, d. h. es ist

$$\delta=2\frac{k}{p}\frac{1-\omega^2}{C_1+\frac{C_2}{2}b-\frac{C_2}{2}\frac{4\pi^2}{K^2}\left[1\cdot f(1)-0\right]}.$$

Da nach Seite 5

$$f\left(\cos\frac{\pi}{K}z\right)=\frac{q}{1-2q\cos\frac{\pi}{K}z+q^2}+\frac{q^3}{1-2q^3\cos\frac{\pi}{K}z+q^6}+\cdots \text{ ist,}$$

so ist $f(1)=\frac{q}{1-2q+q^2}+\frac{q^3}{1-2q^3+q^6}+\cdots=\frac{b}{\left(\frac{2\pi}{K}\right)^2}$, und man hat

Gl. 12)
$$\delta=2\frac{k}{p}\frac{1-\omega^2}{C_1}.$$

Es ist ferner $\frac{dx}{d\sigma}=\cos\varphi=1-2k^2sn^2[z]$, und da $d\sigma=ds(1-v^2\cos\varphi)=ds\left(1-v^2(1-2k^2sn^2[z])\right)$,

so ist $\frac{dx}{ds}=\left[(1-v^2)+v^2\,2k^2sn^2[z]\right]\cdot\left[1-2k^2sn^2[z]\right]$

$$=(1-v^2)-(1-v^2)\,2k^2sn^2[z]+v^2\,2k^2sn^2[z]-4v^2k^4sn^4[z];$$

$$\frac{dx}{ds}=(1-v^2)-(1-2v^2)\,2k^2sn^2[z]-4v^2k^4sn^4[z].$$

Wollte man nun für ds den genauen Wert einführen, so würden wohl die Schwierigkeiten der weiteren Behandlung unüberwindlich sein; es soll deshalb hier als Annäherung $ds=\frac{1}{p}v\,dz$ gesetzt werden, worin v als der Mittelwert des in Wirklichkeit mit z veränderlichen Klammerausdruckes in der Formel für ds zu denken ist, genommen für die der betreffenden Stelle vorausgehenden Bogenteile.

Dann ist $p\frac{dx}{v}=(1-v^2)\,dz-(1-2v^2)\,2k^2sn^2[z]\,dz-4v^2k^4sn^4[z]\,dz$,

woraus durch Integration

$$p\frac{x-x_c}{v}=(1-v^2)\,z-(2-4v^2)\,k^2\int sn^2[z]\,dz-4v^2k^4\int sn^4[z]\,dz.$$

Nun ist (Appell-Lacour Seite 240)

$$3k^2\int sn^4[z]\,dz=sn[z]\,cn[z]\,dn[z]-z+2(1+k^2)\int sn^2[z]\,dz,$$

also ist $-4v^2k^4\int sn^4[z]\,dz=+\frac{4v^2k^2}{3}z-\frac{4v^2k^2}{3}sn[z]\,cn[z]\,dn[z]-\frac{8v^2k^2}{3}(1+k^2)\int sn^2[z]\,dz$,

und man hat

$$p\frac{x-x_c}{v}=\left(1-v^2+\frac{4}{3}v^2k^2\right)z-\frac{4}{3}v^2k^2\,sn[z]\,cn[z]\,dn[z]-\left(2-4v^2+\frac{8}{3}v^2(1+k^2)\right)k^2\int sn^2[z]\,dz;$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Baden-Württemberg

$$p\,\frac{x-x_c}{v}=\left(1-v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2\right)z-\frac{4}{3}\,v^2k^2\,sn\,[z]\,cn\,[z]\,dn\,[z]$$

$$-\left[2-4\,v^2+\frac{8}{3}\,v^2\,(1+k^2)\right]\cdot\left\{z\,\frac{b}{2}-2\,\frac{\pi}{K}\,\sin\frac{\pi}{K}\,z\cdot f\left(\cos\frac{\pi}{K}\,z\right)\right\};$$

$$p\,\frac{x-x_c}{v}=\left[1-v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2-\left(1-2\,v^2+\frac{4}{3}\,v^2\,(1+k^2)\right)b\right]z-\frac{4}{3}\,v^2k^2\,sn\,[z]\,cn\,[z]\,dn\,[z]$$

$$+\left[1-2\,v^2+\frac{4}{3}\,v^2\,(1+k^2)\right]\frac{4\,\pi}{K}\,\sin\frac{\pi}{K}\,z\cdot f\left(\cos\frac{\pi}{K}\,z\right);$$

$$p\,\frac{x-x_c}{v}=\left[1-v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2-\left[1-\frac{2}{3}\,v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2\right]b\right]z-\frac{4}{3}\,v^2k^2\,sn\,[z]\,cn\,[z]\,dn\,[z]$$

$$+\left[1-\frac{2}{3}\,v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2\right]\frac{4\,\pi}{K}\,\sin\frac{\pi}{K}\,z\cdot f\left(\cos\frac{\pi}{K}\,z\right).$$

Da $x=0$ und $z=0$ zusammengehörig sind, so ist $x_c=0$, und man hat

Gl. 13)
$$\frac{p}{v}\cdot x=\left[1-v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2-\left(1-\frac{2}{3}\,v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2\right)b\right]z-\frac{4}{3}\,v^2k^2\,sn\,[z]\,cn\,[z]\,dn\,[z]$$

$$+\left[1-\frac{2}{3}\,v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2\right]\frac{4\,\pi}{K}\,\sin\frac{\pi}{K}\,z\cdot f\left(\cos\frac{\pi}{K}\,z\right).$$

Für die Abscisse des Lastangriffspunktes ist $z=K$, also ist

$$\frac{p}{v}\cdot x_a=\left[1-v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2-\left(1-\frac{2}{3}\,v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2\right)b\right]K$$

$$=\left[1-v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2-\left(1-v^2+\frac{1}{3}\,v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2\right)b\right]K$$

$$=\left[\left(1-v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2\right)(1-b)-\frac{1}{3}\,v^2\,b\right]K;$$

$$\frac{1}{v}\cdot x_a=\left[\left(1-v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2\right)(-a)-\frac{1}{3}\,v^2\,b\right]\frac{l}{C_1+\frac{C_2}{2}\,b};$$

Gl. 14)
$$x_a=\frac{v}{C_1+\frac{C_2}{2}\,b}\left[\left(1-v^2+\frac{4}{3}\,v^2k^2\right)(-a)-\frac{1}{3}\,v^2\,b\right]l.$$

Ehe weitergegangen wird, soll kontrolliert werden, ob die bis hierher gefundenen Formeln mit $v^2=0$ und $\omega^2=0$ in die Formeln des zweiten Falles übergehen.

Wenn $v^2=0$ und $\omega^2=0$ ist, so ist auch $\lambda^2=0$, und es ist $C_1=1$, $C_2=0$.

Damit wird Gl. 10 zu $s=\frac{1}{p}\,z;\quad z=ps.$

Gl. 11 wird zu $y=-2\,\frac{k}{p}\,cn\,[ps]$.

Gl. 13 wird zu

$$\frac{p}{v}\,x=[1-b]\,ps+\frac{4\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right]\right),$$

d. h. da $v=1$ wird,

$$x=-\,as+\frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right]\right).$$

Gl. 9 wird zu $K=pl$.

Gl. 12 wird zu $\delta=\frac{2\,k}{p}$.

Gl. 14 wird zu $x_a=-\,al$.

Es gehen also thatsächlich die Formeln über in die entsprechenden Formeln des zweiten Falles.

Sollen in einem gegebenen Falle z. B. für den Lastangriffspunkt δ und x_a gerechnet werden, so wird man zuerst in Gl. 9 drei zusammengehörige Werte K, k und q einsetzen und dies so lange wiederholen, bis die Gleichung zum Stimmen gebracht ist; es wird hierbei K nicht sehr verschieden von pl sein.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Hat man so durch Probieren K; k und q bestimmt, dann hat man aus Gleichung 12 $\delta = 2\frac{k}{p}\frac{1-\omega^2}{C_1}$.

Um für das Stabende v zu berechnen, kann man etwa in die Formel

$$v_z = C_1 + \frac{C_2}{2}b - \frac{C_2}{2}\frac{4\pi^2}{K^2}\left[\cos\left[\frac{\pi}{K}z\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}z\right]\right) - \sin^2\left[\frac{\pi}{K}z\right]\cdot f'\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}z\right]\right)\right]$$

der Reihe nach

$$z = 0;\quad z = 1\frac{K}{m};\quad z = 2\frac{K}{m};\quad z = 3\frac{K}{m};\quad \ldots. z = m\frac{K}{m}$$

einsetzen und hat angenähert $v = \frac{\sum_0^m v_z}{m+1}$.

Ist v berechnet, dann hat man aus Gleichung 14

$$x_a = \frac{v}{C_1 + \frac{C_2}{2}b}\left[-a\left(1 - v^2 + \frac{4}{3}v^2k^2\right) - \frac{1}{3}v^2 b\right] l,$$

und zwar haben a und b die auf Seite 5 angegebenen Bedeutungen.

Vorliegende Untersuchung wird ihre hauptsächliche Anwendung finden bei der Bestimmung der Grenze, bis zu welcher die geradlinige Gleichgewichtsfigur der Figur 44 stabil ist. Diese geradlinige Gleichgewichtsfigur ist stabil, so lange keine Gleichgewichtsfigur möglich ist, bei der $\delta > 0$ ist. An der Grenze der Stabilität ist $\delta = 0$.

Wenn aber $\delta = 0$ ist, so ist nach Gleichung 12 $k = 0$; zu diesem Werte von k gehören aber die Werte

$$K = \frac{\pi}{2};\quad q = 0;\quad b = 0;\quad f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}z\right]\right) = 0 \text{ und } f'\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}z\right]\right) = 0.$$

Dann lautet die Gleichung 9

$$\frac{\pi}{2} = pl\frac{1}{C_1};\quad \frac{\pi}{2} = \frac{pl}{1-\omega^2+\frac{\lambda^2}{2}} = \frac{pl}{1-\omega^2+\frac{v^2}{2}+\frac{\omega^2}{2}} = \frac{pl}{1+\frac{v^2}{2}-\frac{\omega^2}{2}} = \frac{pl}{1-\frac{1}{2}(\omega^2-v^2)}.$$

Es ist aber mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}(\omega^2-v^2)} = 1 + \frac{1}{2}(\omega^2-v^2) = \sqrt{1+(\omega^2-v^2)},\text{ also ist } \frac{\pi}{2} = pl\sqrt{1+(\omega^2-v^2)};$$

$$p = \frac{\pi}{2l\sqrt{1+(\omega^2-v^2)}};\quad p^2 = \frac{\pi^2}{4l^2(1+\omega^2-v^2)};\quad P = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2(1+\omega^2-v^2)}.$$

Es ist also die geradlinige Gleichgewichtsfigur der Figur 44 stabil, wenn

$$P <= \frac{1}{4}\frac{\pi^2 EJ}{l^2(1+\omega^2-v^2)}.$$

Anmerkung. Wenn $k = 0$ ist, so ist $v = C_1$ und $-a = 1$, und man hat $x_a = (1-v^2)l$; $x_a = \left(1 - \frac{P}{EF}\right)l$, wie sein muss, denn der Stab ist durch die Druckkraft P um $\frac{P}{EF}l$ gekürzt.

Man findet in der Litteratur der neueren Zeit verschiedene Aufsätze, in welchen unter Berücksichtigung der Normalkraft und des Momentes diejenige Grösse von P ermittelt wird, bei der die geradlinige Gleichgewichtsfigur aufhört stabil zu sein; die Querkraft wird aber dabei vernachlässigt. Mit Hilfe obiger Formel soll gezeigt werden, dass erwähnte Autoren der Wahrheit näher geblieben wären, wenn sie auch die Normalkraft vernachlässigt hätten.

Nach Definition ist $\omega^2 = \frac{P}{\beta GF}$; $v^2 = \frac{P}{EF}$. Nun ist (vergl. Grashof: »Theorie der Elasticität und Festigkeit« 2. Aufl. S. 30) im Mittel $G = \frac{2}{5}E$, und nach Bach: »Elasticität und Festigkeit« 1. Aufl.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

S. 284 u. 287 ist für den rechteckigen Querschnitt $\beta = \frac{5}{6} = \frac{25}{30}$ und für den Kreisquerschnitt $\beta = \frac{27}{32}$. Nimmt man als Beispiel $\beta = \frac{5}{6}$, so ist $\frac{1}{\beta G} = \frac{1}{\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} E} = \frac{3}{E}$, und man hat $\nu^2 = \frac{P}{EF}$; $\omega^2 = 3 \frac{P}{EF}$.

Bezeichnet man $\frac{P}{EF}$ mit ε_0, dann ist somit die Bedingung der Stabilität

$$P <= \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EJ}{l^2 (1 + 2 \varepsilon_0)},$$

wenn Moment, Normal- und Querkraft berücksichtigt werden.

Wird nur das Moment berücksichtigt, dann ist mit $\nu^2 = 0$ und $\omega^2 = 0$ die Bedingung der Stabilität

$$P_1 <= \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Werden nur Moment und Normalkraft berücksichtigt, dann ist die Bedingung der Stabilität, weil $\omega^2 = 0$ ist,

$$P_2 <= \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EJ}{l^2 (1 - \varepsilon_0)}.$$

Es ist also Grenze $P_2 >$ Grenze $P_1 >$ Grenze P.

Wäre nicht ε_0 im Vergleich zu 1 in den Fällen der Anwendung so klein, so wäre bei allen Stäben die geradlinige Gleichgewichtsfigur labil, bei welchen die Kraft P die Grenze

$$P_1 = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \text{ oder gar } P_2 = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EJ}{l^2 (1 - \varepsilon_0)}$$

erreicht, denn sie hört schon auf stabil zu sein, wenn $P = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EJ}{l^2 (1 + 2 \varepsilon_0)}$ ist.

Da aber ε_0 von so kleiner Grösse ist, ist es rechnerisch ganz gleichgiltig, nach welcher Formel man rechnet, um so mehr, als der Wert von E schwankt, und man doch zur Sicherheit nur einen Bruchteil der Grenzbelastung zulässt.

Die Grenze der Stabilität der geradlinigen Gleichgewichtsfigur

$$P <= \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EJ}{l^2 (1 + \omega^2 - \nu^2)}$$

lässt sich auch folgendermassen schreiben

$$P <= \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EJ}{l^2 \left(1 + \frac{P}{F}\left(\frac{1}{\beta G} - \frac{1}{E}\right)\right)}; \quad P <= \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EJ}{l^2 \left(1 + \frac{P}{EF}\left(\frac{5}{2\beta} - 1\right)\right)},$$

worin β ein mit der Querschnittsfigur wechselnder Koeffizient ist, also hängt die Grenze von P nicht nur von der Grösse des Trägheitsmomentes und der Querschnittsfläche, sondern auch von der Querschnittsfigur ab.

Zur Vervollständigung soll noch untersucht werden, ob und wo bei der elastischen Linie, in welcher alle drei deformierende Einflüsse berücksichtigt sind, eine zur Einspannung normale Tangente vorhanden ist. Dies ist der Fall, wenn $\frac{dy}{dx} = \infty$, d. h. wenn $dx = 0$ ist.

Nun ist nach Seite 51

$$\frac{p}{v} dx = \{1 - \nu^2 - 2(1 - 2\nu^2) k^2 sn^2[z] - 4 \nu^2 k^4 sn^4[z]\} dz,$$

es muss also, wenn $2 k^2 sn^2[z] = \xi$ gesetzt wird, $1 - \nu^2 - (1 - 2\nu^2)\xi - \nu^2 \xi^2 = 0$ sein;

$$\xi^2 + \frac{1 - 2\nu^2}{\nu^2} \xi - \frac{1 - \nu^2}{\nu^2} = 0; \quad \xi = -\frac{1 - 2\nu^2}{2\nu^2} \pm \sqrt{\frac{(1 - 2\nu^2)^2}{4\nu^4} + \frac{1 - \nu^2}{\nu^2}} = \frac{-1 + 2\nu^2 \pm 1}{2\nu^2}.$$

Von den beiden Vorzeichen ist dasjenige zu nehmen, welches dem ξ einen positiven Wert giebt, weil dieses gleich einem Quadrate ist, also ist $\xi = \frac{-1 + 2\nu^2 + 1}{2\nu^2} = 1$; $2 k^2 sn^2[z] = 1$; $k = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot sn[z]}$.

Der kleinste Wert, den k annehmen kann, ist $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ entsprechend $sn\,[z] = 1$; $z = K$, und zwar ist hier, weil $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, $K = 1{,}854080$, und b ist gleich $0{,}543066$ (vergl. Seite 19). Für diese Werte wird $C_1 = 1 - \omega^2 + \frac{\lambda^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \omega^2 + \frac{\lambda^2}{4}$; $C_2\,b = \left(2\,\omega^2 - \frac{\lambda^2}{2}\right) 0{,}543066$ oder angenähert $= \left(2\,\omega^2 - \frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{2} = \omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}$, also ist $C_1 + \frac{C_2}{2}\,b = 1 - \omega^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\omega^2}{2} - \frac{\lambda^2}{8}$;

$$C_1 + \frac{C_2}{2}\,b = 1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\lambda^2}{8} = 1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\nu^2}{8} + \frac{\omega^2}{8} = 1 + \frac{\nu^2}{8} - 3\,\frac{\omega^2}{8},$$

und Gl. 9 wird zu $1{,}854080 = pl\,\frac{1}{1 + \frac{\nu^2}{8} - 3\,\frac{\omega^2}{8}}$;

$$l = \frac{1{,}854080}{p}\left(1 + \frac{\nu^2}{8} - 3\,\frac{\omega^2}{8}\right).$$

Dies ist die kleinste Stablänge, bei der eine zur Kraft P normale Tangente möglich ist.

Aus der allgemeinen Beziehung $2\,k^2\,sn^2\,[z] = 1$ folgt $sn\,[z] = \frac{1}{k\sqrt{2}}$; $z = \arg sn\left[\frac{1}{k\sqrt{2}}\right]$.

Setzt man diesen Wert von z in die Gleichungen 10, 11 und 13 ein, so erhält man s, y und x des Berührungspunktes der zu P normalen Tangente.

Es ist Seite 46 schon erwähnt worden, dass bei Berücksichtigung der Querkraft die Anfangstangente im allgemeinen nicht die Richtung der Einspannung hat, sondern mit derselben einen gewissen Winkel bildet. Ist der Stab nun wie beim ersten Fall normal zur Kraft P eingespannt, so ist der Winkelunterschied zwischen der Anfangstangente und der Richtung der Einspannung

$$\vartheta = \frac{A}{\beta\,GF} = \frac{P}{\beta\,GF} = \omega^2.$$

Man hat sich nämlich die Einspannung, wie folgt, vorzustellen:

1. wenn die Querkraft nicht berücksichtigt ist, nach Figur 52;
2. wenn die Querkraft allein berücksichtigt ist, nach Figur 53;
3. wenn Moment und Querkraft berücksichtigt sind, nach Figur 54.

Der Unterschied zwischen der elastischen Linie einschliesslich des eingespannten Stückes bei Berücksichtigung des Momentes allein und derjenigen bei Berücksichtigung des Momentes und der Querkraft besteht darin, dass erstere an der Stelle, wo sie die Einspannung verlässt, keine Eigentümlichkeit aufweist, während letztere dort eine Spitze hat.

Wird nun gefragt, wann die elastische Linie, welche unter Berücksichtigung aller drei deformierenden Einflüsse für den nach dem zweiten Fall belasteten Stab sich ergeben hat, Stücke enthält, die mit der entsprechenden elastischen Linie des ersten Falles übereinstimmen, so hat man zu untersuchen, ob die betreffende elastische Linie einen Winkel φ von der Grösse $90 + \vartheta$ enthält, wie dies in der Figur 55 dargestellt ist.

Ist ein Winkel von dieser Grösse vorhanden, so ist $\cos\varphi = \cos(90 + \vartheta) = -\sin\vartheta$ oder mit genügender Annäherung

$$\cos\varphi = -\vartheta = -\omega^2; \quad 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = -\omega^2; \quad 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 + \omega^2; \quad \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \omega^2}{2};$$

$$k^2\,sn^2\,[z] = \frac{1 + \omega^2}{2}; \quad k = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{2}\,sn\,[z]}.$$

Der grösste Wert den $sn\,[z]$ annehmen kann ist 1, also ist der kleinste Wert von k, bei dem die Einspannung nach dem ersten Falle anfängt möglich zu sein, $k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \omega^2}$, in Übereinstimmung mit Gleichung D Seite 29, wenn $\sin\varepsilon = \omega^2$ und $x_a^{\urcorner} = 0$ gesetzt wird.

Aus der allgemeinen Beziehung

$$k^2\,sn^2\,[z] = \frac{1 + \omega^2}{2} \text{ folgt } sn\,[z] = \frac{1}{k\sqrt{2}}\sqrt{1 + \omega^2}; \quad z = \arg sn\left[\frac{1}{k\sqrt{2}}\sqrt{1 + \omega^2}\right].$$

Setzt man diesen Wert von s in die Gleichungen 10, 11 und 13 ein, so erhält man s_1, y_1 und x_1 des Punktes der elastischen Linie des Falles 2, welcher der Einspannungspunkt ist der gesuchten elastischen Linie des Falles 1. Durch zweckentsprechende Umformung des Koordinatensystemes können die Gleichungen für den ersten Fall aus denjenigen des zweiten Falles erhalten werden. Ist insbesondere l die Stablänge beim zweiten Falle und l_1 die Stablänge beim ersten Falle, so ist

$$l_1 = l - s_1 ,$$

welche Gleichung dazu dienen kann, aus den übrigen Gleichungen die dem Problem fremde Grösse l zu eliminieren.

Schlussbemerkung.

Vorstehende Entwickelungen sind nicht geeignet, in der Praxis eine direkte Anwendung zu finden. Sie sollen vielmehr nur zur Aufklärung des Wesens der behandelten Vorgänge beitragen. Bei den Deformationen wirklicher Stäbe spielen vielerlei Einflüsse mit, die unmöglich in theoretischen Formeln berücksichtigt werden können, sondern nur in solchen Formeln zum Ausdruck kommen, welche auf experimentellem Wege erhalten worden sind.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Baden-Württemberg