Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie

Ludwig, Walther

1904

§ 7. Schlußbemerkungen

urn:nbn:de:bsz:31-270270

Die von Herrn Scheffers für die euklidische Geometrie angegebene Konstruktion der Transformation $\mathfrak{Z}$ folgt aus der obigen, wenn man davon Gebrauch macht, daß die Hauptgerade c die Potenzlinie je zweier entsprechender Kreise ist.

§ 7. Schlußbemerkungen.

Wir haben in den letzten beiden Paragraphen gefunden, daß sich von den fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise in der parabolischen Geometrie die mit imaginärem Hauptkreis und in der elliptischen Geometrie die mit ausartendem Hauptkreis nicht mit Hilfe der im ersten Abschnitt behandelten Punktverwandtschaften aus je einer Dilatation oder $\mathfrak{Z}$-Transformation ableiten lassen; dagegen kann man sie nach § 4, Abs. 3 aus je zwei von diesen zusammensetzen. Der Grund dazu liegt in dem folgenden Satze, der sich aus dem analogen in § 3, Abs. 4 ergibt:

Durch die Aufeinanderfolge zweier von unseren Berührungstransformationen der Kreise entsteht eine Transformation, die wieder in zwei ebensolche zerfällt.

Unsere Transformationen bilden nach diesem Satze eine Gruppe, und diese umfaßt gerade so viele Transformationen, wie die der $\mathfrak{C}$-Transformationen bei gegebener Grundkugel Φ; das aber sind ∞^{10}, da jede der ∞^6 Kollineationen der Kugel Φ in sich zusammen mit jeder der ∞^4 Homologien, deren Zentrum und Hauptebene i. Bez. auf Φ polar sind, eine Kollineation $\mathfrak{C}$ ergibt, die eine Transformation $\mathfrak{C}$ bestimmt. Also haben wir:

Die in dieser Arbeit behandelten Punkt- und Berührungstransformationen der Kreise bilden in jeder der drei ebenen Geometrien eine zehngliedrige Gruppe.

Nun hat Lie[1]) nachgewiesen, daß die Berührungstransformationen der Kreise auf einer Kugel eine zehngliedrige

[1]) Lie-Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, S. 165, Theorem 5.

Gruppe bilden; folglich erzeugen die von uns gefundenen 𝔈-Transformationen alle Berührungstransformationen der Kreise auf der Grundkugel Φ, und hierdurch rechtfertigen sich die von uns in § 1, Abs. 1 dieses Abschnittes gemachten, engen Voraussetzungen. Wir haben also die sämtlichen Berührungstransformationen der Kreise in allen drei ebenen Geometrien aufgestellt und dabei den Satz gefunden:

Die Berührungstransformationen der Kreise sind in der parabolischen Geometrie höchstens zweideutige, in der hyperbolischen und elliptischen Geometrie höchstens vierdeutige algebraische Transformationen.
