Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie

Ludwig, Walther

1904

§ 6. Die fundamentalen Berührungstransformationen [...]

urn:nbn:de:bsz:31-270270

In allen drei Geometrien ist durch eine Dilatation jedem Punkt der Kreis zugeordnet, der um ihn mit einem Radius von einer für die ganze Dilatation konstanten Länge r geschlagen ist; einem Kreise entsprechen zwei mit ihm konzentrische Kreise, deren Radien um r kleiner und größer sind, als der seine, bzw. wenn es sich um einen Kreis der hyperbolischen Geometrie mit uneigentlichem Mittelpunkt handelt, zwei Kreise mit derselben Mittellinie wie er und einem um r größeren und kleineren Abstand von dieser.

Ein Unterschied besteht jedoch:

In der parabolischen Geometrie entsprechen einer Geraden die zwei im Abstand r zu ihr gezogenen Parallelen; in den beiden anderen Geometrien ist dagegen einer Geraden der Kreis zugeordnet, der sie zur Mittellinie hat und die von ihr um r entfernten Punkte trägt.

Fassen wir in der parabolischen Geometrie die unendlich ferne Gerade von σ als die Punktkurve des ausgearteten absoluten Kegelschnittes auf, so können wir sagen:

In der Dilatation ist der absolute Kegelschnitt der Hauptkreis, und seine Punkte entsprechen in allen drei Geometrien je sich selbst.

§ 6. Die fundamentalen Berührungstransformationen „$\mathfrak{Z}$“ der Kreise.

1. Wir wenden uns jetzt zu der zweiten einfachen Art der fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise, die entsteht, wenn man das Projektionszentrum S auf der Hauptebene γ^* der Transformation $\mathfrak{E}_0$ annimmt; sie ist von Herrn Scheffers für die euklidische Geometrie aufgestellt und mit dem Buchstaben $\mathfrak{Z}$ bezeichnet worden; deshalb wählen auch wir diesen Buchstaben zu ihrer Benennung. Die Transformation $\mathfrak{E}_0$ muß im parabolischen und elliptischen Fall dem schneidenden Typus angehören, während sie im hyperbolischen Fall keiner Beschränkung unterliegt; das heißt:

In der hyperbolischen Geometrie lassen sich alle fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise, in der para-

bolischen und elliptischen aber nur die mit reellem Hauptkreis aus den $\mathfrak{Z}$-Transformationen mit Hilfe der im ersten Abschnitt behandelten Punktverwandtschaften herleiten.

Das Bild C des Zentrums C^* der $\mathfrak{E}_0$ nennen wir das *Zentrum* und die Schnittlinie $c \equiv \overline{\sigma\gamma^*}$ *die Hauptgerade der Transformation* $\mathfrak{Z}$, die aus $\mathfrak{E}_0$ in σ folgt; c ist das stets reelle Bild des Schnittkreises von γ^* mit der Kugel Φ und tritt an die Stelle des Hauptkreises der allgemeinen Fundamentaltransformation. Die durch C laufenden und zu c senkrechten Geraden nennen wir *die Durchmesser* der Transformation $\mathfrak{Z}$. Da nun durch $\mathfrak{E}_0$ die Ebenen, die durch S gehen, unter einander vertauscht werden, und da die in ihnen befindlichen Kreise der Kugel Φ in σ die geraden Linien zu Bildern haben, entsprechen jeder Geraden von σ vermöge $\mathfrak{Z}$ involutorisch wieder zwei Gerade:

Mit jeder Transformation $\mathfrak{Z}$ ist eine involutorische zweideutige Verwandtschaft der Geraden der Ebene verbunden.

Durch $\mathfrak{E}_0$ werden die aus S an Φ gehenden Tangenten unter sich vertauscht; da sie in σ die absoluten (unendlich fernen) Punkte einschneiden, so haben wir:

Durchläuft in der parabolischen oder hyperbolischen Geometrie eine Gerade einen Parallelenbüschel, so beschreiben die beiden ihr durch $\mathfrak{Z}$ zugeordneten Geraden zwei dazu projektive Büschel von parallelen Linien.

Diese Verwandtschaft zwischen den Geraden der Ebene ist ja nur der Schnitt von σ mit der im Ebenenbündel (S) vermöge $\mathfrak{E}_0$ bestehenden Ebenentransformation; die letztere aber ist der $\mathfrak{E}_0$ genau analog, wenn man nur an die Stelle der Flächen Φ und Φ' die an sie aus S kommenden Tangentialkegel und an die Stelle der mit $\mathfrak{E}$, verbundenen Homologie $\mathfrak{C}_0$ die durch sie im Ebenenbündel (S) erzeugte Homologie setzt, deren Hauptstrahl $\overline{SC^*}$ und deren Hauptebene γ^* ist. Nennen wir den Umriß von Φ' den *Fluchtkreis* der in σ bestehenden Transformation $\mathfrak{Z}$, so folgt hieraus für diese:

Mit jeder Transformation 𝔍 ist eine Homologie 𝔥 verbunden, die mit 𝔍 das Zentrum C und die Hauptgerade c gemeinsam hat und den Tangenten des absoluten Kegelschnittes in derselben Weise wie 𝔍 die Tangenten des Fluchtkreises zuordnet, dessen Mittelpunkt C und dessen Mittellinie c ist.

Wir können jetzt die in § 2 angegebenen Konstruktionen für die 𝔈-Transformationen genau auf die Geradenverwandtschaft der 𝔍 übertragen. So erhalten wir:[1])

Die einer Geraden g durch 𝔍 zugeordneten Geraden g_1', g_2' *findet man folgendermaßen: 1. Man sucht die der g durch 𝔥 zugeordnete Gerade* g'', *schneidet sie mit dem Fluchtkreis, legt an ihn in den Schnittpunkten die Tangenten und verbindet die Punkte, in denen diese den absoluten Kegelschnitt treffen, durch die beiden Geraden, die durch den Schnittpunkt von g mit c laufen; das sind die esuchten Geraden* g_1', g_2'.

Oder: 2. Man sucht die der g im absoluten Polarsystem konjugierte Gerade l des Strahlenbüschels (cg), nimmt die diesen beiden Geraden durch 𝔥 zugeordneten Geraden g'' *und m und konstruiert endlich die der m im absoluten Polarsystem konjugierte Gerade n desselben Strahlenbüschels (cg); dann sind* g_1', g_2' *die Doppelstrahlen der durch die Paare c,* g'' *und m, n bestimmten Involution.*

2. In der hyperbolischen Geometrie ist die erste Konstruktion anwendbar, denn der absolute Kegelschnitt und der Fluchtkreis sind reell und der letztere ist ein eigentlicher Kreis; man kann sie auch, wie leicht zu zeigen ist, mit nur eigentlichen Elementen durchführen. Hier zeigt die Transformation 𝔍 drei Typen, je nachdem ihr Zentrum C ein eigentlicher oder ein uneigentlicher Punkt ist oder auf dem absoluten Kegelschnitt liegt; die ersten beiden Typen können wir als den *„zentralen"* und den *„axialen"* bezeichnen; den letzten Typus, der hinsichtlich seiner Durchmesser von den andern abweicht, aber sehr einfach ist, wollen wir im folgenden stillschweigend ausschließen.

---

1) Siehe Fig. 4.

In der elliptischen Geometrie verliert die erste Konstruktion ihre Brauchbarkeit, da der absolute Kegelschnitt und der Fluchtkreis imaginär sind, und in der parabolischen Geometrie sogar ihre Geltung, da die beiden Kegelschnitte in Punktepaare ausarten. Hier ist die zweite Konstruktion allein anzuwenden; zu bemerken ist, daß *in der parabolischen Geometrie das Zentrum der Transformation $\mathfrak{Z}$ ein unendlich ferner Punkt und die Homologie $\mathfrak{H}$ eine Affinität ist, deren Affinitätsstrahlen senkrecht zur Hauptgeraden stehen.* Aber die Konstruktion versagt für die Durchmesser der Transformation $\mathfrak{Z}$, wie das analoge ja auch bei der Transformation $\mathfrak{C}$ in § 2, Abs. 2 eintrat. Erinnern wir uns des dort gesagten, so haben wir: Die Ebenen, die in der $\mathfrak{C}_0$ den durch ihr Zentrum C^* gehenden Ebenen entsprechen, umhüllen eine Fläche II. Grades, die Φ ebenfalls längs des in der Hauptebene γ^* befindlichen Kreises berührt; diese Fläche trägt, wenn $\mathfrak{C}_0$ zum schneidenden Typus gehört, reelle Geraden, nämlich die Tangenten von Φ, die den durch C^* laufenden zugeordnet sind, und ist deshalb ein Hyperboloid, das außerhalb von Φ liegt; sie ist, wenn $\mathfrak{C}_0$ zum nicht schneidenden Typus gehört, ein Ellipsoid, und zwar, da ihre Berührungsebenen nach unserer Voraussetzung über $\mathfrak{C}_0$ die Φ schneiden müssen, ein im Innern von Φ gelegenes; also hat sie, aus einem Punkt S von γ^* auf σ projiziert, immer einen reellen, zum Fluchtkreis konzentrischen Umrißkreis, und diesen, den wir den *„Hilfskreis“* nennen, berühren die Geraden von σ, die den Durchmessern der Transformation $\mathfrak{Z}$ zugeordnet sind. In der parabolischen Geometrie entartet der Hilfskreis in ein reelles, zu c symmetrisches Punktepaar der unendlich fernen Geraden; daraus folgt:

Die einem Durchmesser d einer Transformation $\mathfrak{Z}$ entsprechenden Geraden laufen in der parabolischen Geometrie durch den Schnittpunkt von d mit der Hauptgeraden c und bilden mit d einen der Transformation charakteristischen Winkel (dessen Größe wir später bestimmen werden).

Für die anderen beiden Geometrien dagegen gilt:

Die einem Durchmesser d einer Transformation $\mathfrak{Z}$ entsprechenden Geraden sind in der elliptischen und hyperbolischen Geometrie die Tangenten des Hilfskreises, die ihn in seinen Schnittpunkten mit dem zu d senkrechten Durchmesser berühren und durch den Schnittpunkt von d mit der Hauptgeraden c laufen.

Hier ergibt sich nun ein Zusammenhang mit unseren Untersuchungen über die Inversion der hyperbolischen Geometrie in § 3 des ersten Abschnittes: Unser jetziger Hilfskreis steht zum absoluten Kegelschnitt und zum Fluchtkreis genau in demselben Verhältnis, wie dort der erste Hilfskreis zum absoluten Kegelschnitt und zum Hauptkreis der Inversion; also kann er genau so konstruiert werden wie dort, auch wenn, wie in der elliptischen Geometrie, nur die Polarsysteme der in Frage kommenden Kegelschnitte gegeben sind; und die durch $\mathfrak{Z}$ einem Durchmesser d zugeordneten Geraden sind genau so zu konstruieren wie dort die zu einem Durchmesser der Inversion gehörigen Geraden i. — Entsprechend den Eigenschaften der nichteuklidischen Kreise können wir auch hier sagen, daß die einem Durchmesser d durch $\mathfrak{Z}$ zugeordneten beiden Geraden mit ihm einen gewissen Winkel bilden, bzw. mit ihm ein gemeinsames Lot von gewisser Länge haben; beide Größen werden durch dasselbe Doppelverhältnis ϱ gemessen, das den Radius des Hilfskreises definiert, und dieses können wir durch das der Homologie $\mathfrak{H}$ charakteristische Doppelverhältnis $\varkappa$ ausdrücken: Sind nämlich U_1, U_2 die Schnittpunkte des Durchmessers d mit dem absoluten Kegelschnitt, F einer seiner Schnittpunkte mit dem Fluchtkreis und D sein Schnittpunkt mit der Hauptgeraden c, so wird etwa $\varkappa = (DCU_1F)$ sein, und es folgt mit Hilfe derselben Umrechnung, wie wir sie im § 3, Abs. 2 des ersten Abschnittes mit dem Doppelverhältnis $(V_1 V_2 U_1 H_1^*)$ vorgenommen haben, daß

$$(U_1 U_2 CF) = \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}$$

ist; aus der Beziehung zwischen dem Hilfskreis und dem

Fluchtkreis ergibt sich ferner, daß für die ihre Radien messenden Doppelverhältnisse ϱ und $(U_1 U_2 CF)$ die Gleichung

$$\varrho = \left(\frac{\sqrt{(U_1\, U_2\, CF)} + 1}{\sqrt{(U_1\, U_2\, CF)} - 1}\right)^2$$

gilt; hiernach ist

$$\varrho = \frac{(1 + \sqrt{1 - \varkappa^2})^2}{\varkappa^2}.$$

3. Wir haben die Durchmesser der Transformation $\mathfrak{Z}$ so eingehend behandelt, weil sie uns für die Konstruktion der Kreise, die einem Punkt oder Kreis entsprechen, ein bequemes Hilfsmittel bieten werden, und wenden uns jetzt zu den Punkten und Kreisen selbst. Was zunächst die Vieldeutigkeit der Transformationen $\mathfrak{Z}$ betrifft, so gelten genau dieselben Überlegungen wie bei der Dilatation; denn eine fundamentale Transformation $\mathfrak{E}_0$ der Ebenen des Raumes wird auch durch die Anwendung einer involutorischen Homologie nicht geändert, deren Zentrum in der Hauptebene γ^* von $\mathfrak{E}_0$ liegt und deren Hauptebene die i. Bez. auf die Grundkugel Φ genommene Polarebene ihres Zentrums ist. Das heißt:

Eine Transformation $\mathfrak{Z}$ ordnet in allen drei Geometrien involutorisch jedem Punkt einen Kreis und jedem Kreis zwei Kreise zu.

Wir fügen hinzu:

Die Punkte der Hauptgeraden von $\mathfrak{Z}$ entsprechen je sich selbst. Dem absoluten Kegelschnitt ist nur ein Kreis, der Fluchtkreis, zugeordnet. Die mit dem Fluchtkreis konzentrischen Kreise werden untereinander vertauscht.

Da sich je zwei in $\mathfrak{E}_0$ zusammengehörige Ebenen auf der Hauptebene γ^* schneiden, liegen ihre i. Bez. auf Φ genommenen Pole auf derselben Geraden, die durch das Zentrum C^* geht; bei der Projektion aus S nun werden in σ die Bilder der Pole die Mittelpunkte der Kreise, die die Bilder der in jenen Ebenen befindlichen Kugelkreise sind, und ihre Verbindungslinie wird ein Durchmesser von $\mathfrak{Z}$; also haben wir:

Je zwei in einer Transformation $\mathfrak{Z}$ korrespondierenden Kreise haben ihre Mittelpunkte auf demselben Durchmesser der Transformation.

Wir sehen ferner:

Die Kreise der Kreisbüschel, denen die Hauptgerade angehört, werden durch $\mathfrak{Z}$ unter einander vertauscht.

Daraus folgt für die parabolische Geometrie:

Die Hauptgerade einer Transformation $\mathfrak{Z}$ ist in der parabolischen Ebene die Potenzlinie je zweier zusammengeordneter Kreise.

Für die beiden nicht-parabolischen Geometrien aber müssen wir über die Kreisbüschel noch folgendes bemerken: Zwei reelle oder imaginäre Punkte M, N der Ebene sind die Grundpunkte zweier Kreisbüschel; die Kreise jedes Büschels haben ihre Mittelpunkte auf einer bestimmten zu $\overline{MN}$ im absoluten Polarsystem konjugierten Geraden, und diese beiden Geraden schneiden in $\overline{MN}$ die beiden im absoluten Polarsystem konjugierten und durch M und N harmonisch getrennten Punkte ein. Dies ergibt sich daraus, daß M und N die Bilder von vier Punkten M_1, M_2, N_1, N_2 der Kugel Φ sind, daß die Kreise, die in der Ebene durch M und N gehen, die Bilder der Kugelkreise sind, die durch M_1 und N_1, oder durch M_1 und N_2, oder durch M_2 und N_1, oder durch M_2 und N_2 laufen, und endlich, daß die Pole der durch $\overline{M_1 N_1}$ und der durch $\overline{M_2 N_2}$ gehenden Ebenen einerseits und die Pole der durch $\overline{M_1 N_2}$ und der durch $\overline{M_2 N_1}$ gehenden Ebenen andererseits je in der einen von zwei Ebenen liegen, die durch das Projektionszentrum S laufen, i. Bez. auf Φ zur Ebene (SMN) und untereinander konjugiert sind und durch M, N harmonisch getrennt werden. Wenn M und N imaginär sind, enthält nur der eine der durch sie bestimmten Kreisbüschel reelle Kreise; wenn sie in einen Punkt zusammenfallen, geht der eine Kreisbüschel über in den Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Punkt ist.

Zwischen den Punkten der Ebene und den Mittelpunkten der ihnen vermöge $\mathfrak{Z}$ entsprechenden Kreise haben wir eine eindeutige Zuordnung, in der je zwei entsprechende Punkte auf demselben Durchmesser der $\mathfrak{Z}$ liegen; sie ist das Bild der Zuordnung zwischen den Punkten der Grundkugel Φ und den Polen der Ebenen, die den Punkten von Φ vermöge $\mathfrak{C}_0$ entsprechen und somit die ihnen zugeordneten Kreise aus Φ ausschneiden; diese Zuordnung wieder entsteht aus der mit $\mathfrak{C}_0$ verbundenen Homologie $\mathfrak{C}_0$ durch Anwendung des Polarsystems von Φ und ist, wie in § 4 gezeigt wurde, die inverse Homologie $\mathfrak{C}_0^{-1}$. Daraus folgt:

Die Zuordnung zwischen den Punkten der parabolischen, elliptischen oder hyperbolischen Ebene und den Mittelpunkten der Kreise, die ihnen in einer Transformation $\mathfrak{Z}$ entsprechen, ist eine Homologie, nämlich die inverse der mit $\mathfrak{Z}$ verbundenen Homologie $\mathfrak{H}$.

Wir können jetzt nachholen, was wir in Aussicht gestellt haben, nämlich *die Bestimmung des charakteristischen Winkels ω der Transformation $\mathfrak{Z}$ in der parabolischen Geometrie*: $\mathfrak{H}$ ist hier eine Affinität; entspricht in ihr dem Punkte X' der Punkt X und schneidet die Gerade $d \equiv \overline{XX'}$ die Hauptgerade c in D, so ist $\varkappa$ der konstante Wert des Streckenverhältnisses $\frac{DX'}{DX}$; X' ist der Mittelpunkt des dem X zugeordneten Kreises und der Winkel ω der Winkel, den die aus D an diesen Kreis gelegten Tangenten mit d bilden; da ferner c die Potenzlinie von X und dem ihm zugeordneten Kreis ist, folgt leicht, daß

$$\cos \omega = \frac{DX}{DX'} = \frac{1}{\varkappa}$$

ist.

4. Nunmehr haben wir die Mittel an der Hand, um mannigfaltige Konstruktionen für die $\mathfrak{Z}$-Transformationen abzuleiten; am einfachsten scheinen die folgenden zu sein:

In allen drei Geometrien findet man den einem Punkt X durch eine Transformation $\mathfrak{Z}$ zugeordneten Kreis folgendermaßen: Man lege durch X den Durchmesser d der Transformation und suche auf ihm den Punkt X' auf, dem der

X in der mit $\mathfrak{Z}$ verbundenen Homologie $\mathfrak{H}$ entspricht; ferner nehme man die eine der zu d vermöge $\mathfrak{Z}$ gehörigen Geraden und schlage um X' den Kreis, der diese berührt; das ist der gesuchte Kreis.

Im Falle der hyperbolischen Geometrie ist dabei zu beachten, daß X' ein uneigentlicher Punkt ist, sobald X außerhalb des Fluchtkreises liegt; dann konstruiert man den dem X zugeordneten Kreis mit Hilfe seiner Mittellinie, die der i. Bez. auf den Fluchtkreis genommenen Polare von X in $\mathfrak{H}^{-1}$ entspricht.

Zu einer Geraden g findet man die entsprechenden g_1', g_2', *indem man zu einem ihrer Punkte den zugehörigen Kreis konstruiert und an diesen entweder in seinen Schnittpunkten mit seinem zu g senkrechten Durchmesser — oder aus dem Schnittpunkt von g mit der Hauptgeraden c die Tangenten legt.*

Zu einem Kreise $\mathfrak{k}$ *konstruiert man die entsprechenden* $\mathfrak{k}_1'$, $\mathfrak{k}_2'$ *folgendermaßen: Man nimmt einen Punkt T von* $\mathfrak{k}$ *und die zugehörige Tangente t und sucht den dem T entsprechenden Kreis* τ' *und die der t entsprechenden Geraden* t_1', t_2'; *da* t_1' *und* t_2' *den Kreis* τ' *in denselben Punkten berühren, in denen es* $\mathfrak{k}_1'$ *und* $\mathfrak{k}_2'$ *tun, errichtet man in diesen Punkten die Senkrechten auf* t_1' *und* t_2' *und schneidet sie mit dem Durchmesser d der Transformation* $\mathfrak{Z}$, *der durch den Mittelpunkt von* $\mathfrak{k}$ *geht; die Schnittpunkte sind die Mittelpunkte von* $\mathfrak{k}_1'$ *und* $\mathfrak{k}_2'$. *Besonders einfach wird die Konstruktion dadurch, daß man als t einen Durchmesser der Transformation* $\mathfrak{Z}$ *wählt; aber es gibt nicht in allen Fällen reelle Durchmesser, die einen Kreis* $\mathfrak{k}$ *berühren.*

In der hyperbolischen Geometrie ist wieder zu beachten, daß die Kreise $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1'$, $\mathfrak{k}_2'$ uneigentliche Mittelpunkte haben können: Ist der Mittelpunkt von $\mathfrak{k}$ ein uneigentlicher Punkt, so ist d derjenige Durchmesser der Transformation, der auf der Mittellinie von $\mathfrak{k}$ senkrecht steht; hat z. B. $\mathfrak{k}_1'$ einen uneigentlichen Mittelpunkt, so ist seine Mittellinie das gemeinsame Lot von d und der oben auf t_1' errichteten Senkrechten.

Die von Herrn Scheffers für die euklidische Geometrie angegebene Konstruktion der Transformation $\mathfrak{Z}$ folgt aus der obigen, wenn man davon Gebrauch macht, daß die Hauptgerade c die Potenzlinie je zweier entsprechender Kreise ist.

§ 7. Schlußbemerkungen.

Wir haben in den letzten beiden Paragraphen gefunden, daß sich von den fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise in der parabolischen Geometrie die mit imaginärem Hauptkreis und in der elliptischen Geometrie die mit ausartendem Hauptkreis nicht mit Hilfe der im ersten Abschnitt behandelten Punktverwandtschaften aus je einer Dilatation oder $\mathfrak{Z}$-Transformation ableiten lassen; dagegen kann man sie nach § 4, Abs. 3 aus je zwei von diesen zusammensetzen. Der Grund dazu liegt in dem folgenden Satze, der sich aus dem analogen in § 3, Abs. 4 ergibt:

Durch die Aufeinanderfolge zweier von unseren Berührungstransformationen der Kreise entsteht eine Transformation, die wieder in zwei ebensolche zerfällt.

Unsere Transformationen bilden nach diesem Satze eine Gruppe, und diese umfaßt gerade so viele Transformationen, wie die der $\mathfrak{C}$-Transformationen bei gegebener Grundkugel Φ; das aber sind ∞^{10}, da jede der ∞^6 Kollineationen der Kugel Φ in sich zusammen mit jeder der ∞^4 Homologien, deren Zentrum und Hauptebene i. Bez. auf Φ polar sind, eine Kollineation $\mathfrak{C}$ ergibt, die eine Transformation $\mathfrak{C}$ bestimmt. Also haben wir:

Die in dieser Arbeit behandelten Punkt- und Berührungstransformationen der Kreise bilden in jeder der drei ebenen Geometrien eine zehngliedrige Gruppe.

Nun hat Lie[1]) nachgewiesen, daß die Berührungstransformationen der Kreise auf einer Kugel eine zehngliedrige

[1]) Lie-Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, S. 165, Theorem 5.