Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie

Ludwig, Walther

1904

§ 5. Die ebenen Berührungstransformationen der Kreise [...]

urn:nbn:de:bsz:31-270270

$\mathfrak{E}_0$; wir können daher bei ihnen drei Typen unterscheiden, die wir, des kurzen Ausdrucks wegen, als den *„schneidenden"*, den *„nicht schneidenden"* und den *„berührenden"* Typus bezeichnen wollen. Durch eine reelle Kollineation der Grundkugel in sich kann man jede Transformation $\mathfrak{E}_0$ in jede desselben Typus, nicht aber in eine eines anderen Typus überführen. Dagegen läßt sich das letztere in folgender Weise auf reellem Wege erreichen: Seien z. B. eine fundamentale Transformation $\mathfrak{E}_0$ vom schneidenden und eine fundamentale Transformation $\mathfrak{E}_0{}^{\mathrm{I}}$ vom nicht schneidenden Typus gegeben, so fügen wir, um die erste aus der zweiten zu erhalten, zu dieser eine fundamentale Transformation $\mathfrak{E}_0{}^{\mathrm{II}}$, die etwa auch vom nicht schneidenden Typus, aber so gewählt ist, daß die Flächen Φ'_{I} und Φ'_{II}, in die Φ durch $\mathfrak{E}_0{}^{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{E}_0{}^{\mathrm{II}}$ übergeht, mindestens einen *reellen* Tangentialkegel gemeinsam haben; dann zerfällt nach den Ergebnissen des § 3, Abs. 3 die Transformation $(\mathfrak{E}_0{}^{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{E}_0{}^{\mathrm{II}})$ in zwei, i. A. nicht fundamentale Transformationen, von denen mindestens eine, $\mathfrak{E}_1$, die Grundkugel Φ in eine sie reell berührende Fläche Φ_1' verwandelt; zu $\mathfrak{E}_1$ gehören aber zwei fundamentale Transformationen vom schneidenden Typus, die aus ihr nach § 4, Abs. 1 durch Hinzufügung von zwei gewissen Kollineationen der Grundkugel in sich folgen, und jede dieser fundamentalen Transformationen kann durch Anwendung einer ebensolchen Kollineation in die gegebene $\mathfrak{E}_0$ übergeführt werden.

§ 5. Die ebenen Berührungstransformationen der Kreise. Die Dilatation.

1. Wir haben die Transformationen $\mathfrak{E}$ aufgestellt, um zunächst die einfachsten Berührungstransformationen der Kreise auf der Kugel Φ zu finden; projizieren wir dann wieder die Kugel Φ aus einem Punkte S auf eine Ebene σ und nehmen den Umriß zum absoluten Kegelschnitt der Maßgeometrie in σ, so erhalten wir die einfachsten Berührungstransformationen der Kreise der in σ herrschenden Geometrie. Diese können wir nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen sämtlich mit Hilfe der im ersten Abschnitt be-

handelten Punkttransformationen aus den *„fundamentalen Berührungstransformationen“* ableiten, die aus den fundamentalen $\mathfrak{C}$-Transformationen folgen; deshalb werden wir uns nur mit den fundamentalen Berührungstransformationen beschäftigen. Wir können von ihnen sofort das folgende aussagen:

Die fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise sind sämtlich involutorisch.

Um reelle Transformationen zu erhalten, nehmen wir nur *solche Transformationen $\mathfrak{C}_0$, bei denen die reelle Fläche Φ' im Innern von Φ liegt;* denn nur dann entspricht einem reellen Punkt von Φ immer ein reeller Kreis, und nur dann geht jeder reelle Kreis in zwei ebenfalls reelle Kreise über; die charakteristische Konstante $\varkappa$ der mit $\mathfrak{C}_0$ verbundenen Homologie $\mathfrak{C}_0$ muß deshalb, wenn $\mathfrak{C}_0$ zum schneidenden Typus gehört, die Bedingung

$$|\varkappa| > 1$$

und, wenn $\mathfrak{C}_0$ zum nichtschneidenden Typus gehört, die Bedingung

$$|\varkappa| < 1$$

erfüllen.

2. Auch die fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise zerfallen, gemäß dem Verhalten der fundamentalen $\mathfrak{C}$-Transformationen, in drei Typen: Bezeichnen wir als den *„Hauptkreis“* einer fundamentalen Berührungstransformation das Bild des Kreises von Φ, der in der Hauptebene der zugehörigen $\mathfrak{C}_0$ liegt, so unterscheiden sich die drei Typen dadurch, daß der erste einen reellen, der zweite einen imaginären und der dritte einen in ein imaginäres Punktepaar ausartenden Hauptkreis besitzt. Ferner gibt es unter ihnen zwei besonders einfache Arten von Transformationen, die entstehen, wenn das Projektionszentrum S entweder im Zentrum C^* oder auf der Hauptebene γ^* der projizierten $\mathfrak{C}_0$ gewählt wird; die erste Art ist die der *Dilatationen* und soll zuerst behandelt werden:

Im Falle der parabolischen Geometrie muß $\mathfrak{E}_0$ vom berührenden, im hyperbolischen Falle vom schneidenden, im elliptischen Falle vom nichtschneidenden Typus sein, wenn man eine Dilatation erzeugen will; hieraus folgt:

Mit Hilfe der im ersten Abschnitt untersuchten Punktverwandtschaften lassen sich in der parabolischen Geometrie alle fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise, die einen zerfallenden Hauptkreis haben, in der hyperbolischen Geometrie die mit reellem Hauptkreis, in der elliptischen Geometrie die mit imaginärem Hauptkreis aus den Dilatationen ableiten.

In der parabolischen Geometrie entsprechen vermöge einer Dilatation jedem Kreis zwei Kreise, die zusammenfallen, wenn der erste Kreis ein Punkt ist; denn die stereographische Projektion der Kugel auf die Ebene ist umkehrbar eindeutig. In den beiden anderen Geometrien gilt dasselbe, und zwar aus folgendem Grunde: Je zwei Punkte oder Kreise von Φ geben in σ dasselbe Bild, wenn sie in der involutorischen Homologie gepaart sind, die C^* zum Zentrum und γ^* zur Hauptebene hat; diese involutorische Homologie aber läßt, auf die mit $\mathfrak{E}_0$ verbundene Homologie $\mathfrak{C}_0$ angewendet, diese und somit auch $\mathfrak{E}_0$ selbst ungeändert; also haben die vier Kreise der Kugel, die zwei in σ dasselbe Bild gebenden Kreisen in $\mathfrak{E}_0$ entsprechen, in σ nur zwei Bildkreise. — Nehmen wir nun irgend einen Kreis von Φ, dessen Ebene ε sei, so wird der Mittelpunkt seines Bildkreises in σ eingeschnitten durch denjenigen Strahl aus $S \equiv C^*$, der zu der Schnittgeraden $\overline{\varepsilon\gamma^*}$ i. Bez. auf Φ polar ist; es gehen aber die Ebenen, die der ε in $\mathfrak{E}_0$ entsprechen, ebenfalls durch $\overline{\varepsilon\gamma^*}$; also sind jedem Kreis von σ zwei mit ihm konzentrische Kreise zugeordnet. Insbesondere gehört zu einem Punkt P von σ ein Kreis π', dessen Mittelpunkt er ist; läßt man P einen Kreis ε durchlaufen, so bilden die zugehörigen Kreise π' ein System, dessen Enveloppe in die beiden dem ε entsprechenden und mit ihm konzentrischen Kreise zerfällt; daraus folgt sofort:

In allen drei Geometrien ist durch eine Dilatation jedem Punkt der Kreis zugeordnet, der um ihn mit einem Radius von einer für die ganze Dilatation konstanten Länge r geschlagen ist; einem Kreise entsprechen zwei mit ihm konzentrische Kreise, deren Radien um r kleiner und größer sind, als der seine, bzw. wenn es sich um einen Kreis der hyperbolischen Geometrie mit uneigentlichem Mittelpunkt handelt, zwei Kreise mit derselben Mittellinie wie er und einem um r größeren und kleineren Abstand von dieser.

Ein Unterschied besteht jedoch:

In der parabolischen Geometrie entsprechen einer Geraden die zwei im Abstand r zu ihr gezogenen Parallelen; in den beiden anderen Geometrien ist dagegen einer Geraden der Kreis zugeordnet, der sie zur Mittellinie hat und die von ihr um r entfernten Punkte trägt.

Fassen wir in der parabolischen Geometrie die unendlich ferne Gerade von σ als die Punktkurve des ausgearteten absoluten Kegelschnittes auf, so können wir sagen:

In der Dilatation ist der absolute Kegelschnitt der Hauptkreis, und seine Punkte entsprechen in allen drei Geometrien je sich selbst.

§ 6. Die fundamentalen Berührungstransformationen „$\mathfrak{Z}$" der Kreise.

1. Wir wenden uns jetzt zu der zweiten einfachen Art der fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise, die entsteht, wenn man das Projektionszentrum S auf der Hauptebene γ^* der Transformation $\mathfrak{C}_0$ annimmt; sie ist von Herrn Scheffers für die euklidische Geometrie aufgestellt und mit dem Buchstaben $\mathfrak{Z}$ bezeichnet worden; deshalb wählen auch wir diesen Buchstaben zu ihrer Benennung. Die Transformation $\mathfrak{C}_0$ muß im parabolischen und elliptischen Fall dem schneidenden Typus angehören, während sie im hyperbolischen Fall keiner Beschränkung unterliegt; das heißt:

In der hyperbolischen Geometrie lassen sich alle fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise, in der para-