Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie

Ludwig, Walther

1904

§ 4. Die fundamentalen Transformationen [...]

urn:nbn:de:bsz:31-270270

Läßt man eine Ebene die Berührungsebenen einer Fläche II. Grades durchlaufen, die die Grundkugel der Transformation $\mathfrak{E}$ längs eines Kreises berührt, so durchlaufen die beiden entsprechenden Ebenen dazu kollinear die Tangentialebenen je einer Fläche II. Grades, die die Grundkugel ebenfalls längs eines Kreises berührt.

4. Jetzt kehren wir wieder zu unseren beiden $\mathfrak{E}$-Transformationen $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{E}_{\mathrm{II}}$ zurück: Durch $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$ geht die Grundkugel Φ in $\Phi_{\mathrm{I}}' \equiv X$ über und durch $\mathfrak{E}_{\mathrm{II}}$ wieder X in X_1' und X_2'; die zwischen den Tangentialebenen von Φ und denen von X_1' und X_2' vermöge $(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{E}_{\mathrm{II}})$ bestehende Zuordnung kann nach dem obigen Satze durch zwei Kollineationen, $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, erzeugt werden, und es sind einem Tangentialkegel K von Φ in $(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{E}_{\mathrm{II}})$ dieselben beiden Tangentialkegel K_1' von X_1' und K_2' von X_2' zugeordnet, wie durch $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$; der Ebene ε ferner des Berührungskreises von K entsprechen in $(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{E}_{\mathrm{II}})$ die Ebenen ε_{11}' und ε_{12}' der Kreise, die K_1', und die Ebenen ε_{21}' und ε_{22}' der Kreise, die K_2' in Φ einschneidet. Durch $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ aber sind zwei $\mathfrak{E}$-Transformationen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ bestimmt, in denen der ε gerade dieselben Ebenen ε_{11}' und ε_{12}', bzw. ε_{21}' und ε_{22}' zugehören; folglich zerfällt $(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{E}_{\mathrm{II}})$ in diese beiden Transformationen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$. Wir haben sonach:

Die Transformation, die durch die Aufeinanderfolge zweier, mit derselben Grundkugel behafteten $\mathfrak{E}$-Transformationen entsteht, zerfällt wieder in zwei $\mathfrak{E}$-Transformationen, die ebendieselbe Grundkugel besitzen.

Dieser Satz bedeutet:

Die Transformationen $\mathfrak{E}$ bilden eine Gruppe.

§ 4. Die fundamentalen Transformationen $\mathfrak{E}_0$.

1. Die Kollineation $\mathfrak{C}$, von der eine Transformation $\mathfrak{E}$ abhängt, erzeugt zwischen den Punktreihen der Kreise, die sich auf der Grundkugel Φ in den Hauptebenen ψ und φ' befinden, eine Projektivität, und durch diese sind zwei Kollineationen bestimmt, die Φ in sich selbst überführen,

eine der ersten und eine der zweiten Art; eine von ihnen nennen wir $\mathfrak{D}$. Ferner gibt es immer zwei Homologien, die φ' zur Hauptebene haben und Φ in Φ' verwandeln; ihr Zentrum ist der Pol von φ'. Eine dieser Homologien, $\mathfrak{C}_0$, erhalten wir, wenn wir zuerst $\mathfrak{D}^{-1}$ und dann $\mathfrak{C}$ anwenden; es ist also

$$\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}.$$

Daraus folgt aber sofort der Satz:

Jede Transformation $\mathfrak{E}$ läßt sich auf zwei Weisen zusammensetzen aus einer Kollineation $\mathfrak{D}$ der Grundkugel in sich und aus einer ausgezeichneten Transformation $\mathfrak{E}_0$, die in derselben Weise, wie $\mathfrak{E}$ von der Kollineation $\mathfrak{C}$, von einer Homologie $\mathfrak{C}_0$ abhängt, deren Zentrum und Hauptebene i. Bez. auf Φ polar sind. Es ist

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C}_0, \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}_0,$$

und wir nennen $\mathfrak{E}_0$ eine „fundamentale" $\mathfrak{E}$-Transformation.

2. Seien C^* und γ^* Zentrum und Hauptebene von $\mathfrak{C}_0$, so sind in γ^* die beiden Hauptebenen ψ und φ' des allgemeinen Falles so zusammengefallen, daß die zwischen ihren Feldern durch $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{E}_0$ erzeugte Kollineation zur Identität geworden ist; mithin erzeugen auch $\mathfrak{E}_0^{-1}$ und die sie bestimmende Kollineation $\mathfrak{C}_0^{*-1}$ in γ^* eine Identität, das heißt, $\mathfrak{C}_0^*$ ist auch eine Homologie mit γ^* als Hauptebene. Das Zentrum von $\mathfrak{C}_0^*$ ist ebenfalls C^*, da jede der Ebenen des aus C^* kommenden Tangentialkegels von Φ in $\mathfrak{E}_0$ umkehrbar eindeutig sich selbst entspricht. Da nun, wie am Ende von § 2 bewiesen wurde,

$$\mathfrak{C}_0^* = \mathfrak{R}\mathfrak{C}_0\mathfrak{R}$$

ist, erhalten wir ein Paar sich in $\mathfrak{C}_0^*$ entsprechender Ebenen η, η^0, wenn wir ein Paar in $\mathfrak{C}_0$ zusammengehöriger Ebenen ξ, ξ'' durch die Ebenen ersetzen, die durch ihre gemeinsame Schnittlinie mit γ^* gehen und ihnen im Polarsystem $\mathfrak{R}$ von Φ konjugiert sind. Inzidieren C^* und γ^* nicht, so haben $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_0^*$ je eine charakteristische Konstante $\varkappa$, bzw. $\varkappa^*$, so daß

$$(\gamma^* C^* \mathfrak{x}\mathfrak{x}'') = \varkappa, \quad (\gamma^* C^* \eta\eta^0) = \varkappa^*$$

ist; da aber vermöge des Polarsystems $\mathfrak{N}$

$$(\gamma^* C^* \eta\eta^0) = (C^* \gamma^* \mathfrak{x}\mathfrak{x}'')$$

ist, haben wir

$$\varkappa^* = \frac{1}{\varkappa}$$

und

$$\mathfrak{C}_0{}^{*-1} = \mathfrak{C}_0.$$

Wenn aber C^* und γ^* inzidieren, so besteht infolge von $\mathfrak{C}_0$ in jedem Ebenenbüschel, dessen Axe x in γ^* liegt, eine Projektivität, in der γ^* das einzige Koinzidenzelement ist, und eine solche hat die folgende Eigenschaft: Sind $\mathfrak{x}$ eine Ebene aus (x) und $\mathfrak{x}^0$ und $\mathfrak{x}''$ die ihr in beiderlei Sinn entsprechenden Ebenen, so ist $(\gamma^* \mathfrak{x}\mathfrak{x}^0 \mathfrak{x}'') = -1$. Also sind $\mathfrak{x}^0$ und $\mathfrak{x}''$ im Polarsystem $\mathfrak{N}$ konjugierte Ebenen, wenn $\mathfrak{x}$ die Φ berührt, und vertauschen sich bei Anwendung von $\mathfrak{N}$ unter einander, während γ^* und $\mathfrak{x}$ festbleiben; mithin geht die Projektivität in (x) bei Anwendung von $\mathfrak{N}$ in ihre inverse über, und wir haben auch hier, daß

$$\mathfrak{C}_0{}^{*-1} = \mathfrak{C}_0.$$

Daraus folgt aber, daß wir beide Male genau dieselben Operationen vornehmen müssen, sowohl, wenn wir zu einer Ebene ε die ihr durch $\mathfrak{C}_0$, als auch, wenn wir die ihr durch $\mathfrak{C}_0^{-1}$ zugeordneten Ebenen aufsuchen; das heißt:

Jede der fundamentalen $\mathfrak{C}$-Transformationen $\mathfrak{C}_0$ ist durchweg involutorisch.

Im übrigen kann man die Eigenschaften der allgemeinen $\mathfrak{C}$-Transformationen auf die fundamentalen unmittelbar übertragen; man muß eben nur in Betracht ziehen, daß die beiden Hauptebenen ψ und φ' so zusammengefallen sind, daß aus der zwischen ihren Feldern bestehenden Kollineation eine Identität geworden ist. Die beiden Flächen Ψ und Φ' sind natürlich auch identisch.

3. Je nachdem die Hauptebene γ^* die Grundkugel Φ reell schneidet oder nicht schneidet oder berührt, modifizieren sich die Eigenschaften der fundamentalen Transformationen

$\mathfrak{E}_0$; wir können daher bei ihnen drei Typen unterscheiden, die wir, des kurzen Ausdrucks wegen, als den *„schneidenden"*, den *„nicht schneidenden"* und den *„berührenden"* Typus bezeichnen wollen. Durch eine reelle Kollineation der Grundkugel in sich kann man jede Transformation $\mathfrak{E}_0$ in jede desselben Typus, nicht aber in eine eines anderen Typus überführen. Dagegen läßt sich das letztere in folgender Weise auf reellem Wege erreichen: Seien z. B. eine fundamentale Transformation $\mathfrak{E}_0$ vom schneidenden und eine fundamentale Transformation $\mathfrak{E}_0{}^{\mathrm{I}}$ vom nicht schneidenden Typus gegeben, so fügen wir, um die erste aus der zweiten zu erhalten, zu dieser eine fundamentale Transformation $\mathfrak{E}_0{}^{\mathrm{II}}$, die etwa auch vom nicht schneidenden Typus, aber so gewählt ist, daß die Flächen Φ'_{I} und Φ'_{II}, in die Φ durch $\mathfrak{E}_0{}^{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{E}_0{}^{\mathrm{II}}$ übergeht, mindestens einen *reellen* Tangentialkegel gemeinsam haben; dann zerfällt nach den Ergebnissen des § 3, Abs. 3 die Transformation $(\mathfrak{E}_0{}^{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{E}_0{}^{\mathrm{II}})$ in zwei, i. A. nicht fundamentale Transformationen, von denen mindestens eine, $\mathfrak{E}_1$, die Grundkugel Φ in eine sie reell berührende Fläche Φ_1' verwandelt; zu $\mathfrak{E}_1$ gehören aber zwei fundamentale Transformationen vom schneidenden Typus, die aus ihr nach § 4, Abs. 1 durch Hinzufügung von zwei gewissen Kollineationen der Grundkugel in sich folgen, und jede dieser fundamentalen Transformationen kann durch Anwendung einer ebensolchen Kollineation in die gegebene $\mathfrak{E}_0$ übergeführt werden.

§ 5. Die ebenen Berührungstransformationen der Kreise. Die Dilatation.

1. Wir haben die Transformationen $\mathfrak{E}$ aufgestellt, um zunächst die einfachsten Berührungstransformationen der Kreise auf der Kugel Φ zu finden; projizieren wir dann wieder die Kugel Φ aus einem Punkte S auf eine Ebene σ und nehmen den Umriß zum absoluten Kegelschnitt der Maßgeometrie in σ, so erhalten wir die einfachsten Berührungstransformationen der Kreise der in σ herrschenden Geometrie. Diese können wir nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen sämtlich mit Hilfe der im ersten Abschnitt be-