Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie

Ludwig, Walther

1904

§ 3. Die aus zwei Transformationen [...] folgenden Transformationen

urn:nbn:de:bsz:31-270270

$\mathfrak{E}$ und $(\mathfrak{E}^*\mathfrak{R}\mathfrak{R}')$ dasselbe Resultat ergeben; sie sind deshalb durchweg mit einander identisch:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^*\mathfrak{R}\mathfrak{R}'.$$

Hieraus folgt, da

$$\mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{R},\ \mathfrak{R}'^{-1} = \mathfrak{R}',\ \mathfrak{R}' = \mathfrak{E}^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{E},$$

die Beziehung

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{R}\mathfrak{E}\mathfrak{R},$$

das heißt:

$\mathfrak{E}^*$ ist die vermittelst des Polarsystems von Φ transformierte $\mathfrak{E}$ — und umgekehrt.

Da ferner jeder Ebene, die Φ in einem Punkte der Hauptebene ψ berührt, durch $\mathfrak{E}$ umkehrbar eindeutig eine Ebene zugeordnet ist, die Φ in einem Punkte der Hauptebene φ' berührt, sind die durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^*$ erzeugten Projektivitäten zwischen den Punktreihen der Hauptkreise (ψ) und (φ') zu einander invers, und hieraus folgt:

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^*$ erzeugen zwischen den Feldern der Hauptebenen ψ und φ' zwei inverse Kollineationen.

Zum Schluß heben wir noch den folgenden Satz hervor, der aus den Erörterungen dieses Paragraphen fließt:

Ist die Grundkugel Φ gegeben, so bestimmt jede Kollineation, die Φ in eine sie längs eines Kreises berührende Fläche überführt, eindeutig eine Transformation $\mathfrak{E}$.

§ 3. Die aus zwei Transformationen $\mathfrak{E}$ folgenden Transformationen.

1. Wenn wir von unseren Transformationen $\mathfrak{E}$ zwei, $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{E}_{\mathrm{II}}$, nehmen, die dieselbe Grundkugel Φ besitzen, und zuerst die $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$ und hernach die $\mathfrak{E}_{\mathrm{II}}$ anwenden, so resultiert eine Transformation $(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{E}_{\mathrm{II}})$, die jeder Berührungsebene von Φ zwei und jeder anderen Ebene vier Ebenen zuordnet; auch sie erzeugt auf Φ eine Berührungstransformation der Kreise, und deshalb ist es von Interesse sie zu untersuchen. Auch hierbei wird die Fläche eine besondere Rolle spielen, in die Φ übergeht; es ist das die Fläche, in die durch $\mathfrak{E}_{\mathrm{II}}$ die Fläche Φ'_{I} verwandelt wird, die in der $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$ der

Φ selbst entspricht. Wir haben also zunächst die Frage zu beantworten: Was für eine Fläche X' entspricht in einer Transformation $\mathfrak{E}$ einer Fläche II. Grades X, die die Grundkugel Φ längs eines Kreises berührt?

2. Wir untersuchen zuerst den Torsus K', in den durch $\mathfrak{E}$ ein Berührungskegel von X, also ein Kegel II. Grades K übergeht, der Φ in zwei Punkten berührt. Sei also R' ein beliebiger Punkt, so umhüllen die Ebenen ε, die mindestens eine der ihnen in $\mathfrak{E}$ zugeordneten Ebenen ε_1', ε_2' durch R' schicken, die i. A. nicht ausartende Fläche II. Grades P, in die das Ebenenbündel (R') durch $\mathfrak{E}^{-1}$ verwandelt wird, und zwar geht, wenn die Ebenen ε_1' und ε_2' von einander verschieden sind, immer nur eine von ihnen durch R', da im anderen Fall R' auf ihrer Schnittlinie und somit in der Hauptebene φ' liegen müßte. Also erhalten wir aus den vier Ebenen, die den Klassenflächen K und P gemeinsam sind, gerade vier Berührungsebenen von K' die durch R' laufen; das heißt: K' ist von der IV. Klasse. Da nun K die Grundkugel Φ in zwei Kreisen (α) und (β) schneidet, muß K' sie in den vier Kreisen (α_1'), (α_2'), (β_1'), (β_2') durchsetzen und deshalb in zwei Kegel II. Grades, K_1' und K_2', zerfallen, die Φ ebenfalls je in zwei Punkten berühren. Ferner besteht zwischen dem Tangentenbüschel des Kreises (α) und jedem der Tangentenbüschel der Kreise (α_1') und (α_2') vermöge $\mathfrak{E}$ eine eindeutige Beziehung: Jeder Tangente t von (α) ist eine Tangente t_1' von (α_1') und eine Tangente t_2' von (α_2') derart zugeordnet, daß durch $\mathfrak{E}$ einer jeden Ebene aus t eine Ebene aus t_1' und eine aus t_2' korrespondiert. Diese beiden Beziehungen sind demnach perspektiv zu der durch $\mathfrak{E}$ hervorgerufenen projektiven Beziehung zwischen den Ebenen des Kegels, der die Grundkugel Φ längs (α) berührt, und den Ebenen des ihm durch $\mathfrak{E}$ zugeordneten Tangentialkegels von Φ', der (α_1') und (α_2') in Φ einschneidet, und deshalb ebenfalls projektiv. Hieraus folgt nun der Satz:

Läßt man eine Ebene die Tangentialebenen eines die Grundkugel zweipunktig berührenden Kegels II. Grades *durchlaufen, so bewegen sich die ihr in $\mathfrak{E}$ entsprechenden beiden Ebenen dazu projektiv in den Tangentialebenenbüscheln zweier ebensolchen Kegel.*

3. Unsere Fläche X nun besitzt, da sie Φ längs eines Kreises berührt, lauter Tangentialkegel wie K; zwei davon hat sie mit der Fläche P gemeinsam, die wieder in $\mathfrak{E}^{-1}$ irgend einem Punkte R' entspricht; jeder dieser Kegel geht nach dem vorigen Satze in zwei Kegel über, von denen immer der eine R' zum Scheitel hat; weitere Tangentialebenen der Fläche X' laufen außerhalb jener Kegel nicht durch R', und wir erkennen deshalb, daß X' eine Fläche IV. Klasse ist, die aus jedem Punkt des Raumes einen Tangentialkegel empfängt, der in zwei die Grundkugel je in zwei Punkten berührende Kegel II. Grades zerfällt; daher[1]) besteht X aus zwei Flächen II. Grades, X_1' und X_2', die Φ je längs eines Kreises berühren, und zwar sind *diese Berührungskreise reell oder imaginär, je nachdem X mit der Fläche Ψ, in die Φ durch $\mathfrak{E}^{-1}$ übergeht, reelle oder imaginäre Tangentialkegel gemeinsam hat.* — Nehmen wir nun einen Tangentialkegel K von X, dessen Scheitel in der Hauptebene ψ liegt, so haben die ihm zugeordneten Kegel K_1' und K_2' denselben, in der Hauptebene φ' gelegenen Scheitel und sind die aus diesem Punkt an X_1' und X_2' gehenden Tangentialkegel, etwa K_1' an X_1' und K_2' an X_2'; lassen wir also eine Ebene ε den K durchlaufen, so beschreibt von den entsprechenden Ebenen ε_1' den K_1' und ε_2' den K_2', und hieraus folgt, daß überhaupt von den beiden Ebenen, die einer Berührungsebene von X entsprechen, immer die eine X_1' und die andere X_2' berührt. Mithin besteht zwischen den Tangentialebenen von X einerseits und denen von X_1' sowohl wie von X_2' andererseits eine eindeutige Beziehung; diese beiden Beziehungen müssen aber Kollineationen sein, da nach dem letzten Satz in jeder von ihnen jede zwei sich entsprechenden Tangentialkegel zu einander projektiv sind. Wir haben also:

---

[1]) E. E. Kummer, Crelles Journal, Bd. 64, S. 66—76.

Läßt man eine Ebene die Berührungsebenen einer Fläche II. Grades durchlaufen, die die Grundkugel der Transformation $\mathfrak{E}$ längs eines Kreises berührt, so durchlaufen die beiden entsprechenden Ebenen dazu kollinear die Tangentialebenen je einer Fläche II. Grades, die die Grundkugel ebenfalls längs eines Kreises berührt.

4. Jetzt kehren wir wieder zu unseren beiden $\mathfrak{E}$-Transformationen $\mathfrak{E}_\mathrm{I}$ und $\mathfrak{E}_\mathrm{II}$ zurück: Durch $\mathfrak{E}_\mathrm{I}$ geht die Grundkugel Φ in $\Phi_\mathrm{I}' \equiv X$ über und durch $\mathfrak{E}_\mathrm{II}$ wieder X in X_1' und X_2'; die zwischen den Tangentialebenen von Φ und denen von X_1' und X_2' vermöge $(\mathfrak{E}_\mathrm{I} \cdot \mathfrak{E}_\mathrm{II})$ bestehende Zuordnung kann nach dem obigen Satze durch zwei Kollineationen, $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, erzeugt werden, und es sind einem Tangentialkegel K von Φ in $(\mathfrak{E}_\mathrm{I} \cdot \mathfrak{E}_\mathrm{II})$ dieselben beiden Tangentialkegel K_1' von X_1' und K_2' von X_2' zugeordnet, wie durch $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$; der Ebene ε ferner des Berührungskreises von K entsprechen in $(\mathfrak{E}_\mathrm{I} \cdot \mathfrak{E}_\mathrm{II})$ die Ebenen ε_{11}' und ε_{12}' der Kreise, die K_1', und die Ebenen ε_{21}' und ε_{22}' der Kreise, die K_2' in Φ einschneidet. Durch $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ aber sind zwei $\mathfrak{E}$-Transformationen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ bestimmt, in denen der ε gerade dieselben Ebenen ε_{11}' und ε_{12}', bzw. ε_{21}' und ε_{22}' zugehören; folglich zerfällt $(\mathfrak{E}_\mathrm{I} \cdot \mathfrak{E}_\mathrm{II})$ in diese beiden Transformationen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$. Wir haben sonach:

Die Transformation, die durch die Aufeinanderfolge zweier, mit derselben Grundkugel behafteten $\mathfrak{E}$-Transformationen entsteht, zerfällt wieder in zwei $\mathfrak{E}$-Transformationen, die ebendieselbe Grundkugel besitzen.

Dieser Satz bedeutet:

Die Transformationen $\mathfrak{E}$ bilden eine Gruppe.

§ 4. Die fundamentalen Transformationen $\mathfrak{E}_0$.

1. Die Kollineation $\mathfrak{C}$, von der eine Transformation $\mathfrak{E}$ abhängt, erzeugt zwischen den Punktreihen der Kreise, die sich auf der Grundkugel Φ in den Hauptebenen ψ und φ' befinden, eine Projektivität, und durch diese sind zwei Kollineationen bestimmt, die Φ in sich selbst überführen,