Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie

Ludwig, Walther

1904

§ 2. Konstruktion der Transformation

urn:nbn:de:bsz:31-270270

von ψ und φ' sind, so folgt das analoge für die Ebenen, die durch $\overline{PQ}$ und die durch $\overline{P'\,Q'}$ gehen; wir haben also erstens den Satz:

Ein Ebenenbüschel, dessen Axe in der Hauptebene ψ liegt, wird durch 𝔈 wieder in einen solchen, mit der Axe in φ', übergeführt, und es besteht zwischen den beiden Büscheln eine Korrespondenz [2|2].

Zweitens erkennen wir, daß wir auch *zwischen den Geradenfeldern von ψ und φ' eine umkehrbar eindeutige algebraische Zuordnung haben.* Die beiden Verwandtschaften zwischen den Punktfeldern und zwischen den Geradenfeldern von ψ und φ' stehen offensichtlich in der Beziehung zu einander, daß in ihnen inzidenten Elementen wieder inzidente Elemente entsprechen; daraus folgt:

Durch 𝔈 wird zwischen den Feldern der beiden Hauptebenen ψ und φ' eine Kollineation erzeugt.

§ 2. Konstruktion der Transformation 𝔈.

1. Wir können jetzt an die Beantwortung der dritten im vorigen Paragraphen aufgestellten Frage gehen; und zwar werden wir eine räumliche Kollineation aufweisen, die ebenfalls die durch 𝔈 zwischen den Ebenen der Klassenflächen Φ und Φ' hervorgerufene eindeutige Beziehung erzeugt. Zu diesem Zweck erinnern wir uns, wie wir zu einer Ebene ε die beiden entsprechenden ε_1' und ε_2' gefunden haben: Der zu ε gehörige Tangentialkegel E von Φ ging durch 𝔈 über in einen Tangentialkegel E' von Φ' und dieser schnitt zwei Kreise in Φ ein, deren Ebenen ε_1' und ε_2' waren. E' nun berührt Φ in zwei Punkten, den Durchstoßpunkten der Geraden $\overline{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'}$ durch Φ, und diese liegen auf dem Hauptkreis (φ') der Grundkugel Φ; also haben wir das folgende Resultat, das allerdings schon im vorletzten Satze des vorigen Paragraphen enthalten ist:

Die beiden Ebenen, die durch 𝔈 irgend einer Ebene zugeordnet sind, schneiden sich stets in einer Geraden der Hauptebene φ'.

Die Gerade $g' \equiv \overline{\varepsilon_1' \varphi'} \equiv \overline{\varepsilon_2' \varphi'}$ entspricht in der Kollineation der Felder ψ und φ' der Geraden $g \equiv \overline{\varepsilon \psi}$. Ersichtlich geht durch g' auch die Ebene ε'' des Kegelschnittes, in dem E', die Φ' berührt, und *diese Ebene ε'' ist der Ebene ε eindeutig zugeordnet.* — Drehen wir ε um eine Gerade m, so bewegt sich der Scheitel des Tangentialkegels E auf der i. Bez. auf Φ reziproken Polare von m; da dabei die aus dieser Polare an Φ gehenden Tangentialebenen τ_1, τ_2 festbleiben, bewegt sich der Kegel E' so, daß ihm immer die den Ebenen τ_1, τ_2 zugeordneten beiden Tangentialebenen von Φ' angehören, das heißt so, daß sein Scheitel die Schnittgerade derselben durchläuft. Damit haben wir gezeigt: *Wenn sich ε um eine Gerade m dreht, beschreibt auch ε'' einen Ebenenbüschel* (m''). — Gleichzeitig durchlaufen die beiden Geraden $g \equiv \overline{\varepsilon \psi}$ und $g'' \equiv \overline{\varepsilon'' \varphi'}$ die Strahlenbüschel um die Punkte (m, ψ) und (m'', φ'), die aufeinander durch die Kollineation zwischen ψ φ' projektiv bezogen sind; folglich sind auch die zu ihnen perspektiven *von ε und ε'' beschriebenen Ebenenbüschel* (m) *und* (m'') *projektiv.* Das heißt aber, daß auch *die Beziehung zwischen ε und ε'' eine Kollineation ist.* Diese Kollineation nun führt Φ ebenso in Φ' über, wie es $\mathfrak{E}$ tut; denn, sobald ε die Φ berührt, fallen ε_1', ε_2' und ε'' in dieselbe Berührungsebene von Φ' zusammen. Also ist sie die gesuchte eindeutige Verwandtschaft der Ebenen des Raumes, und wir haben gefunden:

Mit jeder Transformation $\mathfrak{E}$ ist eine Kollineation $\mathfrak{C}$ derart verbunden, daß $\mathfrak{C}$ die Grundkugel Φ in ebendieselbe Fläche Φ' überführt wie $\mathfrak{E}$, und zwar auch in derselben Weise.

Gleichzeitig hat sich der Satz ergeben:

Dreht sich eine Ebene um eine Tangente der Grundkugel, so dreht sich jede der beiden ihr entsprechenden Ebenen dazu projektiv um je eine andere Tangente.

2. Hieraus folgt sofort eine Konstruktion der Transformation $\mathfrak{E}$:

Um die einer Ebene ε vermöge $\mathfrak{E}$ entsprechenden Ebenen ε_1', ε_2' zu konstruieren, nehme man die der ε durch $\mathfrak{C}$ zuge-

ordnete Ebene ε'' und schneide den zu ε'' gehörigen Tangentialkegel von Φ' mit Φ; die Ebenen der beiden erhaltenen Kreise sind ε_1' und ε_2'.[1])

Diese Konstruktion nun können wir ausführen, wenn uns nur die Kollineation $\mathfrak{C}$ und das Polarsystem von Φ gegeben sind; dies werden uns die folgenden Betrachtungen lehren. Erstens nämlich schneidet auf einer Kante k des Tangentialkegels E' der durch Φ und Φ' bestimmte Büschel von Flächen II. Grades eine Involution ein, deren Doppelpunkte der Schnittpunkt von k mit der Hauptebene φ' und der Berührungspunkt von k mit Φ', d. h. der Schnittpunkt von k mit ε'', sind; in dieser Involution bilden die Schnittpunkte von k mit Φ, d. h. mit ε_1' und ε_2', ein Paar, und deshalb ist

$$(\varphi' \, \varepsilon'' \, \varepsilon_1' \, \varepsilon_2') = -1.$$

Zweitens aber geht außer dem Kegel E', dessen Scheitel N sei, durch die beiden Kreise, die Φ in ε_1' und ε_2' hat, noch ein zweiter Kegel II. Grades, dessen Scheitel M dem N im Polarsystem von Φ konjugiert ist und von ihm durch ε_1', ε_2' harmonisch getrennt wird; die Polarebenen μ und ν von M und N verbinden die Gerade $\overline{\varepsilon_1' \varphi'} \equiv \overline{\varepsilon_2' \varphi'}$ bzw. mit N und M, und deshalb ist auch

$$(\mu \, \nu \, \varepsilon_1' \, \varepsilon_2') = -1.$$

μ und ν sind einander im Polarsystem von Φ konjugiert, μ und ε'' aber, da N der i. Bez. auf Φ' genommene Pol von ε'' ist, im Polarsystem von Φ'; ist daher λ die Ebene aus dem Büschel $\overline{\varepsilon\psi}$, die im Polarsystem von Φ der ε konjugiert ist, so ist μ die ihr durch die Kollineation $\mathfrak{C}$ zugeordnete Ebene. Hieraus ergibt sich die folgende Konstruktion:

Um die einer Ebene ε vermöge $\mathfrak{C}$ entsprechenden Ebenen ε_1', ε_2' zu konstruieren, suche man die durch $\overline{\varepsilon\psi}$ gehende und im Polarsystem von Φ der ε konjugierte Ebene λ, nehme die der ε und der λ durch die Kollineation $\mathfrak{C}$ zugeordneten Ebenen ε'' und μ, die sich in einer Geraden von φ' schneiden, und

[1]) Das ebene Analogon dieser Konstruktion siehe in Fig. 4

endlich die durch dieselbe Gerade gehende und zu μ im Polarsystem von Φ konjugierte Ebene ν; dann sind ε_1' und ε_2' die Doppelebenen der Involution, die durch die Ebenenpaare φ', ε'' und μ, ν bestimmt ist.[1])

Die Konstruktion versagt jedoch in zwei Fällen, die wir hier nur angeben wollen, ohne näher auf sie einzugehen. Der erste Fall tritt ein, wenn ε die Hauptebene ψ in einer Tangente von Φ schneidet; denn dann ist λ und folglich auch μ Tangentialebene von Φ und somit ν unbestimmt. Der zweite Fall ist der, daß ε durch den i. Bez. auf Φ genommenen Pol der Hauptebene ψ geht; denn dann wird $\lambda \equiv \psi$ und somit $\mu \equiv \varphi'$, während ε'' und ν beide durch den Pol der Hauptebene φ' laufen und ebenfalls zusammenfallen; die Ebenen ε_1', ε_2', die diesen Ebenen ε entsprechen, umhüllen nach dem früheren eine Fläche II. Grades, die Φ längs des Hauptkreises (φ') berührt.

3. Genau dieselben Betrachtungen können wir mit der inversen Transformation $\mathfrak{C}^{-1}$ anstellen; auch mit ihr ist eine Kollineation verbunden, die wir mit $\mathfrak{C}^{*-1}$ bezeichnen wollen, und es handelt sich darum, den Zusammenhang von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ aufzufinden. $\mathfrak{C}^{*-1}$ nun führt die Grundfläche $\Phi \equiv \Psi'$ in derselben Weise in die Fläche Ψ über, wie $\mathfrak{C}^{-1}$ es tut; einer Ebene ε also, die Ψ berührt, wird umgekehrt durch $\mathfrak{C}^*$ eine Berührungsebene ε_1' von $\Psi' \equiv \Phi$ und durch $\mathfrak{C}$ dieselbe Ebene ε_1' und eine zweite Ebene ε_2' zugeordnet. ε_1' und ε_2' bestimmen aber zusammen mit Φ einen Kegel II. Grades, der seinen Scheitel im Berührungspunkt von ε_1' hat und die Fläche Φ' längs eines Kegelschnittes berührt; die Ebene ε'' dieses Kegelschnittes ist also im Polarsystem $\mathfrak{R}'$ von Φ' die Polarebene desjenigen Punktes von Φ, in dem die durch $\mathfrak{C}^*$ der ε zugeordnete Ebene ε_1' berührt; das heißt: Nennen wir das Polarsystem von Φ $\mathfrak{R}$, so entspricht die ε'' der ε in der Kollineation ($\mathfrak{C}^*\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$). Andererseits aber ist ε'' die der ε durch $\mathfrak{C}$ zugeordnete Ebene; mithin sehen wir, daß bei ihrer Anwendung auf die Ebenen von Ψ die beiden Kollineationen

[1]) Das ebene Analogon siehe wiederum in Fig. 4.

$\mathfrak{E}$ und ($\mathfrak{E}^*\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$) dasselbe Resultat ergeben; sie sind deshalb durchweg mit einander identisch:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^*\mathfrak{R}\mathfrak{R}'.$$

Hieraus folgt, da

$$\mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{R},\ \mathfrak{R}'^{-1} = \mathfrak{R}',\ \mathfrak{R}' = \mathfrak{E}^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{E},$$

die Beziehung

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{R}\mathfrak{E}\mathfrak{R},$$

das heißt:

$\mathfrak{E}^*$ ist die vermittelst des Polarsystems von Φ transformierte $\mathfrak{E}$ — und umgekehrt.

Da ferner jeder Ebene, die Φ in einem Punkte der Hauptebene ψ berührt, durch $\mathfrak{E}$ umkehrbar eindeutig eine Ebene zugeordnet ist, die Φ in einem Punkte der Hauptebene φ' berührt, sind die durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^*$ erzeugten Projektivitäten zwischen den Punktreihen der Hauptkreise (ψ) und (φ') zu einander invers, und hieraus folgt:

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^*$ erzeugen zwischen den Feldern der Hauptebenen ψ und φ' zwei inverse Kollineationen.

Zum Schluß heben wir noch den folgenden Satz hervor, der aus den Erörterungen dieses Paragraphen fließt:

Ist die Grundkugel Φ gegeben, so bestimmt jede Kollineation, die Φ in eine sie längs eines Kreises berührende Fläche überführt, eindeutig eine Transformation $\mathfrak{E}$.

§ 3. Die aus zwei Transformationen $\mathfrak{E}$ folgenden Transformationen.

1. Wenn wir von unseren Transformationen $\mathfrak{E}$ zwei, $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{E}_{\mathrm{II}}$, nehmen, die dieselbe Grundkugel Φ besitzen, und zuerst die $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$ und hernach die $\mathfrak{E}_{\mathrm{II}}$ anwenden, so resultiert eine Transformation ($\mathfrak{E}_{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{E}_{\mathrm{II}}$), die jeder Berührungsebene von Φ zwei und jeder anderen Ebene vier Ebenen zuordnet; auch sie erzeugt auf Φ eine Berührungstransformation der Kreise, und deshalb ist es von Interesse sie zu untersuchen. Auch hierbei wird die Fläche eine besondere Rolle spielen, in die Φ übergeht; es ist das die Fläche, in die durch $\mathfrak{E}_{\mathrm{II}}$ die Fläche Φ'_{I} verwandelt wird, die in der $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$ der