

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

**Projektive Untersuchungen über die
Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie**

Ludwig, Walther

1904

§ 3. Die Inversion der hyperbolischen Geometrie

[urn:nbn:de:bsz:31-270270](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-270270)

sprechender Punkte ist, den Punkt K_1^* in H_1^* , folglich auch den Kegelschnitt ν in μ und überhaupt die ganze zweite Figur in die erste über.

Auf diese Weise können wir auf jedem Durchmesser der Inversion die involutorische Korrespondenz [2] konstruieren; da in einer Ebene mit gegebenem absoluten Kegelschnitt die Punkte U_1, U_2 immer bekannt sind und da die Punkte C, H_1, H_2 durch den Hauptkreis bestimmt sind, ist die ganze Inversion durch ihren Hauptkreis definiert. Wie wir die obige Konstruktion reell ausführen, wenn U_1, U_2 oder H_1, H_2 imaginär sind, wollen wir hier nicht untersuchen, da wir einfachere Konstruktionen ableiten werden; es genügt, folgendes festgestellt zu haben:

Die Inversion der nichteuklidischen Geometrien ist durch ihren Hauptkreis völlig bestimmt; ein Punkt liegt mit den beiden ihm zugeordneten immer auf demselben Durchmesser des Hauptkreises; so entsteht auf jedem Durchmesser d eine involutorische Korrespondenz [2], die zwei Verzweigungspunkte in den Schnittpunkten von d mit dem absoluten Kegelschnitt, zwei Koinzidenzpunkte in den Schnittpunkten von d mit dem Hauptkreis und zwei vereinigte Verzweigungs- und Koinzidenzpunkte im Inversionszentrum hat und die sich aus diesen Elementen konstruieren lässt.

§ 3. Die Inversion der hyperbolischen Geometrie.

1. Für die hyperbolische Geometrie läßt sich unmittelbar aus den Erörterungen des vorigen Paragraphen eine einfache Konstruktion der Inversion herleiten; man nimmt nämlich den absoluten Kegelschnitt selbst bei der Konstruktion der involutorischen Korrespondenz [2] auf jedem Durchmesser zu Hilfe. Also verfährt man bei irgend einem Durchmesser d der Inversion so: Ist P sein absoluter Pol, der auf der Axe c der Inversion liegt und zugleich der Pol von d i. Bez. auf den Hauptkreis ist, und begegnet d der c in D und dem Hauptkreis in H_1 und H_2 , so schneidet man $\overline{PH_1}$ und $\overline{PH_2}$ mit dem absoluten Kegelschnitt in zwei solchen Punkten

H_1^* und H_2^* , daß die Gerade $i \equiv \overline{H_1^* H_2^*}$ durch D läuft; den absoluten Pol J von i macht man zum Zentrum einer Involution auf dem absoluten Kegelschnitt und projiziert diese aus P auf d .¹⁾

Betrachten wir, wie üblich, das Innere des absoluten Kegelschnittes als maßgebend, so sind H_1 und H_2 reell, wenn der Hauptkreis reell, und imaginär, wenn er imaginär ist. Im letzteren Falle ist der Hauptkreis durch sein reelles Polarsystem gegeben; $\overline{PH_1}$ und $\overline{PH_2}$ nun, die ja die aus P an den Hauptkreis gehenden Tangenten sind, sind dann definiert als die Doppelemente der im Strahlenbüschel (P) durch das Polarsystem erzeugten Involution, und i ist definiert als eine der beiden aus D kommenden Geraden, auf denen die infolge des absoluten Polarsystems bestehende Involution perspektiv ist zu der soeben im Strahlenbüschel (P) erwähnten. Wenn also der Hauptkreis imaginär ist, wird man irgend zwei gepaarte Strahlen aus (P), m und n , nehmen, zwischen ihren Punktreihen die projektive Zuordnung der einander im absoluten Polarsystem konjugierten Punkte herstellen und an den durch diese beiden projektiven Punktreihen erzeugten Kegelschnitt (m, n) aus D die Tangenten legen; das sind die gesuchten beiden Geraden, da auf jeder von ihnen die beiden Paare sich in (P) entsprechender Strahlen: \overline{PD} und \overline{PC} , m und n , auch zwei Punktepaare der absoluten Involution einschneiden. Diese Geraden sind immer reell: Der Hauptkreis kann nämlich nur imaginär werden, wenn C im Innern des absoluten Kegelschnittes liegt; denn nur in diesem Falle ist es möglich, daß, wenn wir zu unserer räumlichen Figur zurückkehren, das Homologiezentrum C' im Innern der Kugel Φ liegt und daß somit die Hauptebene γ' die Φ nicht reell schneidet. Dann aber befinden sich P und D außerhalb des absoluten Kegelschnittes, und wir können es so einrichten, daß²⁾ m , zwischen C und D hindurchlaufend, ihn reell schneidet; der absolute Pol M von m wird jetzt

¹⁾ Siehe Fig. 1.

²⁾ Siehe Fig. 2.

auf d zwischen m und D liegen und, da \overline{PC} , \overline{PD} und m , n zwei Paare einer elliptischen Involution sind, auch durch n nicht von D getrennt werden. Das heißt aber, da der Kegelschnitt (m, n) die Geraden m und n in ihren Schnittpunkten mit d berührt, also d in denselben Punkten, in denen m und n es tun, schneidet: D und M sind entweder gleichzeitig innere oder gleichzeitig äußere Punkte in bezug auf (m, n) ; das letztere aber findet statt, da die von M kommenden Tangenten des (m, n) identisch sind mit den von M an den absoluten Kegelschnitt gehenden, nach unserer Wahl von m reellen Tangenten.

2. Wir denken uns nun die Konstruktion von i für einen Durchmesser d ausgeführt; dann können wir diese Figur nach und nach in alle die Figuren verwandeln, die für die anderen Durchmesser nötig sind, wenn wir auf sie nach und nach die Kollineationen anwenden, die das dem absoluten Kegelschnitt und dem Hauptkreis gemeinsame Tangentialdreieck zum Fundamentaldreieck haben¹⁾; denn diese Kollineationen lassen den absoluten Kegelschnitt, C , c und alle Kreise mit dem Mittelpunkt C je in sich selbst übergehen. Daraus folgt, daß die für alle Durchmesser d konstruierten Geraden i einen ganz bestimmten Kreis mit dem Mittelpunkt C berühren; also brauchen wir die Konstruktion von i nur einmal zu machen, um dadurch diesen, wie wir ihn nennen wollen, „ersten Hilfskreis“ zu bestimmen. Doch können wir auch den im hyperbolischen Maßsystem gemessenen Radius des ersten Hilfskreises durch den des Hauptkreises ausdrücken; dazu brauchen wir den folgenden

Hilfssatz: Projiziert man aus einem Punkte T zwei auf einem Kegelschnitt liegende Punkte X^* , Y^* auf die Polare t von T in die Punkte X , Y und schneidet t mit dem Kegelschnitt in den Punkten W_1 , W_2 , so besteht die Doppelverhältnissgleichung:

$$(W_1 W_2 XY) = (W_1 W_2 X^* Y^*)^2.$$

¹⁾ Diese Kollineationen sind die um C ausgeführten Drehungen der hyperbolischen Geometrie und gehören als solche zu den Kreisverwandtschaften.

[Beweis: Die Verbindungslinien von X^* und Y^* bzw. mit den beiden weiteren Schnittpunkten der Strahlen $\overline{TY^*}$ und $\overline{TX^*}$ mit dem Kegelschnitt gehen durch denselben Punkt Z der Geraden t ; daher ist

$$(W_1 W_2 X^* Y^*) = (W_1 W_2 XZ) = (W_1 W_2 ZY)$$

und, da die Identität

$$(W_1 W_2 XY) = (W_1 W_2 XZ) \cdot (W_1 W_2 ZY)$$

gilt,

$$(W_1 W_2 XY) = (W_1 W_2 X^* Y^*)^2.]$$

Es seien nun U_1, U_2 wieder die Schnittpunkte von d und ferner V_1, V_2 diejenigen der Geraden \overline{PC} mit dem absoluten Kegelschnitt, so ist

$$(U_1 U_2 V_1 V_2) = -1,$$

und es folgt durch einfache Umrechnung:

$$(V_1 V_2 U_1 H_1^*) = \frac{(V_1 U_2 U_1 H_1^*)}{(V_2 U_2 U_1 H_1^*)} = \frac{(U_1 U_2 V_1 H_1^*) + 1}{(U_1 U_2 V_1 H_1^*) - 1}$$

als Beziehung zwischen den Doppelverhältnissen der beiden auf dem absoluten Kegelschnitt liegenden Punktwürfe

$$U_1, U_2, V_1, H_1^* \text{ und } V_1, V_2, U_1, H_1^*.$$

Projizieren wir den ersten Punktwurf aus P auf d und den zweiten aus D auf \overline{PC} , so gehen sie über in die Würfe

$$U_1, U_2, C, H_1 \text{ und } V_1, V_2, C, K_1,$$

wobei K_1 der Schnittpunkt von \overline{PC} mit $\overline{DH_1^*} \equiv i$ und somit der Berührungspunkt von i am ersten Hilfskreis ist. Nach unserem Hilfssatz ist nun

$$(V_1 V_2 CK_1) = \left(\frac{V(U_1 U_2 CH_1) + 1}{V(U_1 U_2 CH_1) - 1} \right)^2,$$

und das ist eine Gleichung zwischen den Radien des Haupt- und des Hilfskreises, da dieselben durch die Doppelverhältnisse $(U_1 U_2 CH_1)$ und $(V_1 V_2 CK_1)$ gemessen werden.¹⁾ — Es gibt

¹⁾ Die beiden Kreise fallen zusammen, wenn $(U_1 U_2 CH_1) = 3 + \sqrt{2}$ ist; dann lassen der absolute Kegelschnitt und der Hauptkreis Ponceletsche Vierecke zu.

aber noch eine andere Deutung der letzten Gleichung; bezeichnen wir nämlich mit v_1 und v_2 die aus D kommenden Tangenten $\overline{DV_1}$ und $\overline{DV_2}$ des absoluten Kegelschnittes, so wird durch das mit $(V_1 V_2 CK_1)$ gleiche Doppelverhältnis $(v_1 v_2 d i)$ der Winkel zwischen d und i gemessen; derselbe hat demnach für alle Durchmesser der Inversion denselben Wert und soll kurz „*der Winkel der Inversion*“ heißen. Sein Komplementwinkel, der durch $(v_1 v_2 i c) = -\frac{1}{(v_1 v_2 d i)}$ gemessen wird, ist der Winkel zwischen i und der Inversionsaxe c und ebenfalls konstant, wie es ja sein muß, da i einen Kreis berührt, dessen Mittellinie c ist.

3. Wenn wir nun unsere Konstruktion in der Sprache der nichteuklidischen Geometrie schildern wollen, dürfen wir nur mit „*eigentlichen*“, d. h. im Innern des absoluten Kegelschnittes befindlichen Elementen arbeiten. Wir unterscheiden demnach zwei Arten der Inversion:

Die zentrale Inversion, deren Zentrum ein eigentlicher Punkt ist, und

die axiale Inversion, deren Axe eine eigentliche Gerade ist.

Der Hauptkreis ist ja, falls er reell ist, immer ein eigentlicher Kreis. Bei der zentralen Inversion mit reellem Hauptkreis ist, wie leicht ersichtlich, auch der erste Hilfskreis ein solcher; die eine zu einem Durchmesser d gehörige Gerade i erhalten wir ohne Benutzung des uneigentlichen Punktes D , wenn wir den zu d im absoluten Polarsystem konjugierten Durchmesser \overline{PC} mit dem ersten Hilfskreis schneiden und in einem der Schnittpunkte die Tangente ziehen. Die Involution auf dem absoluten Kegelschnitt endlich ist mit der Spiegelung an der Geraden i identisch. Also können wir sagen:

Hat die zentrale Inversion einen reellen Hauptkreis, so konstruiert man die einem Punkte Y entsprechenden beiden Punkte $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ folgendermaßen: Man legt durch Y den Durchmesser d der Inversion, schneidet den zu ihm senkrechten

Durchmesser mit dem ersten Hilfskreis¹⁾ und zieht in dem einen Schnittpunkt die Tangente i an diesen; an i spiegelt man das in Y auf d errichtete Lot und konstruiert zu der so erhaltenen Geraden die beiden Parallelen, die zu d senkrecht sind; deren Schnittpunkte mit d sind die gesuchten Punkte \mathfrak{Y}_1 und \mathfrak{Y}_2 .

Bei der zentralen Inversion mit imaginärem Hauptkreis ist der erste Hilfskreis kein eigentlicher Kreis, wohl aber der ihm im absoluten Polarsystem zugeordnete, der die Punkte J trägt; diesen, wie wir ihn nennen wollen, „zweiten Hilfskreis“ können wir direkt konstruieren, wenn wir die für den ersten Hilfskreis angegebenen Konstruktionen i. Bez. auf den absoluten Kegelschnitt polarisieren. Wir haben also:

Hat die zentrale Inversion einen imaginären Hauptkreis, so konstruiert man die einem Punkte Y zugeordneten Punkte $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ folgendermaßen: Man legt durch Y den Durchmesser d der Inversion, schneidet den zu ihm senkrechten Durchmesser mit dem zweiten Hilfskreis und spiegelt an dem einen der beiden Schnittpunkte, J , das in Y auf d errichtete Lot; zu der so erhaltenen Geraden zieht man die beiden Parallelen, die zu d senkrecht sind, und hat in den Schnittpunkten derselben mit d die gesuchten Punkte \mathfrak{Y}_1 und \mathfrak{Y}_2 .

Die axiale Inversion hat immer einen reellen Hauptkreis; aber, wie man sich leicht überzeugt, sind beide Hilfskreise uneigentliche Kreise; doch kommt man hier bequem ohne sie aus:

In der axialen Inversion konstruiert man²⁾ zu einem Punkt Y die ihm zugeordneten Punkte $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ folgendermaßen: Man fällt aus Y auf die Axe der Inversion das Lot d , dessen Fußpunkt D sei; dann errichtet man in dem einen Schnittpunkt von d mit dem Hauptkreis wieder das Lot auf d und zieht dazu durch D die eine Parallele i — oder, was dasselbe ist, man legt durch D die eine Gerade i ,

¹⁾ Siehe Seite 13.

²⁾ Siehe Fig. 3.

die mit d „den Winkel der Inversion“ bildet —; an i spiegelt man das in Y auf d errichtete Lot und sucht zu der so erhaltenen Geraden die beiden zugleich auf d senkrechten Parallelen; diese schneiden in d die Punkte \mathfrak{D}_1 und \mathfrak{D}_2 ein.

Bei der axialen Inversion kann der Fall eintreten, daß ihre Axe c den Fluchtkreis vertritt, d. h. daß jedem Punkt der Axe c die beiden unendlich fernen Punkte des durch ihn gehenden Durchmessers d entsprechen; nach der oben angegebenen Konstruktion geschieht das, sobald c durch die Spiegelung an i in d übergeht. Dieser Fall gibt, wie man ohne besondere Mühe zeigen kann, die von Herrn Liebmann „ L -Transformation“ genannte Abart der Inversion.

§ 4. Die Inversion der elliptischen Geometrie.

1. Die in § 2 angegebene Konstruktion der Inversion läßt sich in der elliptischen Ebene, weil dort der absolute Kegelschnitt imaginär ist, nicht so einfach gestalten, wie es in § 3 für die hyperbolische Ebene geschehen ist. Deshalb wollen wir jetzt eine ganz andere Konstruktion der Inversion ableiten, die in der elliptischen Ebene brauchbar ist; sie ist übrigens auch in der hyperbolischen Ebene bei der zentralen Inversion anwendbar. Wir kehren zu dem Ende noch einmal zu der Kugel Φ und zu der auf ihr durch die involutorische Homologie (C', γ') erzeugten Verwandtschaft zurück und setzen dabei voraus, daß die aus dem Projektionszentrum S nach C' gehende Gerade, wie sie es ja im elliptischen Falle tut, die Kugel Φ in zwei reellen Punkten C_1' und C_2' schneidet. Jeder Kreis nun von Φ , der dem durch C_1' und C_2' bestimmten Kreisbüschel $(C_1' C_2')$ angehört, geht durch die Homologie (C', γ') in sich selbst über; ferner sind, wenn t_1' und t_2' zwei beliebige, die Kugel Φ in C_1' , bzw. C_2' berührende und sich auf der Geraden $\gamma'\sigma$ schneidende Tangenten sind, die beiden Ebenenbüschel (t_1') und (t_2') und mit ihnen auch die durch sie in Φ eingeschnittenen Kreisbüschel einander projektiv zugeordnet. Soll nun zu einem Punkt Y' der Kugel der ihm in der Homologie (C', γ') entsprechende

\mathcal{Y}' gefunden werden, so legen wir durch Y' erstens den Kreis $(C_1' C_2' Y')$ aus dem Büschel $(C_1' C_2')$; dann nehmen wir entweder den durch Y' gehenden Kreis aus dem Büschel (t_1') und schneiden den ihm entsprechenden aus dem Büschel (t_2') mit $(C_1' C_2' Y')$ — oder wir nehmen den durch Y' gehenden Kreis aus (t_2') und schneiden den ihm entsprechenden aus (t_1') mit dem Kreise $(C_1' C_2' Y')$; beide Male erhalten wir denselben Punkt \mathcal{Y}' . Wie gestaltet sich das nun, wenn wir die Kugel Φ aus dem Punkte S auf seine Polarebene σ projizieren?

Die Punkte C_1', C_2' gehen in das Zentrum C der Inversion über, der Kreisbüschel $(C_1' C_2')$ in den Durchmesserbüschel und die beiden Kreisbüschel (t_1') und (t_2') in denselben Büschel (t) von Kreisen, die alle einen bestimmten Durchmesser t im Punkte C berühren; da jeder Kreis aus (t) das Bild eines Kreises aus (t_1') und eines aus (t_2') ist, folgt aus der Projektivität zwischen diesen letzten beiden Büscheln, daß infolge der Inversion im Kreisbüschel (t) eine involutorische Korrespondenz [2] herrscht. Ein Punkt Y von σ nun ist das Bild zweier Kugelpunkte Y_1' und Y_2' ; diese bestimmen auf der Kugel vier Kreise, die wir mit

$$(t_1', Y_1'), (t_2', Y_2'), (t_1', Y_2'), (t_2', Y_1')$$

bezeichnen können und von denen immer die ersten beiden und die letzten beiden dasselbe Bild haben; sind ferner \mathcal{Y}_1' und \mathcal{Y}_2' auf der Kugel durch die Homologie (C, γ') den Punkten Y_1' und Y_2' zugeordnet, so entsprechen den oben aufgezählten vier Kreisen der Reihe nach die Kreise

$$(t_2', \mathcal{Y}_1'), (t_1', \mathcal{Y}_2'), (t_2', \mathcal{Y}_2'), (t_1', \mathcal{Y}_1'),$$

die i. A. lauter verschiedene Bilder in σ haben. Da $Y_1', Y_2', \mathcal{Y}_1', \mathcal{Y}_2'$ auf demselben Kreis aus dem Büschel $(C_1' C_2')$ liegen, folgt hieraus: Durch einen Punkt Y von σ gehen zwei Kreise des Büschels (t) ; sowohl die beiden Kreise, die dem einen, als auch die beiden, die dem anderen von ihnen durch die in (t) bestehende involutorische Korrespondenz [2] zugeordnet sind, schneiden in den Durchmesser \overline{CY} die zwei

Punkte \mathfrak{Y}_1 und \mathfrak{Y}_2 ein, die dem Y in der Inversion entsprechen. Können wir also die involutorische Korrespondenz [2] in (t) konstruieren, so können wir zu jedem Punkte Y die Punkte \mathfrak{Y}_1 und \mathfrak{Y}_2 finden, außer wenn Y auf t selbst liegt; in diesem Fall wird man einen anderen, dem Büschel (t) analogen Kreisbüschel zu Hilfe nehmen; aus praktischen Gründen wird man dies schon tun, wenn Y nahe an t liegt.

2. Zu einer Konstruktion der involutorischen Korrespondenz [2] im Büschel (t) gelangen wir folgendermaßen: Ist T der Punkt, in dem t die Axe c der Inversion schneidet, durch den also auch t_1' und t_2' laufen, so gehen durch jede Gerade des Strahlenbüschels (T, γ') zwei einander in der Homologie (C', γ') zugeordnete Ebenen aus den Ebenenbüscheln (t_1') und (t_2') ; hieraus folgt durch die Projektion aus S auf σ , daß jede Gerade des Strahlenbüschels (T, σ) zwei Kreise des Büschels (t) bestimmt, die den Hauptkreis der Inversion in denselben beiden (eventuell imaginären) Punkten wie sie schneiden und die einander in der Inversion zugeordnet sind. Eine solche Gerade aus dem Strahlenbüschel (T, σ) wollen wir eine „Hauptsehne“ der beiden durch sie bestimmten Kreise nennen; jeder Kreis aus (t) besitzt, da er das Bild zweier Kugeln ist, zwei Hauptsehnungen, und diese sind immer reell. Hiernach können wir bereits die Konstruktion der Inversion folgendermaßen schildern:

Ist in der elliptischen Ebene eine Inversion durch ihren Hauptkreis gegeben, so konstruiert man zu einem Punkt Y die beiden zugeordneten Punkte \mathfrak{Y}_1 und \mathfrak{Y}_2 , indem man durch Y und das Zentrum C der Inversion einen Kreis legt und die beiden Kreise aufsucht, die jenen Kreis in C berühren und mit ihm je eine Hauptsehne gemeinsam haben; diese beiden Kreise schneiden \mathfrak{Y}_1 und \mathfrak{Y}_2 in den Durchmesser \overline{CY} ein.

Kehren wir wieder zu unserem Kreisbüschel (t) zurück, so erkennen wir leicht, daß auch die Mittellinie eines jeden Kreises α aus ihm durch den Punkt T geht; denn sie wird in σ eingeschnitten durch die Ebenen der beiden Kugeln

α_1' und α_2' , deren Bild α ist, und diese Ebenen gehen durch t_1' , bzw. t_2' . Da andererseits die Ebenen von α_1' und α_2' in γ' die Geraden einschneiden, deren Bilder die Hauptsehnen von α sind, ergibt sich ohne weiteres der folgende Satz, der die obige Konstruktion vereinfacht:

Ist in der elliptischen Ebene eine Inversion und ein Büschel von Kreisen gegeben, die durch das Inversionszentrum gehen und daselbst eine gemeinsame Tangente t besitzen, so laufen ihre Mittellinien und ihre Hauptsehnen durch denselben Punkt, in dem t die Axe c der Inversion schneidet. In diesem Strahlenbüschel bestehen zwei Projektivitäten derart, dass durch sie jedem Strahl die Hauptsehnen des Kreises zugeordnet sind, dessen Mittellinie er ist, und dass umgekehrt durch die inversen Projektivitäten jedem Strahl die Mittellinien der beiden Kreise zugewiesen werden, deren gemeinsame Hauptsehne er ist. In beiden Projektivitäten sind c und t die Koinzidenzstrahlen.

Um die beiden Projektivitäten völlig zu bestimmen, muß man für jede ein Paar entsprechender Strahlen kennen; es wird sich also darum handeln, für einen beliebigen Kreis α aus dem Büschel (t) die Hauptsehnen zu finden, auch wenn α den Hauptkreis nicht reell schneidet, wenn man von dem Hauptkreis nur sein Polarsystem besitzt. Der Punkt T nun ist als Schnittpunkt zweier gemeinsamer Sehnen der beiden Kreise ein Eckpunkt des ihnen gemeinsamen Polardreiecks; deshalb geht durch ihn der Kegelschnitt, dessen Punkte gleichzeitig in den Polarsystemen beider Kreise den Punkten irgend einer beliebig gewählten Geraden g konjugiert sind. Die Punktreihe des Kegelschnittes und die von g sind durch diese Beziehung zu einander projektiv gemacht; projizieren wir beide aus T , so erhalten wir im Strahlenbüschel (T) eine Projektivität, und von deren Koinzidenzstrahlen trägt jeder außer dem durch T und den Schnittpunkt mit seiner Polare gebildeten Paar in beiden Polarsystemen konjugierter Punkte noch ein zweites; also sind auf jedem der beiden Koinzidenzstrahlen die beiden Involutionen von i. Bez. auf α , bzw.

auf den Hauptkreis konjugierten Punkten identisch; das heißt, jeder dieser Strahlen schneidet κ und den Hauptkreis in denselben beiden Punkten, ist eine Hauptsehne von κ . So können wir die Hauptsehnens von κ auch bei imaginärem Hauptkreis konstruieren; wir brauchen nach dem früheren nicht erst nachzuweisen, daß wir immer zwei reelle Geraden erhalten.

Zweiter Abschnitt.

Die einfachsten Berührungstransformationen, die Kreise in Kreise überführen.

§ 1. Aufstellung der einfachsten Transformationen „ \mathfrak{C} “ der Ebenen des Raumes, die auf einer Kugel eine Berührungstransformation der Kreise erzeugen.

1. Da ein Punkt in der Theorie der Berührungstransformationen als Elementverein aufzufassen ist, wird man, wenn es sich um die Berührungstransformationen der Kreise handelt, jeden Punkt als einen Kreis ansehen müssen. Um recht einfache Verhältnisse zu erhalten, machen wir die

Voraussetzung: Auf einer Kugel Φ bestehe eine algebraische Berührungstransformation \mathfrak{B} , die jedem Punkt einen einzigen Kreis zuordnet, der nicht nebenbei auch noch zu einem anderen Punkte gehört, und die jeden Kreis in eine Kurve überführt, die sich aus lauter Kreisen zusammensetzt; dasselbe verlangen wir von der inversen Transformation \mathfrak{B}^{-1} .

Mit \mathfrak{B} verbunden ist eine algebraische Verwandtschaft \mathfrak{C} zwischen den Ebenen des Raumes, und wir können uns umgekehrt \mathfrak{B} durch \mathfrak{C} erzeugt denken. Da ein Punkt von Φ ein Kreis ist, dessen Ebene Φ berührt, sehen wir:

Die mit \mathfrak{B} verbundene algebraische Ebenenverwandtschaft \mathfrak{C} ordnet jeder Berührungsebene der Kugel Φ eindeutig eine Ebene zu, die nicht nebenbei noch einer anderen Berührungsebene entspricht.