Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie

Ludwig, Walther

1904

§ 2. Die aus der involutorischen Homologie folgenden ebenen [...]

D' zum Zentrum und δ' zur Hauptebene hat. — Die Anzahl der Homologien kann sich in besonderen Fällen vermindern: Erstens kann schon die erste Homologie A in A', B in B', C in C' überführen, nämlich wenn $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ durch einen Punkt laufen. Zweitens kann es möglich werden, die zweite Homologie so zu wählen, daß sie direkt A_1 mit A', B_1 mit B', C_1 mit C' vertauscht, wenn nämlich $\overline{A_1A'}$, $\overline{B_1B'}$, $\overline{C_1C'}$ durch einen Punkt gehen. — Wir haben hier den bekannten Satz gefunden:

Jede reelle Kollineation, die eine Fläche II. Grades in sich selbst überführt, läßt sich aus höchstens vier reellen involutorischen Homologien zusammensetzen.

§ 2. Die aus der involutorischen Homologie folgenden ebenen Kreisverwandtschaften.

1. Wir projizieren die Kugel Φ aus einem Punkte S auf eine Ebene σ, die wir uns der Einfachheit halber als Polarebene von S i. Bez. auf Φ oder, wenn S auf Φ liegt, als Parallelebene zu der in S berührenden Tangentialebene von Φ denken; in σ nehmen wir den Umriß von Φ zum absoluten Kegelschnitt der Maßgeometrie. Dann folgen aus den kollinearen Punktverwandtschaften der Kugel Φ in σ Punktverwandtschaften, die Kreise in Kreise verwandeln, und zwar lassen sie sich sämtlich aus denen unter ihnen zusammensetzen, die durch die Projektion aus den involutorischen Homologien der Kugel entstehen. Wir wollen uns deshalb nur mit diesen besonders einfachen Kreisverwandtschaften beschäftigen.

Es sei also eine involutorische Homologie gegeben, deren Zentrum C' und deren Hauptebene γ' reell und zu einander polar in bezug auf Φ sind. γ' wird entweder Φ reell schneiden oder nicht; dagegen können wir den Fall, daß γ' die Φ berührt, ausschließen, da er eine Ausartung ist, in der alle außerhalb von γ' befindlichen Punkte dem C' entsprechen. Das Projektionszentrum S ferner kann mit C' identisch sein oder in γ' oder an einer beliebigen Stelle des

Raumes liegen: Hieraus ergeben sich die verschiedenen Fälle der aus der Homologie (C', γ') folgenden ebenen Kreisverwandtschaften.

2. Nehmen wir zunächst S auf Φ an, so ergibt sich in σ, wenn S in γ' liegt, die *Spiegelung an einer Geraden,* sonst aber *die Inversion* (Transformation durch reziproke Radien) *der parabolischen Geometrie*; der Hauptkreis der Inversion ist das Bild des reellen oder imaginären Schnittkreises von γ' mit Φ.

Ist S kein Punkt von Φ, so erhalten wir in σ die elliptische oder die hyperbolische Geometrie. Der Fall, daß $S \equiv C'$, ist uninteressant, da er zur *identischen Transformation* führt. Liegt S in γ', so haben wir in σ eine ebene involutorische Homologie, die zum Zentrum das Bild C von C' und zur Hauptgeraden die Schnittlinie $c \equiv \overline{\sigma\gamma'}$ hat; sie führt den absoluten Kegelschnitt in sich selbst über und ist die *Spiegelung der nichteuklidischen Geometrie.* Die Spiegelung findet also in der elliptischen Geometrie immer gleichzeitig an einem Punkt C und an seiner absoluten Polare c statt; in der hyperbolischen Geometrie aber kann man, je nachdem C im Innern des absoluten Kreises liegt oder nicht, je nachdem also C im Sinne der nichteuklidischen Geometrie ein eigentlicher Punkt ist oder nicht, die Spiegelung an einem Punkte und die Spiegelung an einer Geraden unterscheiden; doch sind das nicht von einander unabhängige Arten, da immer aus zwei ebenen involutorischen Homologien, von denen jede ihr Zentrum in der Hauptgeraden der anderen hat, eine involutorische Homologie folgt, deren Zentrum der Schnittpunkt der Hauptgeraden und deren Hauptgerade die Verbindungslinie der Zentren jener beiden sind.

3. Bei allgemeiner Lage des Projektionszentrums S erhalten wir in σ eine Transformation, die der Analogie zur parabolischen Geometrie wegen auch als *Inversion* bezeichnet wird, obwohl sie wesentlich andere Eigenschaften hat als die parabolische Inversion. Sie ist zunächst nicht mehr eindeutig: Ein Punkt Y von σ ist das Bild zweier Kugelpunkte

Y_1', Y_2', und diesen entsprechen in der Homologie (C', γ') zwei Punkte $\mathfrak{Y}_1'$, $\mathfrak{Y}_2'$, die i. A. in σ verschiedene Bilder $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$ haben; $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ nun sind die dem Y in der Inversion zugeordneten Punkte, und umgekehrt findet man, wenn man ihre entsprechenden Punkte in derselben Weise sucht, immer als einen derselben den Punkt Y. Das heißt: *Die nichteuklidische Inversion ist eine durchweg involutorische zweideutige Verwandtschaft.*

Der Bildpunkt C des Homologiezentrums C' ist dadurch ausgezeichnet, daß er mit den beiden ihm entsprechenden Punkten zusammenfällt; er möge *das Zentrum* und seine absolute Polare $c \equiv \overline{\sigma\gamma'}$ *die Axe der Inversion* heißen. — Ein Kreis ferner von σ geht durch die Inversion i. A. in zwei Kreise über, und auch hierbei findet involutorisches Entsprechen statt; die Kreise, die C zum Mittelpunkt und c zur Mittellinie[1]) haben, vertauschen sich untereinander; insbesondere fällt der als *Hauptkreis der Inversion* zu bezeichnende Bildkreis des in γ' befindlichen Kugelkreises mit dem einen der beiden ihm zugeordneten Kreise zusammen. Dem absoluten Kegelschnitt entspricht nur ein Kreis, der *Fluchtkreis.* — Eine Gerade der Ebene σ ist das Bild nur eines Kugelkreises und wird deshalb durch die Inversion in nur einen Kreis verwandelt; insbesondere entsprechen die durch das Zentrum C laufenden Geraden, die wir füglich als *Durchmesser der Inversion* bezeichnen werden, je sich selbst. Also liegt ein Punkt Y mit den beiden ihm in der Inversion zugeordneten Punkten $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ auf demselben Durchmesser; so entsteht auf jedem Durchmesser eine involutorische Korrespondenz [2], von deren Verzweigungs- und Koinzidenzpunkten je zwei in den Punkt C und die anderen beiden in die Schnittpunkte U_1, U_2 des Durchmessers mit dem absoluten Kegelschnitt, bzw. in seine Schnittpunkte H_1, H_2 mit dem Hauptkreis fallen; von diesen fünf singulären Punkten der Korrespondenz ist immer einer durch die vier übrigen be-

[1]) Die Mittellinie eines Kreises ist die Verbindungsgerade seiner beiden Berührungspunkte mit dem absoluten Kegelschnitt; ihr absoluter Pol ist der Mittelpunkt des Kreises.

stimmt, da C der eine Doppelpunkt der durch die Punktepaare U_1, U_2 und H_1, H_2 definierten Involution ist.

4. Die auf einem Durchmesser d der Inversion bestehende involutorische Korrespondenz [2] ist das Bild der vermöge der Homologie (C', γ') herrschenden Involution auf dem Kreise der Kugel Φ, dessen Bild d ist. Diesen Kreis denken wir uns mit seiner ganzen Ebene um d in die Ebene σ heruntergeklappt und haben dann in dieser die folgende Figur[1]): Die durch das Inversionszentrum C gehende Gerade d schneidet den absoluten Kreis in U_1, U_2, den Hauptkreis in H_1, H_2, die Axe c der Inversion in D; durch U_1 und U_2 geht ein Kegelschnitt μ, unser heruntergeklappter Kugelkreis, und auf ihm besteht eine Involution, deren Zentrum J der heruntergeklappte Punkt C' ist; diese Involution wird aus dem i. Bez. auf μ genommenen Pol P von d, dem heruntergeklappten Punkt S, auf die Gerade d projiziert und ergibt auf ihr die Korrespondenz. — Da H_1 und H_2 die Bilder der Doppelpunkte der auf μ bestehenden Involution sind, können wir J folgendermaßen konstruieren: Wir schneiden die Strahlen $\overline{PH_1}$ und $\overline{PH_2}$ mit μ in zwei solchen Punkten $H_1{}^*$ und $H_2{}^*$, daß die Gerade $i \equiv \overline{H_1{}^* H_2{}^*}$ durch D läuft, und suchen ihren Pol J i. Bez. auf μ. Hierbei gibt es zwei Möglichkeiten; aber, da jede von ihnen aus der anderen durch Anwendung der involutorischen Homologie mit P als Zentrum und d als Hauptgerade hervorgeht, liefern beide auf d dieselbe Korrespondenz. — Wir erhalten aber auch stets dieselbe Korrespondenz auf d, wenn wir die analoge Figur mit irgend einem durch U_1 und U_2 laufenden Kegelschnitt ν konstruieren; denn es schneiden sich, wenn Q, $K_1{}^*$ usw. die den Punkten P, $H_1{}^*$ usw. der ersten Figur analogen Punkte sind, $\overline{PH_1{}^*}$ und $\overline{QK_1{}^*}$ im Punkte H_1 von d, und deshalb führt die ebene Homologie, in der der Punkt $(\overline{PQ}, \overline{H_1{}^*K_1{}^*})$ Zentrum, die Gerade d Hauptgerade und das Paar P, Q ein Paar ent-

[1]) Zur Veranschaulichung kann Fig. 1 dienen: Der dortige Kreis AK ist als Kegelschnitt μ zu nehmen.

sprechender Punkte ist, den Punkt K_1^* in H_1^*, folglich auch den Kegelschnitt ν in μ und überhaupt die ganze zweite Figur in die erste über.

Auf diese Weise können wir auf jedem Durchmesser der Inversion die involutorische Korrespondenz [2] konstruieren; da in einer Ebene mit gegebenem absoluten Kegelschnitt die Punkte U_1, U_2 immer bekannt sind und da die Punkte C, H_1, H_2 durch den Hauptkreis bestimmt sind, ist die ganze Inversion durch ihren Hauptkreis definiert. Wie wir die obige Konstruktion reell ausführen, wenn U_1, U_2 oder H_1, H_2 imaginär sind, wollen wir hier nicht untersuchen, da wir einfachere Konstruktionen ableiten werden; es genügt, folgendes festgestellt zu haben:

Die Inversion der nichteuklidischen Geometrien ist durch ihren Hauptkreis völlig bestimmt; ein Punkt liegt mit den beiden ihm zugeordneten immer auf demselben Durchmesser des Hauptkreises; so entsteht auf jedem Durchmesser d eine involutorische Korrespondenz [2], die zwei Verzweigungspunkte in den Schnittpunkten von d mit dem absoluten Kegelschnitt, zwei Koinzidenzpunkte in den Schnittpunkten von d mit dem Hauptkreis und zwei vereinigte Verzweigungs- und Koinzidenzpunkte im Inversionszentrum hat und die sich aus diesen Elementen konstruieren lässt.

§ 3. Die Inversion der hyperbolischen Geometrie.

1. Für die hyperbolische Geometrie läßt sich unmittelbar aus den Erörterungen des vorigen Paragraphen eine einfache Konstruktion der Inversion herleiten; man nimmt nämlich den absoluten Kegelschnitt selbst bei der Konstruktion der involutorischen Korrespondenz [2] auf *jedem* Durchmesser zu Hilfe. Also verfährt man bei irgend einem Durchmesser d der Inversion so: Ist P sein absoluter Pol, der auf der Axe c der Inversion liegt und zugleich der Pol von d i. Bez. auf den Hauptkreis ist, und begegnet d der c in D und dem Hauptkreis in H_1 und H_2, so schneidet man $\overline{PH_1}$ und $\overline{PH_2}$ mit dem absoluten Kegelschnitt in zwei solchen Punkten