Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie

Ludwig, Walther

1904

Erster Abschnitt. Die einfachsten Punktverwandtschaften, die Kreise in Kreise überführen

urn:nbn:de:bsz:31-270270

Erster Abschnitt.

Die einfachsten Punktverwandtschaften, die Kreise in Kreise überführen.

§ I. Die Kollineationen, die eine Kugel in sich selbst verwandeln.

1. Die einfachsten Kreisverwandtschaften der Ebene werden wir aus den einfachsten Kreisverwandtschaften der Kugel erhalten. *Deshalb setzen wir auf einer Kugel Φ eine umkehrbar eindeutige, algebraische Punktverwandtschaft $\mathfrak{P}$ voraus, die jedem Kreis wieder einen Kreis zuordnet*; sie führt die Kreise, die durch zwei feste Punkte gehen, über in die Kreise, die durch die entsprechenden beiden Punkte laufen. Fassen wir die Ebenen der Kreise ins Auge, so erhalten wir durch $\mathfrak{P}$ eine umkehrbar eindeutige Verwandtschaft der Ebenen des Raumes, die jeden Ebenenbüschel wieder in einen Ebenenbüschel überführt, also eine Kollineation; und zwar vertauscht sie die Berührungsebenen von Φ untereinander, da jeder Punkt von Φ als Kreis aufzufassen ist, dessen Ebene die Kugel Φ berührt. Mit dieser Kollineation der Ebenen des Raumes ist eine Kollineation der Punkte des Raumes verbunden, die die Punkte von Φ unter einander vertauscht, und eben diese so erzeugte Verwandtschaft zwischen den Punkten von Φ ist unsere $\mathfrak{P}$. Wir sehen hieraus:

Die umkehrbar eindeutigen Punktverwandtschaften auf einer Kugel, die Kreise in Kreise überführen, werden durch die Kollineationen des Raumes erzeugt, die die Kugel in sich selbst transformieren.

2. Die Kollineationen nun, die eine Fläche II. Grades in sich transformieren, zerfallen bekanntlich[1]) in zwei Arten; durch eine Kollineation der ersten Art wird jede Regelschar der Fläche projektiv auf sich selbst, durch eine Kollineation der zweiten Art projektiv auf die andere Regelschar bezogen; jede Kollineation der ersten Art läßt sich durch eine gerade, jede der zweiten Art durch eine ungerade Anzahl von involutorischen Homologien (Zentralkollineationen) zusammensetzen, bei deren jeder das Homologiezentrum und die Hauptebene in bezug auf die Fläche II. Grades polar sind. Diese Zusammensetzung, auf die es uns hier ankommt, läßt sich unabhängig von den Regelscharen der Fläche, die ja bei unserer Kugel imaginär werden, folgendermaßen ableiten:

Gegeben seien drei Paare entsprechender Punkte A, A'; B, B'; C, C' auf Φ. Dann gibt es zwischen den Feldern der Ebenen $\delta \equiv (ABC)$ und $\delta' \equiv (A'B'C')$ eine Kollineation, die die in ihnen befindlichen Kreise der Kugel so ineinander überführt, daß A und A', B und B', C und C' einander zugeordnet sind; sie ist bestimmt, wenn man zu diesen drei Punktepaaren als viertes noch etwa den Pol der Geraden $\overline{AB}$ i. Bez. auf den in δ gelegenen Kreis und den Pol der Geraden $\overline{A'B'}$ i. Bez. auf den in δ' gelegenen Kreis hinzunimmt. Sind nun in dieser Kollineation X, X' irgend zwei einander entsprechende Punkte und sind ferner D und D' die i. Bez. auf Φ genommenen Pole von δ und δ', so müssen in jeder Kollineation, die Φ so in sich selbst überführt, daß A und A', B und B', C und C' gepaart sind, auch X und X', D und D' Paare entsprechender Punkte sein. Von den unendlich vielen Kollineationen, die durch diese fünf — nicht in allgemeiner Lage befindlichen — Punktepaare be-

[1]) F. Klein, Math. Ann. Bd. 4, S. 412 u. 622. H. G. Zeuthen, Math. Ann. Bd. 18, S. 33 ff. R. Sturm, Math. Ann. Bd. 26, S. 464 ff.

stimmt sind, gibt es zwei, die Φ in sich transformieren; wir erhalten sie, wenn E der eine Schnittpunkt von $\overline{DX}$ mit Φ ist und wenn $\overline{D'X'}$ Φ in E_1' und E_2' schneidet, durch die fünf Punktpaare

$$A, A';\ B, B';\ C, C';\ D, D';\ E, E_1'$$

bezw.

$$A, A';\ B, B';\ C, C';\ D, D';\ E, E_2'$$

und erkennen, daß die eine aus der anderen durch Hinzufügung der involutorischen Homologie entsteht, die D' zum Zentrum und δ' zur Hauptebene hat. Wir finden also:

Sind auf einer Kugel drei Punktepaare gegeben, so gibt es zwei Kollineationen der Kugel in sich, in denen diese Punktepaare Paare entsprechender Punkte sind; jede dieser Kollineationen lässt sich aus der anderen durch Hinzufügung einer involutorischen Homologie ableiten.

3. Diese beiden Kollineationen nun bauen wir in folgender Weise aus involutorischen Homologien auf, deren Zentrum und Hauptebene reell und i. Bez. auf Φ polar sind: Zuerst nehmen wir eine der Homologien, deren Zentren die Scheitel der beiden Kegel des durch Φ und das Ebenenpaar δ, δ' bestimmten Büschels von Flächen II. Grades ist; diese Scheitel sind immer reell, weil Φ keine reellen Geraden trägt. Die Homologie führt δ in δ' und dabei die Punkte A, B, C in drei Punkte A_1, B_1, C_1 des in δ', befindlichen Kreises der Φ über. Zu zweit kommt die Homologie, deren Zentrum der Schnittpunkt der Geraden $\overline{A_1\,B'}$ und $\overline{B_1\,A'}$ ist; in ihr entspricht dem A_1 der B', dem B_1 der A' und dem C_1 ein Punkt C_2 desselben Kreises. Zu dritt nehmen wir die Homologie, deren Zentrum der Schnittpunkt der Geraden $\overline{A'B'}$ und $\overline{C_2C'}$ ist und die deshalb A' und B', sowie C_2 und C' einander zuordnet. Durch die Aufeinanderfolge dieser drei Homologien erhalten wir eine Kollineation der Kugel Φ in sich, bei der A, A'; B, B'; C, C' gepaart sind, also eine der beiden oben gefundenen; die andere folgt aus ihr, wenn wir noch als vierte die involutorische Homologie hinzufügen, die

D' zum Zentrum und δ' zur Hauptebene hat. — Die Anzahl der Homologien kann sich in besonderen Fällen vermindern: Erstens kann schon die erste Homologie A in A', B in B', C in C' überführen, nämlich wenn $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ durch einen Punkt laufen. Zweitens kann es möglich werden, die zweite Homologie so zu wählen, daß sie direkt A_1 mit A', B_1 mit B', C_1 mit C' vertauscht, wenn nämlich $\overline{A_1A'}$, $\overline{B_1B'}$, $\overline{C_1C'}$ durch einen Punkt gehen. — Wir haben hier den bekannten Satz gefunden:

Jede reelle Kollineation, die eine Fläche II. Grades in sich selbst überführt, läßt sich aus höchstens vier reellen involutorischen Homologien zusammensetzen.

§ 2. Die aus der involutorischen Homologie folgenden ebenen Kreisverwandtschaften.

1. Wir projizieren die Kugel Φ aus einem Punkte S auf eine Ebene σ, die wir uns der Einfachheit halber als Polarebene von S i. Bez. auf Φ oder, wenn S auf Φ liegt, als Parallelebene zu der in S berührenden Tangentialebene von Φ denken; in σ nehmen wir den Umriß von Φ zum absoluten Kegelschnitt der Maßgeometrie. Dann folgen aus den kollinearen Punktverwandtschaften der Kugel Φ in σ Punktverwandtschaften, die Kreise in Kreise verwandeln, und zwar lassen sie sich sämtlich aus denen unter ihnen zusammensetzen, die durch die Projektion aus den involutorischen Homologien der Kugel entstehen. Wir wollen uns deshalb nur mit diesen besonders einfachen Kreisverwandtschaften beschäftigen.

Es sei also eine involutorische Homologie gegeben, deren Zentrum C' und deren Hauptebene γ' reell und zu einander polar in bezug auf Φ sind. γ' wird entweder Φ reell schneiden oder nicht; dagegen können wir den Fall, daß γ' die Φ berührt, ausschließen, da er eine Ausartung ist, in der alle außerhalb von γ' befindlichen Punkte dem C' entsprechen. Das Projektionszentrum S ferner kann mit C' identisch sein oder in γ' oder an einer beliebigen Stelle des

Raumes liegen: Hieraus ergeben sich die verschiedenen Fälle der aus der Homologie (C', γ') folgenden ebenen Kreisverwandtschaften.

2. Nehmen wir zunächst S auf Φ an, so ergibt sich in σ, wenn S in γ' liegt, die *Spiegelung an einer Geraden,* sonst aber *die Inversion* (Transformation durch reziproke Radien) *der parabolischen Geometrie*; der Hauptkreis der Inversion ist das Bild des reellen oder imaginären Schnittkreises von γ' mit Φ.

Ist S kein Punkt von Φ, so erhalten wir in σ die elliptische oder die hyperbolische Geometrie. Der Fall, daß $S \equiv C'$, ist uninteressant, da er zur *identischen Transformation* führt. Liegt S in γ', so haben wir in σ eine ebene involutorische Homologie, die zum Zentrum das Bild C von C' und zur Hauptgeraden die Schnittlinie $c \equiv \overline{\sigma\gamma'}$ hat; sie führt den absoluten Kegelschnitt in sich selbst über und ist die *Spiegelung der nichteuklidischen Geometrie.* Die Spiegelung findet also in der elliptischen Geometrie immer gleichzeitig an einem Punkt C und an seiner absoluten Polare c statt; in der hyperbolischen Geometrie aber kann man, je nachdem C im Innern des absoluten Kreises liegt oder nicht, je nachdem also C im Sinne der nichteuklidischen Geometrie ein eigentlicher Punkt ist oder nicht, die Spiegelung an einem Punkte und die Spiegelung an einer Geraden unterscheiden; doch sind das nicht von einander unabhängige Arten, da immer aus zwei ebenen involutorischen Homologien, von denen jede ihr Zentrum in der Hauptgeraden der anderen hat, eine involutorische Homologie folgt, deren Zentrum der Schnittpunkt der Hauptgeraden und deren Hauptgerade die Verbindungslinie der Zentren jener beiden sind.

3. Bei allgemeiner Lage des Projektionszentrums S erhalten wir in σ eine Transformation, die der Analogie zur parabolischen Geometrie wegen auch als *Inversion* bezeichnet wird, obwohl sie wesentlich andere Eigenschaften hat als die parabolische Inversion. Sie ist zunächst nicht mehr eindeutig: Ein Punkt Y von σ ist das Bild zweier Kugelpunkte

Y_1', Y_2', und diesen entsprechen in der Homologie (C', γ') zwei Punkte $\mathfrak{Y}_1'$, $\mathfrak{Y}_2'$, die i. A. in σ verschiedene Bilder $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$ haben; $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ nun sind die dem Y in der Inversion zugeordneten Punkte, und umgekehrt findet man, wenn man ihre entsprechenden Punkte in derselben Weise sucht, immer als einen derselben den Punkt Y. Das heißt: *Die nichteuklidische Inversion ist eine durchweg involutorische zweideutige Verwandtschaft.*

Der Bildpunkt C des Homologiezentrums C' ist dadurch ausgezeichnet, daß er mit den beiden ihm entsprechenden Punkten zusammenfällt; er möge *das Zentrum* und seine absolute Polare $c \equiv \overline{\sigma\gamma'}$ *die Axe der Inversion* heißen. — Ein Kreis ferner von σ geht durch die Inversion i. A. in zwei Kreise über, und auch hierbei findet involutorisches Entsprechen statt; die Kreise, die C zum Mittelpunkt und c zur Mittellinie[1]) haben, vertauschen sich untereinander; insbesondere fällt der als *Hauptkreis der Inversion* zu bezeichnende Bildkreis des in γ' befindlichen Kugelkreises mit dem einen der beiden ihm zugeordneten Kreise zusammen. Dem absoluten Kegelschnitt entspricht nur ein Kreis, der *Fluchtkreis.* — Eine Gerade der Ebene σ ist das Bild nur eines Kugelkreises und wird deshalb durch die Inversion in nur einen Kreis verwandelt; insbesondere entsprechen die durch das Zentrum C laufenden Geraden, die wir füglich als *Durchmesser der Inversion* bezeichnen werden, je sich selbst. Also liegt ein Punkt Y mit den beiden ihm in der Inversion zugeordneten Punkten $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ auf demselben Durchmesser; so entsteht auf jedem Durchmesser eine involutorische Korrespondenz [2], von deren Verzweigungs- und Koinzidenzpunkten je zwei in den Punkt C und die anderen beiden in die Schnittpunkte U_1, U_2 des Durchmessers mit dem absoluten Kegelschnitt, bzw. in seine Schnittpunkte H_1, H_2 mit dem Hauptkreis fallen; von diesen fünf singulären Punkten der Korrespondenz ist immer einer durch die vier übrigen be-

[1]) Die Mittellinie eines Kreises ist die Verbindungsgerade seiner beiden Berührungspunkte mit dem absoluten Kegelschnitt; ihr absoluter Pol ist der Mittelpunkt des Kreises.

stimmt, da C der eine Doppelpunkt der durch die Punktepaare U_1, U_2 und H_1, H_2 definierten Involution ist.

4. Die auf einem Durchmesser d der Inversion bestehende involutorische Korrespondenz [2] ist das Bild der vermöge der Homologie (C', γ') herrschenden Involution auf dem Kreise der Kugel Φ, dessen Bild d ist. Diesen Kreis denken wir uns mit seiner ganzen Ebene um d in die Ebene σ heruntergeklappt und haben dann in dieser die folgende Figur[1]): Die durch das Inversionszentrum C gehende Gerade d schneidet den absoluten Kreis in U_1, U_2, den Hauptkreis in H_1, H_2, die Axe c der Inversion in D; durch U_1 und U_2 geht ein Kegelschnitt μ, unser heruntergeklappter Kugelkreis, und auf ihm besteht eine Involution, deren Zentrum J der heruntergeklappte Punkt C' ist; diese Involution wird aus dem i. Bez. auf μ genommenen Pol P von d, dem heruntergeklappten Punkt S, auf die Gerade d projiziert und ergibt auf ihr die Korrespondenz. — Da H_1 und H_2 die Bilder der Doppelpunkte der auf μ bestehenden Involution sind, können wir J folgendermaßen konstruieren: Wir schneiden die Strahlen $\overline{PH_1}$ und $\overline{PH_2}$ mit μ in zwei solchen Punkten H_1^* und H_2^*, daß die Gerade $i \equiv \overline{H_1^* H_2^*}$ durch D läuft, und suchen ihren Pol J i. Bez. auf μ. Hierbei gibt es zwei Möglichkeiten; aber, da jede von ihnen aus der anderen durch Anwendung der involutorischen Homologie mit P als Zentrum und d als Hauptgerade hervorgeht, liefern beide auf d dieselbe Korrespondenz. — Wir erhalten aber auch stets dieselbe Korrespondenz auf d, wenn wir die analoge Figur mit irgend einem durch U_1 und U_2 laufenden Kegelschnitt ν konstruieren; denn es schneiden sich, wenn Q, K_1^* usw. die den Punkten P, H_1^* usw. der ersten Figur analogen Punkte sind, $\overline{PH_1^*}$ und $\overline{QK_1^*}$ im Punkte H_1 von d, und deshalb führt die ebene Homologie, in der der Punkt $(\overline{PQ}, \overline{H_1^*K_1^*})$ Zentrum, die Gerade d Hauptgerade und das Paar P, Q ein Paar ent-

[1]) Zur Veranschaulichung kann Fig. 1 dienen: Der dortige Kreis AK ist als Kegelschnitt μ zu nehmen.

sprechender Punkte ist, den Punkt K_1^* in H_1^*, folglich auch den Kegelschnitt ν in μ und überhaupt die ganze zweite Figur in die erste über.

Auf diese Weise können wir auf jedem Durchmesser der Inversion die involutorische Korrespondenz [2] konstruieren; da in einer Ebene mit gegebenem absoluten Kegelschnitt die Punkte U_1, U_2 immer bekannt sind und da die Punkte C, H_1, H_2 durch den Hauptkreis bestimmt sind, ist die ganze Inversion durch ihren Hauptkreis definiert. Wie wir die obige Konstruktion reell ausführen, wenn U_1, U_2 oder H_1, H_2 imaginär sind, wollen wir hier nicht untersuchen, da wir einfachere Konstruktionen ableiten werden; es genügt, folgendes festgestellt zu haben:

Die Inversion der nichteuklidischen Geometrien ist durch ihren Hauptkreis völlig bestimmt; ein Punkt liegt mit den beiden ihm zugeordneten immer auf demselben Durchmesser des Hauptkreises; so entsteht auf jedem Durchmesser d eine involutorische Korrespondenz [2], die zwei Verzweigungspunkte in den Schnittpunkten von d mit dem absoluten Kegelschnitt, zwei Koinzidenzpunkte in den Schnittpunkten von d mit dem Hauptkreis und zwei vereinigte Verzweigungs- und Koinzidenzpunkte im Inversionszentrum hat und die sich aus diesen Elementen konstruieren lässt.

§ 3. Die Inversion der hyperbolischen Geometrie.

1. Für die hyperbolische Geometrie läßt sich unmittelbar aus den Erörterungen des vorigen Paragraphen eine einfache Konstruktion der Inversion herleiten; man nimmt nämlich den absoluten Kegelschnitt selbst bei der Konstruktion der involutorischen Korrespondenz [2] auf *jedem* Durchmesser zu Hilfe. Also verfährt man bei irgend einem Durchmesser d der Inversion so: Ist P sein absoluter Pol, der auf der Axe c der Inversion liegt und zugleich der Pol von d i. Bez. auf den Hauptkreis ist, und begegnet d der c in D und dem Hauptkreis in H_1 und H_2, so schneidet man $\overline{PH_1}$ und $\overline{PH_2}$ mit dem absoluten Kegelschnitt in zwei solchen Punkten

H_1^* und H_2^*, daß die Gerade $i \equiv \overline{H_1^* H_2^*}$ durch D läuft; den absoluten Pol J von i macht man zum Zentrum einer Involution auf dem absoluten Kegelschnitt und projiziert diese aus P auf d.[1])

Betrachten wir, wie üblich, das Innere des absoluten Kegelschnittes als maßgebend, so sind H_1 und H_2 reell, wenn der Hauptkreis reell, und imaginär, wenn er imaginär ist. Im letzteren Falle ist der Hauptkreis durch sein reelles Polarsystem gegeben; $\overline{PH_1}$ und $\overline{PH_2}$ nun, die ja die aus P an den Hauptkreis gehenden Tangenten sind, sind dann definiert als die Doppelelemente der im Strahlenbüschel (P) durch das Polarsystem erzeugten Involution, und i ist definiert als eine der beiden aus D kommenden Geraden, auf denen die infolge des absoluten Polarsystems bestehende Involution perspektiv ist zu der soeben im Strahlenbüschel (P) erwähnten. Wenn also der Hauptkreis imaginär ist, wird man irgend zwei gepaarte Strahlen aus (P), m und n, nehmen, zwischen ihren Punktreihen die projektive Zuordnung der einander im absoluten Polarsystem konjugierten Punkte herstellen und an den durch diese beiden projektiven Punktreihen erzeugten Kegelschnitt (m, n) aus D die Tangenten legen; das sind die gesuchten beiden Geraden, da auf jeder von ihnen die beiden Paare sich in (P) entsprechender Strahlen: $\overline{PD}$ und $\overline{PC}$, m und n, auch zwei Punktepaare der absoluten Involution einschneiden. Diese Geraden sind immer reell: Der Hauptkreis kann nämlich nur imaginär werden, wenn C im Innern des absoluten Kegelschnittes liegt; denn nur in diesem Falle ist es möglich, daß, wenn wir zu unserer räumlichen Figur zurückkehren, das Homologiezentrum C' im Innern der Kugel Φ liegt und daß somit die Hauptebene γ' die Φ nicht reell schneidet. Dann aber befinden sich P und D außerhalb des absoluten Kegelschnittes, und wir können es so einrichten, daß[2]) m, zwischen C und D hindurchlaufend, ihn reell schneidet; der absolute Pol M von m wird jetzt

[1]) Siehe Fig. 1.

[2]) Siehe Fig. 2.

auf d zwischen m und D liegen und, da $\overline{PC}$, $\overline{PD}$ und m, n zwei Paare einer elliptischen Involution sind, auch durch n nicht von D getrennt werden. Das heißt aber, da der Kegelschnitt (m, n) die Geraden m und n in ihren Schnittpunkten mit d berührt, also d in denselben Punkten, in denen m und n es tun, schneidet: D und M sind entweder gleichzeitig innere oder gleichzeitig äußere Punkte in bezug auf (m, n); das letztere aber findet statt, da die von M kommenden Tangenten des (m, n) identisch sind mit den von M an den absoluten Kegelschnitt gehenden, nach unserer Wahl von m reellen Tangenten.

2. Wir denken uns nun die Konstruktion von i für einen Durchmesser d ausgeführt; dann können wir diese Figur nach und nach in alle die Figuren verwandeln, die für die anderen Durchmesser nötig sind, wenn wir auf sie nach und nach die Kollineationen anwenden, die das dem absoluten Kegelschnitt und dem Hauptkreis gemeinsame Tangentialdreieck zum Fundamentaldreieck haben[1]); denn diese Kollineationen lassen den absoluten Kegelschnitt, C, c und alle Kreise mit dem Mittelpunkt C je in sich selbst übergehen. Daraus folgt, daß die für alle Durchmesser d konstruierten Geraden i einen ganz bestimmten Kreis mit dem Mittelpunkt C berühren; also brauchen wir die Konstruktion von i nur einmal zu machen, um dadurch diesen, wie wir ihn nennen wollen, *„ersten Hilfskreis“* zu bestimmen. Doch können wir auch den im hyperbolischen Maßsystem gemessenen Radius des ersten Hilfskreises durch den des Hauptkreises ausdrücken; dazu brauchen wir den folgenden

Hilfssatz: Projiziert man aus einem Punkte T zwei auf einem Kegelschnitt liegende Punkte X^*, Y^* auf die Polare t von T in die Punkte X, Y und schneidet t mit dem Kegelschnitt in den Punkten W_1, W_2, so besteht die Doppelverhältnisgleichung:

$$(W_1 W_2 X Y) = (W_1 W_2 X^* Y^*)^2.$$

---

[1]) Diese Kollineationen sind die um C ausgeführten Drehungen der hyperbolischen Geometrie und gehören als solche zu den Kreisverwandtschaften.

[Beweis: Die Verbindungslinien von X^* und Y^* bzw. mit den beiden weiteren Schnittpunkten der Strahlen $\overline{TY^*}$ und $\overline{TX^*}$ mit dem Kegelschnitt gehen durch denselben Punkt Z der Geraden t; daher ist

$$(W_1\, W_2\, X^*\, Y^*) \doteq (W_1\, W_2\, XZ) = (W_1\, W_2\, ZY)$$

und, da die Identität

$$(W_1\, W_2\, XY) = (W_1\, W_2\, XZ) \cdot (W_1\, W_2\, ZY)$$

gilt,

$$(W_1\, W_2\, XY) = (W_1\, W_2\, X^*\, Y^*)^2.]$$

Es seien nun U_1, U_2 wieder die Schnittpunkte von d und ferner V_1, V_2 diejenigen der Geraden $\overline{PC}$ mit dem absoluten Kegelschnitt, so ist

$$(U_1\, U_2\, V_1\, V_2) = -1,$$

und es folgt durch einfache Umrechnung:

$$(V_1\, V_2\, U_1\, H_1^*) = \frac{(V_1\, U_2\, U_1\, H_1^*)}{(V_2\, U_2\, U_1\, H_1^*)} = \frac{(U_1\, U_2\, V_1\, H_1^*) + 1}{(U_1\, U_2\, V_1\, H_1^*) - 1}$$

als Beziehung zwischen den Doppelverhältnissen der beiden auf dem absoluten Kegelschnitt liegenden Punktwürfe

$$U_1,\ U_2,\ V_1,\ H_1^* \text{ und } V_1,\ V_2,\ U_1,\ H_1^*.$$

Projizieren wir den ersten Punktwurf aus P auf d und den zweiten aus D auf $\overline{PC}$, so gehen sie über in die Würfe

$$U_1,\ U_2,\ C,\ H_1 \text{ und } V_1,\ V_2,\ C,\ K_1,$$

wobei K_1 der Schnittpunkt von $\overline{PC}$ mit $\overline{DH_1^*} \equiv i$ und somit der Berührungspunkt von i am ersten Hilfskreis ist. Nach unserem Hilfssatz ist nun

$$(V_1\, V_2\, CK_1) = \left(\frac{\sqrt{(U_1\, U_2\, CH_1)} + 1}{\sqrt{(U_1\, U_2\, CH_1)} - 1}\right)^2,$$

und das ist eine Gleichung zwischen den Radien des Haupt- und des Hilfskreises, da dieselben durch die Doppelverhältnisse $(U_1\, U_2\, CH_1)$ und $(V_1\, V_2\, CK_1)$ gemessen werden.[1] — Es gibt

[1] Die beiden Kreise fallen zusammen, wenn $(U_1\, U_2\, CH_1) = 3 + \sqrt{2}$ ist; dann lassen der absolute Kegelschnitt und der Hauptkreis Ponceletsche Vierecke zu.

aber noch eine andere Deutung der letzten Gleichung; bezeichnen wir nämlich mit v_1 und v_2 die aus D kommenden Tangenten $\overline{DV_1}$ und $\overline{DV_2}$ des absoluten Kegelschnittes, so wird durch das mit $(V_1\, V_2\, CK_1)$ gleiche Doppelverhältnis $(v_1\, v_2\, d\, i)$ der Winkel zwischen d und i gemessen; derselbe hat demnach für alle Durchmesser der Inversion denselben Wert und soll kurz *„der Winkel der Inversion“* heißen. Sein Komplementwinkel, der durch $(v_1\, v_2\, i\, c) = -\frac{1}{(v_1\, v_2\, d\, i)}$ gemessen wird, ist der Winkel zwischen i und der Inversionsaxe c und ebenfalls konstant, wie es ja sein muß, da i einen Kreis berührt, dessen Mittellinie c ist.

3. Wenn wir nun unsere Konstruktion in der Sprache der nichteuklidischen Geometrie schildern wollen, dürfen wir nur mit *„eigentlichen“*, d. h. im Innern des absoluten Kegelschnittes befindlichen Elementen arbeiten. Wir unterscheiden demnach zwei Arten der Inversion:

Die zentrale Inversion, deren Zentrum ein eigentlicher Punkt ist, und

die axiale Inversion, deren Axe eine eigentliche Gerade ist.

Der Hauptkreis ist ja, falls er reell ist, immer ein eigentlicher Kreis. Bei der zentralen Inversion mit reellem Hauptkreis ist, wie leicht ersichtlich, auch der erste Hilfskreis ein solcher; die eine zu einem Durchmesser d gehörige Gerade i erhalten wir ohne Benutzung des uneigentlichen Punktes D, wenn wir den zu d im absoluten Polarsystem konjugierten Durchmesser $\overline{PC}$ mit dem ersten Hilfskreis schneiden und in einem der Schnittpunkte die Tangente ziehen. Die Involution auf dem absoluten Kegelschnitt endlich ist mit der Spiegelung an der Geraden i identisch. Also können wir sagen:

Hat die zentrale Inversion einen reellen Hauptkreis, so konstruiert man die einem Punkte Y entsprechenden beiden Punkte $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ folgendermaßen: Man legt durch Y den Durchmesser d der Inversion, schneidet den zu ihm senkrechten

Durchmesser mit dem ersten Hilfskreis[1]) *und zieht in dem einen Schnittpunkt die Tangente i an diesen; an i spiegelt man das in Y auf d errichtete Lot und konstruiert zu der so erhaltenen Geraden die beiden Parallelen, die zu d senkrecht sind; deren Schnittpunkte mit d sind die gesuchten Punkte* $\mathfrak{Y}_1$ *und* $\mathfrak{Y}_2$.

Bei der zentralen Inversion mit imaginärem Hauptkreis ist der erste Hilfskreis kein eigentlicher Kreis, wohl aber der ihm im absoluten Polarsystem zugeordnete, der die Punkte J trägt; diesen, wie wir ihn nennen wollen, *„zweiten Hilfskreis"* können wir direkt konstruieren, wenn wir die für den ersten Hilfskreis angegebenen Konstruktionen i. Bez. auf den absoluten Kegelschnitt polarisieren. Wir haben also:

Hat die zentrale Inversion einen imaginären Hauptkreis, so konstruiert man die einem Punkte Y zugeordneten Punkte $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ *folgendermaßen: Man legt durch Y den Durchmesser d der Inversion, schneidet den zu ihm senkrechten Durchmesser mit dem zweiten Hilfskreis und spiegelt an dem einen der beiden Schnittpunkte, J, das in Y auf d errichtete Lot; zu der so erhaltenen Geraden zieht man die beiden Parallelen, die zu d senkrecht sind, und hat in den Schnittpunkten derselben mit d die gesuchten Punkte* $\mathfrak{Y}_1$ *und* $\mathfrak{Y}_2$.

Die axiale Inversion hat immer einen reellen Hauptkreis; aber, wie man sich leicht überzeugt, sind beide Hilfskreise uneigentliche Kreise; doch kommt man hier bequem ohne sie aus:

In der axialen Inversion konstruiert man[2]) *zu einem Punkt Y die ihm zugeordneten Punkte* $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$ *folgendermaßen: Man fällt aus Y auf die Axe der Inversion das Lot d, dessen Fußpunkt D sei; dann errichtet man in dem einen Schnittpunkt von d mit dem Hauptkreis wieder das Lot auf d und zieht dazu durch D die eine Parallele i — oder, was dasselbe ist, man legt durch D die eine Gerade i,*

---

[1]) Siehe Seite 13.

[2]) Siehe Fig. 3.

die mit d „den Winkel der Inversion“ bildet —; an i spiegelt man das in Y auf d errichtete Lot und sucht zu der so erhaltenen Geraden die beiden zugleich auf d senkrechten Parallelen; diese schneiden in d die Punkte $\mathfrak{Y}_1$ *und* $\mathfrak{Y}_2$ *ein.*

Bei der axialen Inversion kann der Fall eintreten, daß ihre Axe c den Fluchtkreis vertritt, d. h. daß jedem Punkt der Axe c die beiden unendlich fernen Punkte des durch ihn gehenden Durchmessers d entsprechen; nach der oben angegebenen Konstruktion geschieht das, sobald c durch die Spiegelung an i in d übergeht. Dieser Fall gibt, wie man ohne besondere Mühe zeigen kann, die von Herrn Liebmann „L-Transformation“ genannte Abart der Inversion.

§ 4. Die Inversion der elliptischen Geometrie.

1. Die in § 2 angegebene Konstruktion der Inversion läßt sich in der elliptischen Ebene, weil dort der absolute Kegelschnitt imaginär ist, nicht so einfach gestalten, wie es in § 3 für die hyperbolische Ebene geschehen ist. Deshalb wollen wir jetzt eine ganz andere Konstruktion der Inversion ableiten, die in der elliptischen Ebene brauchbar ist; sie ist übrigens auch in der hyperbolischen Ebene bei der zentralen Inversion anwendbar. Wir kehren zu dem Ende noch einmal zu der Kugel Φ und zu der auf ihr durch die involutorische Homologie (C', γ') erzeugten Verwandtschaft zurück und setzen dabei voraus, daß die aus dem Projektionszentrum S nach C' gehende Gerade, wie sie es ja im elliptischen Falle tut, die Kugel Φ in zwei reellen Punkten C_1' und C_2' schneidet. Jeder Kreis nun von Φ, der dem durch C_1' und C_2' bestimmten Kreisbüschel $(C_1' C_2')$ angehört, geht durch die Homologie (C', γ') in sich selbst über; ferner sind, wenn t_1' und t_2' zwei beliebige, die Kugel Φ in C_1', bzw. C_2' berührende und sich auf der Geraden $\overline{\gamma'\sigma}$ schneidende Tangenten sind, die beiden Ebenenbüschel (t_1') und (t_2') und mit ihnen auch die durch sie in Φ eingeschnittenen Kreisbüschel einander projektiv zugeordnet. Soll nun zu einem Punkt Y' der Kugel der ihm in der Homologie (C', γ') entsprechende

$\mathfrak{Y}'$ gefunden werden, so legen wir durch Y' erstens den Kreis $(C_1' C_2' Y')$ aus dem Büschel $(C_1' C_2')$; dann nehmen wir entweder den durch Y' gehenden Kreis aus dem Büschel (t_1') und schneiden den ihm entsprechenden aus dem Büschel (t_2') mit $(C_1' C_2' Y')$ — oder wir nehmen den durch Y' gehenden Kreis aus (t_2') und schneiden den ihm entsprechenden aus (t_1') mit dem Kreise $(C_1' C_2' Y')$; beide Male erhalten wir denselben Punkt $\mathfrak{Y}'$. Wie gestaltet sich das nun, wenn wir die Kugel Φ aus dem Punkte S auf seine Polarebene σ projizieren?

Die Punkte C_1', C_2' gehen in das Zentrum C der Inversion über, der Kreisbüschel $(C_1' C_2')$ in den Durchmesserbüschel und die beiden Kreisbüschel (t_1') und (t_2') in denselben Büschel (t) von Kreisen, die alle einen bestimmten Durchmesser t im Punkte C berühren; da jeder Kreis aus (t) das Bild eines Kreises aus (t_1') und eines aus (t_2') ist, folgt aus der Projektivität zwischen diesen letzten beiden Büscheln, daß infolge der Inversion im Kreisbüschel (t) eine involutorische Korrespondenz [2] herrscht. Ein Punkt Y von σ nun ist das Bild zweier Kugelpunkte Y_1' und Y_2'; diese bestimmen auf der Kugel vier Kreise, die wir mit

$$(t_1', Y_1'),\ (t_2', Y_2'),\ (t_1', Y_2'),\ (t_2', Y_1')$$

bezeichnen können und von denen immer die ersten beiden und die letzten beiden dasselbe Bild haben; sind ferner $\mathfrak{Y}_1'$ und $\mathfrak{Y}_2'$ auf der Kugel durch die Homologie (C', γ') den Punkten Y_1' und Y_2' zugeordnet, so entsprechen den oben aufgezählten vier Kreisen der Reihe nach die Kreise

$$(t_2', \mathfrak{Y}_1'),\ (t_1', \mathfrak{Y}_2'),\ (t_2', \mathfrak{Y}_2'),\ (t_1', \mathfrak{Y}_1'),$$

die i. A. lauter verschiedene Bilder in σ haben. Da Y_1', Y_2', $\mathfrak{Y}_1'$, $\mathfrak{Y}_2'$ auf demselben Kreis aus dem Büschel $(C_1' C_2')$ liegen, folgt hieraus: Durch einen Punkt Y von σ gehen zwei Kreise des Büschels (t); sowohl die beiden Kreise, die dem einen, als auch die beiden, die dem anderen von ihnen durch die in (t) bestehende involutorische Korrespondenz [2] zugeordnet sind, schneiden in den Durchmesser $\overline{CY}$ die zwei

Punkte $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ ein, die dem Y in der Inversion entsprechen. Können wir also die involutorische Korrespondenz [2] in (t) konstruieren, so können wir zu jedem Punkte Y die Punkte $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ finden, außer wenn Y auf t selbst liegt; in diesem Fall wird man einen anderen, dem Büschel (t) analogen Kreisbüschel zu Hilfe nehmen; aus praktischen Gründen wird man dies schon tun, wenn Y nahe an t liegt.

2. Zu einer Konstruktion der involutorischen Korrespondenz [2] im Büschel (t) gelangen wir folgendermaßen: Ist T der Punkt, in dem t die Axe c der Inversion schneidet, durch den also auch t_1' und t_2' laufen, so gehen durch jede Gerade des Strahlenbüschels (T, γ') zwei einander in der Homologie (C', γ') zugeordnete Ebenen aus den Ebenenbüscheln (t_1') und (t_2'); hieraus folgt durch die Projektion aus S auf σ, daß jede Gerade des Strahlenbüschels (T, σ) zwei Kreise des Büschels (t) bestimmt, die den Hauptkreis der Inversion in denselben beiden (eventuell imaginären) Punkten wie sie schneiden und die einander in der Inversion zugeordnet sind. Eine solche Gerade aus dem Strahlenbüschel (T, σ) wollen wir eine *„Hauptsehne“* der beiden durch sie bestimmten Kreise nennen; jeder Kreis aus (t) besitzt, da er das Bild zweier Kugelkreise ist, zwei Hauptsehnen, und diese sind immer reell. Hiernach können wir bereits die Konstruktion der Inversion folgendermaßen schildern:

Ist in der elliptischen Ebene eine Inversion durch ihren Hauptkreis gegeben, so konstruiert man zu einem Punkt Y die beiden zugeordneten Punkte $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$, indem man durch Y und das Zentrum C der Inversion einen Kreis legt und die beiden Kreise aufsucht, die jenen Kreis in C berühren und mit ihm je eine Hauptsehne gemeinsam haben; diese beiden Kreise schneiden $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ in den Durchmesser $\overline{CY}$ ein.

Kehren wir wieder zu unserem Kreisbüschel (t) zurück, so erkennen wir leicht, daß auch die Mittellinie eines jeden Kreises $\varkappa$ aus ihm durch den Punkt T geht; denn sie wird in σ eingeschnitten durch die Ebenen der beiden Kugelkreise

$\varkappa_1'$ und $\varkappa_2'$, deren Bild $\varkappa$ ist, und diese Ebenen gehen durch t_1', bzw. t_2'. Da andererseits die Ebenen von $\varkappa_1'$ und $\varkappa_2'$ in γ' die Geraden einschneiden, deren Bilder die Hauptsehnen von $\varkappa$ sind, ergibt sich ohne weiteres der folgende Satz, der die obige Konstruktion vereinfacht:

Ist in der elliptischen Ebene eine Inversion und ein Büschel von Kreisen gegeben, die durch das Inversionszentrum gehen und daselbst eine gemeinsame Tangente t besitzen, so laufen ihre Mittellinien und ihre Hauptsehnen durch denselben Punkt, in dem t die Axe c der Inversion schneidet. In diesem Strahlenbüschel bestehen zwei Projektivitäten derart, dass durch sie jedem Strahl die Hauptsehnen des Kreises zugeordnet sind, dessen Mittellinie er ist, und dass umgekehrt durch die inversen Projektivitäten jedem Strahl die Mittellinien der beiden Kreise zugewiesen werden, deren gemeinsame Hauptsehne er ist. In beiden Projektivitäten sind c und t die Koinzidenzstrahlen.

Um die beiden Projektivitäten völlig zu bestimmen, muß man für jede ein Paar entsprechender Strahlen kennen; es wird sich also darum handeln, für einen beliebigen Kreis $\varkappa$ aus dem Büschel (t) die Hauptsehnen zu finden, auch wenn $\varkappa$ den Hauptkreis nicht reell schneidet, wenn man von dem Hauptkreis nur sein Polarsystem besitzt. Der Punkt T nun ist als Schnittpunkt zweier gemeinsamer Sehnen der beiden Kreise ein Eckpunkt des ihnen gemeinsamen Polardreiecks; deshalb geht durch ihn der Kegelschnitt, dessen Punkte gleichzeitig in den Polarsystemen beider Kreise den Punkten irgend einer beliebig gewählten Geraden g konjugiert sind. Die Punktreihe des Kegelschnittes und die von g sind durch diese Beziehung zu einander projektiv gemacht; projizieren wir beide aus T, so erhalten wir im Strahlenbüschel (T) eine Projektivität, und von deren Koinzidenzstrahlen trägt jeder außer dem durch T und den Schnittpunkt mit seiner Polare gebildeten Paar in beiden Polarsystemen konjugierter Punkte noch ein zweites; also sind auf jedem der beiden Koinzidenzstrahlen die beiden Involutionen von i. Bez. auf $\varkappa$, bzw.

auf den Hauptkreis konjugierten Punkten identisch; das heißt, jeder dieser Strahlen schneidet $\varkappa$ und den Hauptkreis in denselben beiden Punkten, ist eine Hauptsehne von $\varkappa$. So können wir die Hauptsehnen von $\varkappa$ auch bei imaginärem Hauptkreis konstruieren; wir brauchen nach dem früheren nicht erst nachzuweisen, daß wir immer zwei reelle Geraden erhalten.

Zweiter Abschnitt.

Die einfachsten Berührungstransformationen, die Kreise in Kreise überführen.

§ I. Aufstellung der einfachsten Transformationen „$\mathfrak{E}$" der Ebenen des Raumes, die auf einer Kugel eine Berührungstransformation der Kreise erzeugen.

1. Da ein Punkt in der Theorie der Berührungstransformationen als Elementverein aufzufassen ist, wird man, wenn es sich um die Berührungstransformationen der Kreise handelt, jeden Punkt als einen Kreis ansehen müssen. Um recht einfache Verhältnisse zu erhalten, machen wir die

Voraussetzung: Auf einer Kugel Φ bestehe eine algebraische Berührungstransformation $\mathfrak{B}$, die jedem Punkt einen einzigen Kreis zuordnet, der nicht nebenbei auch noch zu einem anderen Punkte gehört, und die jeden Kreis in eine Kurve überführt, die sich aus lauter Kreisen zusammensetzt; dasselbe verlangen wir von der inversen Transformation $\mathfrak{B}^{-1}$.

Mit $\mathfrak{B}$ verbunden ist eine algebraische Verwandtschaft $\mathfrak{E}$ zwischen den Ebenen des Raumes, und wir können uns umgekehrt $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{E}$ erzeugt denken. Da ein Punkt von Φ ein Kreis ist, dessen Ebene Φ berührt, sehen wir:

Die mit $\mathfrak{B}$ verbundene algebraische Ebenenverwandtschaft $\mathfrak{E}$ ordnet jeder Berührungsebene der Kugel Φ eindeutig eine Ebene zu, die nicht nebenbei noch einer anderen Berührungsebene entspricht.