

**Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

**Projektive Untersuchungen über die  
Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie**

**Ludwig, Walther**

**1904**

Einleitung

[urn:nbn:de:bsz:31-270270](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-270270)

## Einleitung.

S. Lie hat auf analytischem Wege<sup>1)</sup> die sämtlichen Berührungstransformationen bestimmt, die die geodätischen Kreise einer Fläche konstanter Krümmung zulassen. Über die Punkttransformationen unter ihnen besteht, soweit sie sich auf die euklidische Ebene beziehen, eine reiche Literatur, und in neuester Zeit haben die Herren F. Hausdorff<sup>2)</sup> und H. Liebmann<sup>3)</sup> diese Untersuchungen auch auf die nicht-euklidische Geometrie ausgedehnt; was ferner die Zusammensetzung der Berührungstransformationen der Kreise in der euklidischen Ebene angeht, so hat Herr G. Scheffers<sup>4)</sup> auf synthetischem Wege gezeigt, daß dazu außer den Punkttransformationen nur zwei sehr einfache eigentliche Berührungstransformationen nötig sind, die „Dilatation“ und die von ihm eingeführte „ $\mathfrak{S}$ -Transformation“.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit nun ist es, auf eine einheitliche und übersichtliche Weise die Berührungstransformationen der Kreise für die drei ebenen Geometrien auf-

<sup>1)</sup> Vgl. Lie-Scheffers, „Geometrie der Berührungstransformationen“, Bd I, Abschn. 1, Kap. 5

<sup>2)</sup> „Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie“. (Berichte über die Verhandlungen der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1899, 51. Bd, S. 161.)

<sup>3)</sup> „Synthetische Ableitung der Kreisverwandtschaften in der Lobatschewskijschen Geometrie.“ (Ebenda, 1902, 54. Bd., S. 244)

<sup>4)</sup> „Synthetische Bestimmung aller Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene.“ (Ebenda, 1899, 51. Bd, S. 145.)

zustellen und konstruktiv zu behandeln. Als besonders bequem bot sich hierfür die auch sonst viel gebrauchte Methode dar, von der Geometrie der Kreise auf der Kugel auszugehen und sie durch Projektion auf die Ebene zu übertragen; je nachdem das Projektionszentrum auf der Kugel oder in ihrem Innern oder außerhalb liegt, erhält man dann in der Ebene die parabolische (Euklid) oder die elliptische (Riemann) oder die hyperbolische Geometrie (Lobatschewskij); der Umriss der Kugel liefert den absoluten Kegelschnitt der betreffenden ebenen Geometrie, und jeder Kreis der Kugel geht in einen Kegelschnitt über, der den absoluten Kegelschnitt doppelt berührt und deshalb im Sinne der herrschenden ebenen Geometrie wiederum ein Kreis ist.

Die Punkttransformationen der Kreise auf der Kugel sind die Kollineationen der Kugel in sich, und hieraus erhellt, daß bei ihnen wesentlich neue Ergebnisse nicht gefunden werden konnten; doch sei auf die einfachen und wohl neuen Konstruktionen hingewiesen, die für die grundlegende Verwandtschaft der „Inversion“ in den beiden nichteuklidischen Ebenen angegeben sind. Die eigentlichen Berührungstransformationen der Kreise auf der Kugel dagegen führen zu einer interessanten Gruppe von zweideutigen Transformationen der Ebenen des Raumes; diese von mir mit dem Buchstaben „ $\mathcal{C}$ “ bezeichneten Transformationen lassen sich sämtlich mit Hilfe der oben erwähnten Kollineationen aus ganz besonders einfachen unter ihnen, den „ $\mathcal{C}_0$ -Transformationen“ zusammensetzen, und gerade die  $\mathcal{C}_0$ -Transformationen liefern uns für die ebenen Geometrien die Dilatationen und die  $\mathcal{B}$ -Transformationen; dadurch wird der innere Grund des von Herrn Scheffers gefundenen Resultates aufgedeckt und dieses Resultat auch auf die nichteuklidischen Geometrien erweitert.

Da ich auf eine rein geometrische Behandlung der Berührungstransformationen Wert lege, weiche ich von der bisher wohl allein üblichen Betrachtungsweise insofern ab, als ich von einer jeden Transformation nicht nur einen Zweig und auch diesen nur im Innern eines gewissen Gebietes zu erfassen, sondern über die Transformation als Ganzes — in

ihrer vollen Erstreckung über die Ebene und in ihrer vollen Vieldeutigkeit — Rechenschaft zu geben suche. Darin ist es auch begründet, daß die Voraussetzungen, von denen ich bei der Aufstellung der fraglichen Transformationen ausgehe, sehr enge, zunächst sogar scheinbar zu enge sind; doch zeigt das Resultat durch den Vergleich mit den allgemein gültigen Ergebnissen Lies, daß die gemachten Voraussetzungen gerechtfertigt sind und von den sämtlichen Berührungstransformationen der Kreise erfüllt werden.

Es sei mir noch gestattet, Herrn Professor Dr. F. Schur an dieser Stelle für den mir bei der Abfassung dieser Arbeit in liebenswürdigster Weise erteilten Rat meinen ergebensten und verbindlichsten Dank auszusprechen.