

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

**Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der
Mechanik**

Winkelmann, Max

1909

Anhang

[urn:nbn:de:bsz:31-270659](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-270659)

von Lagrange; der auf seine Klammersymbole sich beziehende Fundamentalsatz läßt sich in seinem ganzen Umfange daraus unmittelbar gewinnen, wenn man die Differentiale der Zustandsgrößen durch die willkürlichen Änderungen der Elemente ausdrückt. Auch leitet Lagrange mit seiner Hilfe direkt die kanonischen Störungsgleichungen her, ohne die allgemeinen zu berühren.

8. Diese Reduktion der allgemeinen Störungsgleichungen auf ihre *kanonische* Form geschieht vermittels der beiden Fundamentaltheoreme in bekannter Weise durch die Einführung spezieller, eben deshalb kanonisch genannter Elemente. Sie ist unmöglich¹⁾, wenn die Grundkräfte nicht konservativ sind. Ich habe die ganze Theorie schließlich kurz an einem einfachen Beispiel zu erläutern versucht.

Es ist nicht zu leugnen, daß die allgemeine Anwendung der Methode der Variation der Konstanten gegenwärtig noch auf eine erhebliche Schwierigkeit stößt, die darin besteht, daß nur wenige Probleme der Mechanik für nicht-konservative Grundkräfte „vollständig“ gelöst sind. Wenn nun schon nicht die exakte Lösung des Grundproblems gelingt, weil die allgemeinen Integralprinzipie der Mechanik zu gelten aufhören, so erhebt sich doch die, wie mir scheint, mögliche Forderung, auch das Grundproblem *angenähert* so aufzulösen, daß seine Zustandsgleichungen die ausreichende Anzahl von *Parametern* enthalten, welche die im zugehörigen gestörten Problem variabel zu machenden Elemente vollständig vertreten können.²⁾ Eine Klasse wichtiger Bewegungen läßt sich aber schon jetzt von ihr beherrschen, das sind die kleinen Schwingungen der Systeme.³⁾ Die Methode harret also noch ihres allgemeinen Gebrauchs namentlich in den kinetischen Problemen der wissenschaftlichen Technik.

Anhang.

Übersicht derjenigen Stellen in der *Mécanique Analytique*, welche von der Variation der Konstanten handeln.

Vorbemerkung. Da die Untersuchungen Lagranges, welche sich auf die hier behandelte Methode beziehen, in seinem großen Werke weit zerstreut sind, scheint eine summarische Zusammenstellung derselben mit dem Hinweis auf

1) Wenigstens *sensu strictiori*. Die Zurückführung der allgemeinen Form etwa auf ein einziges Glied durch ein geeignetes System von Elementen wäre denkbar und mit den Ergebnissen unserer Untersuchungen verträglich. Dieses Glied *muß* einen zeitlich veränderlichen Koeffizienten besitzen.

2) Etwa in der Art, wie Heun seine Quadraturmethode auf das einfache Pendel angewandt hat. Programm der 1. höh. Bürgerschule, Berlin 1892.

3) Die vollständigste Behandlung haben sie wohl erst in dem S. 26 zitierten Werke von Whittaker erfahren.

diejenigen Seiten der vorliegenden Arbeit, in welchen sie berührt worden sind, vielleicht nicht überflüssig zu sein. Die in Klammern beigesetzten Zahlen bedeuten die ebenso in der zweiten Ausgabe nummerierten Abschnitte der einzelnen Sektionen.

I. Band.

1. Avertissement p. V, VI.
Bemerkung über die Ausdehnung der Theorie auf nicht-konservative Störkräfte Abschnitt, Seite E, 2—3
2. Sec. Part. Sect. V, p. 323—346. Méthode générale d'approximation pour les problèmes de Dynamique, fondée sur la variation des constantes arbitraires.
- § I. Où l'on déduit des équations données dans la section précédente, une relation générale entre les variations des constantes arbitraires.
Das Lagrangesche Theorem (7). 8, 49—52
- § II. Où l'on donne les équations différentielles les plus simples pour déterminer les variations des constantes arbitraires, dues à des forces perturbatrices.
Direkte Herleitung der kanonischen Störungsformeln mit Hilfe seines Theorems (14). — Die allgemeine Annäherungsmethode (15) — Einführung neuer Konstanten. Die Poissonsche Form der Störungsgleichungen (18) — die Bestimmung der säkularen Glieder in den Elementen der gestörten Planetenbewegung (19). 9, 53, 55
9, 56—57
1, 16—17
- § III. Où l'on démontre une propriété importante de la quantité qui exprime la force vive dans un système troublé par des forces perturbatrices.
Die Variation der Konstanten h im Energieprinzip (21, 22). — Säkulares Verhalten derselben im Planetenproblem (24).

II. Band.

3. Sec. Part. Sect. VII, Chap. II, p. 66—108. Sur la variation des éléments des orbites elliptiques, produite par une force d'impulsion, ou par des forces accélératrices.
Wirkung einzelner Stöße auf die Planetenbewegung, allgemeine Bemerkung (52).
- § I. Du changement produit dans les éléments de l'orbite d'une planète, lorsqu'elle est supposée recevoir une impulsion quelconque.
Grenzbedingung für die Stoßgeschwindigkeit bei der Verwandlung einer elliptischen Planetenbahn in eine parabolische Kometenbahn (56, 57). — Wirkung einer inneren, hinreichend kleinen Explosion auf die Elemente einer Kreisbahn (57). 1, 6—7
- § II. Variations des éléments des planètes produites par des forces perturbatrices.
Wirkung stetiger Störkräfte (58, 59). Spezielle Form der Poissonschen Störungsgleichungen in den Elementen der Planetenbewegung (60). — Beweis des Poissonschen Fundamentaltheorems in spezieller Form für konservative Grund- 1, 15
4, 28, 32

Abschnitt, Seite

- kräfte (61). — Ausdehnung auf nicht-konservative Störkräfte (62). E, 2—3
 Übertragung der allgemeinen (Poissonschen) Störungsformeln
 (Sect. V, 18) auf das astronomische Problem (63). — Einführung
 kanonischer Elemente. Die Lagrangeschen Störungsglei- 3, 26—27
 chungen (64). — Ableitung derselben aus seinem Theorem (nur
 andeutungsweise) (65). — Ausführungen des astronomischen
 Störungsproblems (67—78). — Anwendung auf Bewegung des
 Planeten im widerstehenden Mittel (79).
4. Sec. Part. Sect. VII, Chap. IV, p. 130—170.
 § II. Formules générales pour les variations séculaires des éléments
 des orbites des planètes autour du soleil.
 § III. Sur les équations séculaires des éléments des planètes, pro-
 duites par la résistance d'un milieu très-rare.
5. Sec. Part. Sect. VIII, p. 180—189.
 Stoßwirkung auf allgemeine Systeme, die den Lagrangeschen 1, 7
 Gleichungen folgen. Allgemeine Bemerkung (4).
 Chap. I. Formules générales pour la variation des constantes
 arbitraires dans le mouvement d'un système quelconque de corps,
 produite par des impulsions finies et instantanées, ou par des im-
 pulsions infiniment petites et continues.
 Andeutung des Weges, zu den allgemeinen Poissonschen 1, 9, 10, 13
 Störungsformeln mit Hilfe des Impulsbegriffes zu gelangen (5, 6). —
 Erste Bemerkung über die Ableitung der allgemeinen Lagrange- 2, 22
 schen Störungsgleichungen aus seinem Theorem; Polemik gegen 3, 23
 Poisson (7). — Zweite Bemerkung über die Ausdehnung der
 Theorie auf nicht-konservative Störkräfte (8). — Dritte Bemerkung E, 2
 über nicht-konservative Grundkräfte und über konservative Kräfte, 5, 34
 die von der Zeit abhängig sind. 6, 40
6. Sec. Part. Sect. VIII, Chap. II, p. 206—209. 4, 29
 Mathematisches Raumpendel in einem Mittel, dessen Wider- E, 3
 stand proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit seiner Masse
 ist, behandelt mit der Meth. d. Var. d. Konst. (23—25).

Karlsruhe, den 12. November 1907.

Berichtigung zu S. 53 (oben 1. Absatz).

Wir müssen dennoch Poisson die Priorität für die *Veröffentlichung* der
 kanonischen Gleichungen zuschreiben. Denn sie befinden sich bereits — mit kon-
 servativen Störkräften — in seiner S. 2 titulierten Abhandlung vom Jahre 1809,
 indes ohne Beweis und ohne Erkenntnis ihrer Bedeutung [«Nous ne nous arrêtons
 point à démontrer ces formules, qui ne nous semblent pas devoir être d'une grande
 utilité»]; und Lagrange zitiert sie ausdrücklich in seinem *Second Mémoire* vom
 Jahre 1810, der den ersten Beweis enthält, ohne besonderen Hinweis auf die Ent-
 deckung Poissons. Sollte sie nicht auch Lagrange selbständig gemacht haben?
 In seiner Arbeit: *Sur la théorie des variations des éléments des planètes et en
 particulier des variations des grands axes de leurs orbites* (1808, *Mém. de l'Inst.*
Œuvres complètes B. 6) stößt er ja schon auf ihre spezielle Form im astronomischen
 Störungsproblem!