Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik

Winkelmann, Max

1909

Zusammenfassung

urn:nbn:de:bsz:31-270659

Koeffizienten gleich null sind. Also $\frac{\partial [a, b]}{\partial t} = 0$, wie es sein muß. Ähnlich werden $\frac{\partial (a, b)}{\partial t}$, $\frac{\partial [c, d]}{\partial t}$ und $\frac{\partial (c, d)}{\partial t} = 0$.

$$\beta) \qquad \frac{\partial [a, c]}{\partial t} = \begin{bmatrix} ac \\ ab \end{bmatrix} \frac{\partial (a, b)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ac \\ ac \end{bmatrix} \frac{\partial (a, c)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ac \\ ad \end{bmatrix} \frac{\partial (a, d)}{\partial t}$$
$$+ \begin{bmatrix} ac \\ bc \end{bmatrix} \frac{\partial (b, c)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ac \\ bd \end{bmatrix} \frac{\partial (b, d)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ac \\ cd \end{bmatrix} \frac{\partial (c, d)}{\partial t}.$$

Das erste und das letzte Glied verschwinden wieder; die Koeffizienten der vier mittleren werden:

$$\begin{bmatrix} ac \\ ac \end{bmatrix} = [a, c]^2 = \frac{1}{32} e^{-2\sqrt{2} i t}, \quad \begin{bmatrix} ac \\ ad \end{bmatrix} = [a, d][a, c] = -\frac{i}{32} e^{-\sqrt{2}(1+i)t},$$
$$\begin{bmatrix} ac \\ bc \end{bmatrix} = [a, c][b, c] = \frac{i}{32} e^{\sqrt{2}(1-i)t}, \quad \begin{bmatrix} ac \\ bd \end{bmatrix} = [a, d][b, c] = \frac{1}{32}.$$

Damit kommt:

$$\frac{\partial [a, c]}{\partial t} = -\frac{i}{8} e^{-i\sqrt{2}t} - \frac{1}{8} e^{-i\sqrt{2}t} + \frac{1}{8} e^{-i\sqrt{2}t} - \frac{i}{8} e^{-i\sqrt{2}t} = -\frac{i}{4} e^{-i\sqrt{2}t},$$

wie es sein muß. Ähnlich berechnen sich $\frac{\partial (a, c)}{\partial t}$ und die übrigen $2 \cdot 3$ Änderungsgeschwindigkeiten.

Zusammenfassung.

1. Es wird bewiesen, daß die *allgemeine* Form der Störungsgleichungen von Poisson und Lagrange besteht auch ohne die beschränkende Voraussetzung, daß die Grundkräfte ein Potential besitzen. Die unabhängige Herleitung beider Formeln erfordert eine für jede von ihnen eigentümliche Methode: Die zuerst von Poisson aufgestellten Gleichungen erhält man auf einem von Lagrange nur angedeuteten Wege, der den Impulsbegriff benutzt, wobei die Kräfte in die ihnen äquivalenten, infinitesimalen Stöße (gemessen durch das Element des Kraftantriebes) aufgelöst werden. So erscheint die Geschwindigkeit eines jeden Elementes (jeder willkürlichen Konstanten des ungestörten Problems) als lineare Funktion gewisser, aus den Störkraftkomponenten linear zusammengesetzter Größen; sie gehören als Faktoren zu den willkürlichen Verschiebungen der Elemente in dem Ausdruck der virtuellen Arbeit, die von den Störkräften bei jener Veränderung geleistet wird. Ihre Koeffizienten sind die Poissonschen [eckigen] Klammersymbole.

Für die Ableitung der zuerst von Lagrange aufgefundenen Form der Störungsgleichungen ist die Zentralgleichung charakteristisch. Ihre fundamentale Bedeutung für die theoretische Mechanik ist erst neuerdings erkannt worden, obgleich wir sie schon in der Mécanique Analytique vorgebildet finden. Die Lagrangeschen Störungsformeln sind die genauen Umkehrungen zu den Poissonschen; nämlich jede der oben erklärten Störungsgrößen ist ausgedrückt als lineare Funktion der Elementgeschwindigkeiten. Ihre Koeffizienten sind die Lagrangeschen (runden) Klammersymbole.

2. Die selbständige Bedeutung beider Formelsysteme wird noch ausdrücklich betont, um einer polemischen Bemerkung von Lagrange zu begegnen. Der Übergang von dem einen zum anderen kann direkt bewirkt werden, vermöge eines besonderen Zusammenhanges zwischen den beiden Klammersymbolen, der bereits von Jacobi erkannt worden ist. Aus dem von vornherein geforderten Anschluß der gestörten Bewegung an die ungestörte (vermöge der reinen Impulsion des Störungsprozesses, bei der die Koordinaten keine Störungen erleiden) ergibt sich noch die eigentümliche Beziehung, daß die Summe aus allen Produkten von je zwei zusammengehörigen Störungsgrößen und Elementgeschwindigkeiten verschwindet.

3. Der einzige, aber wesentliche Unterschied zwischen konservativen und allgemeinen, vom Systemzustande abhängenden Grundkräften in bezug auf die allgemeinen Störungsformeln besteht allein in dem Einfluß, den sie auf die funktionelle Gestalt der beiden Klammersymbole ausüben: Sind die Grundkräfte konservativ (genau gesprochen dürfen sie auch die Zeit explizite enthalten), so sind sämtliche Klammerausdrücke bloße Funktionen der Elemente. Der Beweis dieses wichtigen, von den beiden Begründern der Störungstheorie gefundenen Theorems wird von neuem auf eine direkte, für die beiden Gattungen der Klammersymbole konforme Weise geführt. Die Absicht, auch die Notwendigkeit dieser Bedingung zu erweisen — Lagrange und Poisson haben diesen Beweis nicht geliefert, obwohl der Erstere behauptete (M. A. **II**, p. 91): «..., puisqu'en dernière analyse les coefficients[1]) (a, b), (a, c) etc. doivent devenir des fonctions de a, b, c etc. sans t, *ce qui constitue l'essence et la force de cette analyse*» — führte uns zu der Aufgabe, überhaupt die Abhängigkeit der beiden Klammerausdrücke von der Zeit eingehender zu erforschen. Es ergab sich: Ihre Änderungsgeschwindigkeiten (d. h. die Ableitungen nach t bei konstant gehaltenen Elementen — die störenden Kräfte bleiben also hierbei ganz außer acht —) sind lineare Funktionen der Ableitungen aller Grundkraftkomponenten nach den sämtlichen Zustandsgrößen des Systems, die geordnet werden können in sogenannte „Impulsderivierten" und „Wirbelkomponenten des

1) Gemeint sind die jetzt gewöhnlich mit eckigen Klammern bezeichneten Poissonschen Ausdrücke.

Kraftfeldes". Jene bedeuten die Ableitungen nach den Impulskomponenten, diese eine Verallgemeinerung der für rechtwinklige Koordinaten in der mathematischen Physik bekannten, aus den Ableitungen der Kraftkomponenten nach den Systemkoordinaten gebildeten Ausdrücke.

4. Diese linearen Funktionen können aber nach jeder Impulsderivierten und Wirbelkomponente aufgelöst werden, so daß diese beiden wieder linear durch die Änderungsgeschwindigkeiten einerseits der Poissonschen, andererseits der Lagrangeschen Klammersymbole dargestellt sind. Und daraus folgt von selbst: Verschwinden *sämtliche* Zeitableitungen der Klammersymbole erster oder sämtliche der zweiten Art, so sind auch alle Impulsderivierten und Wirbelkomponenten des Systems null. Das sind aber die negativen Kennzeichen konservativer Kräfte.

5. Das weitere merkwürdige Resultat dieser Umkehrungsformeln besteht in der Möglichkeit, aus den bloßen, aber vollständigen Zustandsgleichungen des Systems auf die Art der eingeprägten Kräfte zurückzuschließen, und zwar können wir ermitteln: 1. ihre Abhängigkeit vom Impuls- und damit vom Geschwindigkeitszustande des Systems, 2. ihre Wirbelstellen im Kraftfelde. Die Rekonstruktion der Kräfte selbst aus diesen wesentlichen Eigenschaften ihres Feldes ist ein besonderes, noch unerledigtes Problem. Jedenfalls bleiben hierbei ihre konservativen Bestandteile unbestimmt.

Außer diesen beiden Formelsystemen gewinnt man bei jener Umkehrung als drittes noch eine Gruppe von linearen, homogenen Gleichungen zwischen den Änderungsgeschwindigkeiten jeder Gattung der Klammersymbole unter sich, ohne Beziehung zu den eingeprägten Kräften.

6. Die Änderungsgeschwindigkeiten der beiden Klammerausdrücke stehen in einer ähnlichen reziproken Beziehung zueinander, wie die Elementgeschwindigkeiten zu den den willkürlichen Verrückungen der Elemente zugehörigen Störungsgrößen. Dort treten an Stelle der Klammersymbole selbst als Koeffizienten aus solchen der entsprechenden Gattung zusammengesetzte Determinanten zweiten Grades auf. Ihre auffälligsten Eigenschaften sind entwickelt worden.

7. Darauf wurde noch einmal von der Zentralgleichung Gebrauch gemacht, um das sogenannte Lagrangesche Theorem direkt abzuleiten und zugleich die notwendige und hinreichende Bedingung seiner Existenz festzustellen: Die Summe über alle aus zusammengehörigen Zustandsgrößen des Systems gebildeten „Differentialdeterminanten" (Schering) ist dann, und nur dann, unabhängig von t, wenn die Kräfte konservativ sind. Dieses Theorem steht in engster Beziehung zur Störungstheorie