Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik

Winkelmann, Max

1909

C. Beispiel: Einfacher Typus eines gekoppelten Systems von zwei Freiheitsgraden [...]

urn:nbn:de:bsz:31-270659

die Zeit von dem Augenblick an zählen, wo die Störkräfte eingreifen. Die zu den veränderlichen Elementen $a_\varkappa$ der gestörten Bewegung gehörigen, willkürlichen Integrationskonstanten $a_\varkappa^0$ sind demnach die unveränderlichen Werte derselben Elemente in der Grundbewegung. Da in den Funktionen $f_\varkappa$ keine anderen Konstanten vorkommen, so erhalten wir durch Substitution des Ausdrucks (145) für die $a_\varkappa$ in den Zustandsgleichungen (3) oder (4) die vollständige Lösung des Störungsproblems in erster Annäherung. Dieses Verfahren trägt den Keim einer vollständigen Reihenentwicklung in sich. Wir brauchen es ja nur mit den neuen Zustandsgleichungen zu wiederholen. Ich begnüge mich mit dieser Skizze einer hinreichend bekannten Methode, die keinen anderen Zweck hatte, als zu zeigen, daß sie, unberührt von dem Charakter der Grundkräfte, insbesondere von dem Unterschied, ob die Klammerausdrücke die Zeit explizite enthalten oder nicht, auf die allgemeinen Störungsformeln ebenso anwendbar bleibt, wie sie es hinsichtlich der kanonischen Gleichungen immer gewesen ist.

C. Beispiel: Einfacher Typus eines gekoppelten Systems von zwei Freiheitsgraden der Bewegung ohne Dämpfung.

Um die ganze Theorie noch kurz an einem Beispiel ohne mathematische Verwicklungen durchzuführen, wollen wir die Differentialgleichungen für die kleinen Schwingungen eines sog. gekoppelten Systems mit zwei Freiheitsgraden[1]) in der einfachen Form

(146a) $$\ddot{x} - ky = 0, \qquad \ddot{y} + hx = 0$$

annehmen, worin wir die „Koppelungskoeffizienten“ k, h als *Größen mit demselben Vorzeichen* der Bequemlichkeit halber gleich 1 setzen können. Wenn also x, y die beiden Koordinaten des gekoppelten Systems bedeuten, sind

(146b) $$\ddot{x} - y = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{y} + x = 0$$

die simultanen Differentialgleichungen seiner ungestörten Bewegung; sie bestimmen die ungedämpften Eigenschwingungen. Deuten wir x, y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes mit der Einheit der Masse, so stellen auch die Gl. (146) die Bewegung des repräsentierenden Punktes in der Koordinatenebene dar, der einem nicht-konservativen Kraftfeld mit den Komponenten $X = +y$ und $Y = -x$ gehorcht.

1) Solche Systeme haben neuerdings das Interesse der Physiker wieder erregt. Ihre mechanische Theorie hat M. Wien in den Annalen der Physik (1897, N. F. **61**, 151) vollständig diskutiert, und die von ihm gebrauchte Terminologie scheint sehr zweckmäßig zu sein. In der Wellentelegraphie sind Sender und Empfänger mit ihren Antennen Beispiele. Auch schwingende Schraubenfedern sind interessante Fälle dieser Art. Vgl. A. Sommerfeld, Wüllner-Festschrift. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Wirken außerdem Störkräfte mit den rechtwinkligen Komponenten X, Y' ein, so lauten die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung

$$\ddot{x} - y = \dot{X}', \qquad \ddot{y} + x = Y'. \tag{147}$$

Die vollständige Lösung (146) wollen wir der Bequemlichkeit halber in der komplexen Form angeben, welche die zugehörige determinierende Gleichung

$$\lambda^4 + 1 = 0 \tag{148}$$

direkt liefert. Die Wurzeln derselben sind

$$\lambda_1 = \frac{i+1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = -\frac{i+1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_3 = \frac{i-1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_4 = -\frac{i-1}{\sqrt{2}}, \tag{149}$$

und ihnen entsprechend erhalten wir die komplexen Zustandsgleichungen[1] in der Lagrangeschen Form (4), wenn wir noch abgekürzt setzen:

$$e_h = e^{\lambda_h t}, \qquad h \text{ von 1 bis 4} \tag{150}$$

$$\begin{cases} x = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4, & \dot{x} = \lambda_1 ae_1 - \lambda_1 be_2 + \lambda_3 ce_3 - \lambda_3 de_4 \\ y = iae_1 + ibe_2 - ice_3 - ide_4, & \dot{y} = i\lambda_1 ae_1 - i\lambda_1 be_2 - i\lambda_3 ce_3 + i\lambda_3 de_4. \end{cases} \tag{151}$$

Die zu x, y gehörigen Impulskomponenten sind mit $\dot{x}$ bzw. $\dot{y}$ identisch. a, b, c, d sind die vier Elemente der Bewegung. Werden die Gl. (151) nach ihnen aufgelöst, so erscheinen die Zustandsgleichungen in der Poissonschen Form (3):

$$\begin{cases} a = \frac{e_2}{4}(z' - \lambda_3 \dot{z}'), & c = \frac{e_4}{4}(z - \lambda_1 \dot{z}) \\ b = \frac{e_1}{4}(z' + \lambda_3 \dot{z}'), & d = \frac{e_3}{4}(z + \lambda_1 \dot{z}), \end{cases} \tag{152}$$

worin z, z' die aus x, y gebildeten, konjugiert-komplexen Größen

$$z = x + iy, \quad z' = x - iy \tag{153}$$

bedeuten. Aus (151) leiten sich die Poissonschen, aus (152) die Lagrangeschen Klammersymbole, sechs von jeder Art, her, die wir hier zusammenstellen wollen:

$$\begin{aligned}
&[a, b] = 0, && (a, b) = 0 \\
&[a, c] = +\frac{\sqrt{2}}{8} e^{-i\sqrt{2}t}, && (a, c) = -2\sqrt{2} e^{+i\sqrt{2}t} \\
&[a, d] = -i\frac{\sqrt{2}}{8} e^{-\sqrt{2}t}, && (a, d) = -2i\sqrt{2} e^{+\sqrt{2}t} \\
&[b, c] = +i\frac{\sqrt{2}}{8} e^{+\sqrt{2}t}, && (b, c) = +2i\sqrt{2} e^{-\sqrt{2}t} \\
&[b, d] = -\frac{\sqrt{2}}{8} e^{+i\sqrt{2}t}, && (b, d) = +2\sqrt{2} e^{-i\sqrt{2}t} \\
&[c, d] = 0, && (c, d) = 0.
\end{aligned} \tag{154}$$

1) Die reelle Lösung läßt sich ja leicht daraus ableiten, z. B. in der Form:
$x = me^{-\tau}\sin(\tau + \varepsilon) + m'e^{\tau}\sin(\tau + \varepsilon')$, $y = -me^{-\tau}\cos(\tau + \varepsilon) + m'e^{\tau}\cos(\tau + \varepsilon')$,
wo
$$\tau = \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

In vier Klammerausdrücken jeder Art tritt also die Zeit explizite auf, weil die Komponenten X, Y sich nicht als Ableitungen einer Kräftefunktion darstellen lassen. Die Werte der 10 Unstetigkeitsfaktoren

$$\varepsilon_{aa} = \varepsilon_{bb} = \varepsilon_{cc} = \varepsilon_{dd} = 1$$

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{ac} = \varepsilon_{ad} = \varepsilon_{bc} = \varepsilon_{bd} = \varepsilon_{cd} = 0$$

werden aus (154) nach (64) leicht bestätigt.

Die Störkräfte wollen wir uns als reine Zeitkräfte vorstellen, indem wir

$$X' = g(t), \quad Y' = h(t)$$

setzen. Alsdann existiert eine Störungsfunktion

$$\Omega = gx + hy,$$

aus der die Störungsgrößen

$$(157)\quad A = \frac{\partial \Omega}{\partial a} = f e_1, \quad B = \frac{\partial \Omega}{\partial b} = f e_2, \quad C = \frac{\partial \Omega}{\partial c} = f' e_3, \quad D = \frac{\partial \Omega}{\partial d} = f' e_4$$

bequem folgen. Hierbei haben wir aus g, h die konjugiert-komplexen Größen

$$(158)\qquad g + ih = f, \quad g - ih = f'$$

gebildet. Die Poissonschen Störungsformeln ergeben für die Variation der vier Elemente:

$$(159)\quad \begin{aligned} \dot{a} &= [a, b]\,B + [a, c]\,C + [a, d]\,D = \frac{\lambda_4}{4} f' e_2 \\ \dot{b} &= [b, a]\,A + [b, c]\,C + [b, d]\,D = \frac{\lambda_3}{4} f' e_1 \\ \dot{c} &= [c, a]\,A + [c, b]\,B + [c, d]\,D = \frac{\lambda_2}{4} f e_4 \\ \dot{d} &= [d, a]\,A + [d, b]\,B + [d, c]\,C = \frac{\lambda_1}{4} f e_3. \end{aligned}$$

Nun sind auch die Elemente selbst durch Integration nach t als Zeitfunktionen bekannt. Ihre Einführung in die Bewegungsgleichungen (151) des ungestörten Systems scheidet die Eigenbewegungen desselben von den durch die Störkräfte g, h erzwungenen. Diese lassen sich leicht mit Benutzung der Komplexen z, z' in die Form

$$(160)\quad \begin{cases} z_g = \dfrac{\lambda_1}{2} \displaystyle\int_0^t f(\tau)\, d\tau \left\{ e^{\lambda_4 (t-\tau)} - e^{\lambda_3 (t-\tau)} \right\} \\ z'_g = \dfrac{\lambda_3}{2} \displaystyle\int_0^t f'(\tau)\, d\tau \left\{ e^{\lambda_2 (t-\tau)} - e^{\lambda_1 (t-\tau)} \right\} \end{cases}$$

kleiden, während jene nach (151, 153) sind:

$$z_f = 2(c'e_3 + d'e_4), \quad z'_f = 2(a'e_1 + b'e_2), \tag{161}$$

so daß

$$z = z_f + z_g, \quad z' = z'_f + z'_g \tag{162}$$

die vollständige Lösung des gestörten Problems in komplexer Form ist. Die Akzente sollen nur die Unveränderlichkeit der Größen a bis d ausdrücken. Bei diesem ganzen Rechengeschäft mag man alle Vorteile wahrnehmen, welche die Beziehungen zwischen den Wurzeln der binomischen Gleichung (148) fast von selbst darbieten. Die Zerlegung der Ausdrücke (160) in reelle Bestandteile können wir hier füglich unterlassen. Es müssen vermöge des Anschlusses der gestörten Bewegung an die ungestörte die Gleichungen

$$\mathfrak{d}x = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{d}y = 0 \tag{163}$$

erfüllt sein. In der Tat ist

$$\frac{\mathfrak{d}x}{\mathfrak{d}t} = \frac{\partial x}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial x}{\partial b}\dot{b} + \frac{\partial x}{\partial c}\dot{c} + \frac{\partial x}{\partial d}\dot{d} = \frac{f'}{4}(\lambda_3 + \lambda_4) + \frac{f}{4}(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$$

$$\frac{\mathfrak{d}y}{\mathfrak{d}t} = \frac{\partial y}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial y}{\partial b}\dot{b} + \frac{\partial y}{\partial c}\dot{c} + \frac{\partial y}{\partial d}\dot{d} = \frac{if'}{4}(\lambda_3 + \lambda_4) - \frac{if}{4}(\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$

Da die Grundkräfte X, Y bloß vom Orte abhängen, so besteht der lineare Zusammenhang mit den Änderungsgeschwindigkeiten der Klammersymbole allein in der Wirbelkomponente $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$ auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [a, b]}{\partial t} &= \left(\frac{\partial a}{\partial \dot{x}}\frac{\partial b}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial a}{\partial \dot{y}}\frac{\partial b}{\partial \dot{x}}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial (a, b)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{164}$$

Wenn wir dies für alle Klammersymbole ausführen, so erhalten wir dieselben Werte wie durch direkte Zeitdifferentiation der Ausdrücke (154).

Nehmen wir jetzt an, daß uns allein die Zustandsgleichungen des Systems in den Formen (151) und (152) bekannt seien, so finden wir rückwärts die Eigenschaften des Kraftfeldes nach den Fundamentalformeln (98, 99) des 6. Abschnittes.

I) Sind Wirbelkomponenten des Kraftfeldes vorhanden? (98) antwortet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial a}\frac{\partial \dot{y}}{\partial b} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial a}\frac{\partial \dot{x}}{\partial b}\right)\frac{\partial [a, b]}{\partial t} + \cdots, \quad \text{oder auch} \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}\right)\frac{\partial (a, b)}{\partial t} + \cdots = +2. \end{aligned} \tag{165}$$

II) Sind Impulsderivierten der Kraftkomponenten vorhanden? (99) antwortet:

$$(166)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial \dot x} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial \dot x}{\partial b} - \dfrac{\partial \dot x}{\partial a}\dfrac{\partial x}{\partial b}\right)\dfrac{\partial [a,b]}{\partial t} + \cdots = \left(\dfrac{\partial a}{\partial x}\dfrac{\partial b}{\partial \dot x} - \dfrac{\partial a}{\partial \dot x}\dfrac{\partial b}{\partial x}\right)\dfrac{\partial (a,b)}{\partial t} + \cdots = 0 \\ \dfrac{\partial X}{\partial \dot y} = \left(\dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial \dot x}{\partial b} - \dfrac{\partial \dot x}{\partial a}\dfrac{\partial y}{\partial b}\right)\dfrac{\partial [a,b]}{\partial t} + \cdots = \left(\dfrac{\partial a}{\partial x}\dfrac{\partial b}{\partial \dot y} - \dfrac{\partial a}{\partial \dot y}\dfrac{\partial b}{\partial x}\right)\dfrac{\partial (a,b)}{\partial t} + \cdots = 0 \\ \dfrac{\partial Y}{\partial \dot x} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial \dot y}{\partial b} - \dfrac{\partial \dot y}{\partial a}\dfrac{\partial x}{\partial b}\right)\dfrac{\partial [a,b]}{\partial t} + \cdots = \left(\dfrac{\partial a}{\partial y}\dfrac{\partial b}{\partial \dot x} - \dfrac{\partial a}{\partial \dot x}\dfrac{\partial b}{\partial y}\right)\dfrac{\partial (a,b)}{\partial t} + \cdots = 0 \\ \dfrac{\partial Y}{\partial \dot y} = \left(\dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial \dot y}{\partial b} - \dfrac{\partial \dot y}{\partial a}\dfrac{\partial y}{\partial b}\right)\dfrac{\partial [a,b]}{\partial t} + \cdots = \left(\dfrac{\partial a}{\partial y}\dfrac{\partial b}{\partial \dot y} - \dfrac{\partial a}{\partial \dot y}\dfrac{\partial b}{\partial y}\right)\dfrac{\partial (a,b)}{\partial t} + \cdots = 0. \end{cases}$$

Als Kontrollformeln dienen uns aber

III) die Relationen (100):

$$(167)\quad \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\right)\frac{\partial [a,b]}{\partial t} + \cdots = \left(\frac{\partial a}{\partial \dot x}\frac{\partial b}{\partial \dot y} - \frac{\partial a}{\partial \dot y}\frac{\partial b}{\partial \dot x}\right)\frac{\partial (a,b)}{\partial t} + \cdots = 0.$$

In unserem Beispiel waren also $2 \cdot n(2n-1) = 12$ Formeln zu berechnen.

X, Y sind hiermit als rein vom Ort abhängige Kräfte erkannt, die der Bedingung

$$(168)\qquad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 2$$

unterliegen. Diese partielle Differentialgleichung wird aber befriedigt durch die allgemeine Lösung

$$(169)\qquad X = y + \frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = -x + \frac{\partial V}{\partial y},$$

worin V eine notwendig unbestimmte Kräftefunktion bedeutet.

Der Zusammenhang der Klammerausdrücke mit ihren Änderungsgeschwindigkeiten, wie er in den Formeln (94, 99) des 7. Abschnittes ausgedrückt ist, wird durch einfache Rechnungen bestätigt. Es ist überflüssig, das vollständige System der $2 \cdot 6$ Gleichungen in der besonderen Form unseres Beispiels herzusetzen; es mag genügen, zwei der typischen hinzuschreiben:

$$\alpha)\qquad \frac{\partial [a,b]}{\partial t} = \begin{bmatrix} ab \\ ab \end{bmatrix}\frac{\partial (a,b)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ab \\ ac \end{bmatrix}\frac{\partial (a,c)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ab \\ ad \end{bmatrix}\frac{\partial (a,d)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ab \\ bc \end{bmatrix}\frac{\partial (b,c)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ab \\ bd \end{bmatrix}\frac{\partial (b,d)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}\frac{\partial (c,d)}{\partial t}$$

und die reziproke mit vertauschten Klammern. Das erste und das letzte Glied verschwinden wegen $(a, b) = (c, d) = 0$, die übrigen, weil die