Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik

Winkelmann, Max

1909

B. Die allgemeine Näherungsmethode

urn:nbn:de:bsz:31-270659

Hamilton und Jacobi[1]) haben übrigens nachgewiesen, daß Ω außer den Koordinaten q auch die Impulskomponenten p enthalten darf.

Sind außerdem die Grundkräfte konservativ, und nehmen wir wieder die Anfangswerte der Zustandsgrößen als kanonische Elemente, so erhalten wir an Stelle von (136) die eigentlichen kanonischen Störungsformeln der Astronomie:

$$\frac{da_\nu}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b_\nu}, \quad \frac{db_\nu}{dt} = +\frac{\partial \Omega}{\partial a_\nu}. \tag{143}$$

B. Die allgemeine Näherungsmethode.

Das Störungsproblem ist somit seiner analytischen Natur nach auf ein System simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung für die veränderlichen Elemente zurückgeführt, ihre Form sei nun die allgemein gültige oder die unter A. für konservative Grundkräfte entwickelte kanonische (136, 143). Denn im allgemeinen werden die Störungsgrößen A auch Funktionen der Elemente.

Diese Gleichungen erfreuen sich (innerhalb der getroffenen Voraussetzungen) vollkommen mathematischer Strenge. Wie aber schon in der Einleitung hervorgehoben ist, gewähren sie den wahren Nutzen für die Bestimmung der gestörten Bewegung erst durch ihre, stets mögliche, angenäherte Auflösung. Ein schon von den Erfindern der Störungsrechnung ausgearbeitetes, allgemein geltendes Verfahren[2]) besteht nun kurz darin: Sind die Störkräfte relativ klein, so sind sie von entsprechend langsamen Veränderungen der Elemente begleitet. Wir können sie selbst also in erster Annäherung konstant setzen, nachdem die Klammersymbole und Störungsgrößen als Funktionen der Elemente und der Zeit ausdrücklich berechnet worden sind. Dann werden sämtliche Elementgeschwindigkeiten offenbar nur noch reine Zeitfunktionen, z. B.

$$\dot{a}_\varkappa = f_\varkappa(t), \tag{144}$$

woraus durch reine Quadratur nach t folgt

$$a_\varkappa = \int f_\varkappa dt + a_\varkappa^0, \tag{145}$$

d. h. der zeitliche Verlauf des Elements ist bekannt, das Ziel, welches wir erreichen wollten. Die Integration beginnt mit $t = 0$, indem wir

1) Jacobi in der schon S. 32 zitierten, nachgelassenen Abhandlung p. 338. Hamilton, l. c. (Fußnote S. 19).

2) Lagrange M. A. Sec. Part. Sect. V, 15 **I**, p. 336—339. Im übrigen ist diese Methode nicht zwingend. An ihre Stelle kann irgend ein anderes Verfahren treten, z. B. der von Runge (Math. Ann. **46** (1895)) und Heun (Zeitschr. f. Math. u. Phys. **45** (1898)) nach dem Vorbilde der mechanischen Quadratur erfundene Algorithmus. Vgl. auch Kin. Probl. p. 116.

die Zeit von dem Augenblick an zählen, wo die Störkräfte eingreifen. Die zu den veränderlichen Elementen $a_\varkappa$ der gestörten Bewegung gehörigen, willkürlichen Integrationskonstanten $a_\varkappa^0$ sind demnach die unveränderlichen Werte derselben Elemente in der Grundbewegung. Da in den Funktionen $f_\varkappa$ keine anderen Konstanten vorkommen, so erhalten wir durch Substitution des Ausdrucks (145) für die $a_\varkappa$ in den Zustandsgleichungen (3) oder (4) die vollständige Lösung des Störungsproblems in erster Annäherung. Dieses Verfahren trägt den Keim einer vollständigen Reihenentwicklung in sich. Wir brauchen es ja nur mit den neuen Zustandsgleichungen zu wiederholen. Ich begnüge mich mit dieser Skizze einer hinreichend bekannten Methode, die keinen anderen Zweck hatte, als zu zeigen, daß sie, unberührt von dem Charakter der Grundkräfte, insbesondere von dem Unterschied, ob die Klammerausdrücke die Zeit explizite enthalten oder nicht, auf die allgemeinen Störungsformeln ebenso anwendbar bleibt, wie sie es hinsichtlich der kanonischen Gleichungen immer gewesen ist.

C. Beispiel: Einfacher Typus eines gekoppelten Systems von zwei Freiheitsgraden der Bewegung ohne Dämpfung.

Um die ganze Theorie noch kurz an einem Beispiel ohne mathematische Verwicklungen durchzuführen, wollen wir die Differentialgleichungen für die kleinen Schwingungen eines sog. gekoppelten Systems mit zwei Freiheitsgraden[1]) in der einfachen Form

(146a) $$\ddot{x} - ky = 0, \qquad \ddot{y} + hx = 0$$

annehmen, worin wir die „Koppelungskoeffizienten“ k, h als *Größen mit demselben Vorzeichen* der Bequemlichkeit halber gleich 1 setzen können. Wenn also x, y die beiden Koordinaten des gekoppelten Systems bedeuten, sind

(146b) $$\ddot{x} - y = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{y} + x = 0$$

die simultanen Differentialgleichungen seiner ungestörten Bewegung; sie bestimmen die ungedämpften Eigenschwingungen. Deuten wir x, y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes mit der Einheit der Masse, so stellen auch die Gl. (146) die Bewegung des repräsentierenden Punktes in der Koordinatenebene dar, der einem nicht-konservativen Kraftfeld mit den Komponenten $X = +y$ und $Y = -x$ gehorcht.

1) Solche Systeme haben neuerdings das Interesse der Physiker wieder erregt. Ihre mechanische Theorie hat M. Wien in den Annalen der Physik (1897, N. F. **61**, 151) vollständig diskutiert, und die von ihm gebrauchte Terminologie scheint sehr zweckmäßig zu sein. In der Wellentelegraphie sind Sender und Empfänger mit ihren Antennen Beispiele. Auch schwingende Schraubenfedern sind interessante Fälle dieser Art. Vgl. A. Sommerfeld, Wüllner-Festschrift. Leipzig 1905, B. G. Teubner.