Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik

Winkelmann, Max

1909

8. Das Lagrangesche Theorem

urn:nbn:de:bsz:31-270659

Der Unstetigkeitsfaktor $\varepsilon_{\substack{\varkappa\,\lambda\\ \varkappa'\lambda'}}$ *ist aus den Unstetigkeitsfaktoren* $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ *in ganz derselben Weise zusammengesetzt wie die Symbole* $\begin{bmatrix}\varkappa\,\lambda\\ \varkappa'\lambda'\end{bmatrix}$ *bzw.* $\begin{pmatrix}\varkappa\,\lambda\\ \varkappa'\lambda'\end{pmatrix}$ *aus den Klammersymbolen* $[a_\varkappa, a_\lambda]$ *bzw.* $(a_\varkappa, a_\lambda)$.

Damit haben wir die allgemeine Untersuchung über die Abhängigkeit der Klammersymbole von der Zeit vollendet. Der praktische Nutzen, den die Relationen (108, 113) gewähren können, scheint zunächst nur in der Kontrolle zu liegen, die sie auf die vollständig berechneten Klammerausdrücke beider Arten ausüben.

8. Das Lagrangesche Theorem.

Dieses Theorem[1]) besteht in einer allgemeinen Relation zwischen den Variationen der Elemente, ist allein der Lagrangeschen Störungstheorie eigentümlich und steht zu den Überlegungen des fünften Abschnittes in einer so nahen Verwandtschaft, daß wir seine Resultate aus ihm unmittelbar wiedergewinnen werden. Nur dürfen wir uns nicht von vornherein auf konservative Grundkräfte einschränken.

Wir gehen wieder von der Zentralgleichung aus, in der Form (38):

$$\frac{d}{dt}\sum_\nu p_\nu \delta q_\nu = \delta T + \delta \mathsf{A}.$$

Führt man die Zustandsgleichungen (4) ein, fordert aber, daß die Zeitdifferentiation des ersten Gliedes so erfolge, als wenn die Elemente konstant wären, so geht die Zentralgleichung über in die der Grundbewegung, und zwar in der Gestalt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_\nu p_\nu D q_\nu = D(T) + D\mathfrak{A}. \tag{119}$$

Die virtuellen Verrückungen δ sind jetzt solche geworden, die aus virtuellen Variationen der Elemente hervorgehen. Ich habe, um dies auszudrücken, für δ das Zeichen D gesetzt. Möge $\varDelta$ eine andere Verrückung derselben Art[2]) bedeuten, so gilt für eine beliebige Funktion der Elemente, wie leicht zu beweisen,

$$\varDelta D F = D \varDelta F, \tag{120}$$

1) M. A. Sec. Part. Sect. V § 1 I p. 328 (noch nicht in den Abhandlungen). Poisson (Mém. 1816) beweist es für die elementaren Bewegungsgleichungen in den rechtwinkligen Koordinaten der Systempunkte, wenn diese noch durch Bedingungsgleichungen verknüpft sind, und sagt dann (p. 10): „M. Lagrange donne, dans la seconde édition de la mécanique analytique, une formule analogue à notre équation (1), qui se confond avec elle, quand les mobiles sont libres, mais qui en diffère essentiellement, lorsqu'il s'agit d'un système de points lié entre eux d'une manière quelconque".

2) Diese Verrückungen sind natürlich identisch mit den S. 16 erklärten.

d. h. die Vertauschbarkeit der nacheinander an F vorgenommenen Operationen $\varDelta, D$. Die Operation $\varDelta$ wenden wir jetzt auf Gl. (119) an, indem aus ihrer Unabhängigkeit von der Zeitdifferentiation folgt:

$$(121)\quad \varDelta\frac{\partial}{\partial t}\sum_\nu p_\nu Dq_\nu = \frac{\partial}{\partial t}\sum_\nu\{\varDelta p_\nu Dq_\nu + p_\nu\varDelta Dq_\nu\} = \varDelta D(T) + \varDelta D\mathfrak{A}.$$

Die Gl. (119) gilt auch, wenn D mit $\varDelta$ vertauscht wird:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_\nu p_\nu\varDelta q_\nu = \varDelta(T) + \varDelta\mathfrak{A};$$

darauf die D-Operation ausgeübt:

$$(122)\quad D\frac{\partial}{\partial t}\sum_\nu p_\nu\varDelta q_\nu = \frac{\partial}{\partial t}\sum_\nu\{Dp_\nu\varDelta q_\nu + p_\nu D\varDelta q_\nu\} = D\varDelta(T) + D\varDelta\mathfrak{A}.$$

Vor q_ν und (T) dürfen nach (120) die Zeichen $D, \varDelta$ vertauscht werden. Wenn daher (122) von (120) subtrahiert wird, bleibt als Rest die Gleichung

$$(123)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\sum_\nu(\varDelta p_\nu Dq_\nu - Dp_\nu\varDelta q_\nu) = \varDelta D\mathfrak{A} - D\varDelta\mathfrak{A}.$$

Die Größen $\varDelta D\mathfrak{A}$ und $D\varDelta\mathfrak{A}$ sind einander nur gleich und die rechte Seite von (123) verschwindet, wenn die endliche Arbeit $\mathfrak{A}$ als Funktion der Elemente existiert, oder wenn die Grundkräfte P ein Potential besitzen. Im allgemeinen aber wird, wenn wir auf die Bedeutung von $\delta\mathfrak{A}$ (45) zurückgehen,

$$\varDelta D\mathfrak{A} = \sum_\nu\{\varDelta P_\nu Dq_\nu + P_\nu\varDelta Dq_\nu\},\quad D\varDelta\mathfrak{A} = \sum_\nu\{DP_\nu\varDelta q_\nu + P_\nu D\varDelta q_\nu\},$$

folglich

$$(124)\qquad \varDelta D\mathfrak{A} - D\varDelta\mathfrak{A} = \sum_\nu(\varDelta P_\nu Dq_\nu - DP_\nu\varDelta q_\nu),$$

und damit

$$(125)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\sum_\nu(\varDelta p_\nu Dq_\nu - Dp_\nu\varDelta q_\nu) = \sum_\nu(\varDelta P_\nu Dq_\nu - DP_\nu\varDelta q_\nu).$$

Das Glied der auf beiden Seiten befindlichen Summe heißt nach Schering[1]) eine (zweigliedrige) Differentialdeterminante, und mit Hilfe dieses Begriffes fassen wir den Inhalt der Relation (125) zusammen in die Worte:

Die Änderungsgeschwindigkeit der Summe aller aus zusammengehörigen Paaren der Zustandsgrößen q, p gebildeten Differentialdeterminanten ist gleich der Summe aller aus zusammengehörigen Paaren der Kraftkomponenten P und der Koordinaten q gebildeten Differentialdeterminanten.

1) Hamilton-Jacobische Theorie (siehe Fußnote S. 18), p. 39.

Wir führen die Variationen von P_ν, die allein aus den Variationen sämtlicher Zustandsgrößen entspringen können (s. Einl. S. 5), aus und erhalten:

$$\varDelta P_\nu = \sum_\varrho \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho}\varDelta q_\varrho + \frac{\partial P_\nu}{\partial p_\varrho}\varDelta p_\varrho\right),\quad DP_\nu = \sum_\varrho \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho} Dq_\varrho + \frac{\partial P_\nu}{\partial p_\varrho} Dp_\varrho\right).$$

Darauf bilden wir die Determinante $\varDelta P_\nu Dq_\nu - DP_\nu \varDelta q_\nu$ und summieren über alle ν:

$$(126)\quad \sum_\nu (\varDelta P_\nu Dq_\nu - DP_\nu \varDelta q_\nu) = \sum_\nu\sum_\varrho \Big\{(\varDelta p_\varrho Dq_\nu - Dp_\varrho \varDelta q_\nu)\frac{\partial P_\nu}{\partial p_\varrho} + (\varDelta q_\varrho Dq_\nu - Dq_\varrho \varDelta q_\nu)\frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho}\Big\}.$$

Indem wir wieder den zweiten Teil der Doppelsumme in bekannter Weise umformen, erscheint:

$$(127)\quad \frac{\partial}{\partial t}\sum_\nu (\varDelta p_\nu Dq_\nu - Dp_\nu \varDelta q_\nu) = \sum_\nu\sum_\varrho \Big\{(\varDelta p_\varrho Dq_\nu - Dp_\varrho \varDelta q_\nu)\frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho} + \tfrac{1}{2}(\varDelta q_\varrho Dq_\nu - Dq_\varrho \varDelta q_\nu)\left(\frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho} - \frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu}\right)\Big\}.$$

Das heißt also:

Die eben beschriebene Änderungsgeschwindigkeit drückt sich linear aus durch die Impulsderivierten und Wirbelkomponenten der Systemkräfte. Die Koeffizienten sind Differentialdeterminanten von Paaren p_ϱ, q_ν, bzw. q_ϱ, q_ν der Zustandsgrößen des Systems.

Soll diese Änderungsgeschwindigkeit verschwinden, so müssen wegen der Willkür der Variationen $\varDelta$ und D die sämtlichen Impulsderivierten und Wirbelkomponenten gleich null werden. Der *vollständige* Gehalt des Lagrangeschen Theorems ist demnach:

Der Ausdruck

$$\sum_\nu (\varDelta p_\nu Dq_\nu - Dp_\nu \varDelta q_\nu)$$

ist dann, und nur dann, explizite unabhängig von der Zeit und eine bloße Funktion der Elemente, wenn die Kräfte des Systems konservativ sind.

Lagrange selber legt ihm noch folgende Bedeutung bei[1]): „Ce qui est une nouvelle propriété très remarquable de la fonction T[2]), qui représente la force vive de tout le système, et ce qui peut fournir

1) l. c. **I**, p. 329.

2) Wegen $p = \frac{\partial T}{\partial \dot q}$. Es fehlte ihm die selbständige Bedeutung der Impulskomponenten [vgl. S. 15, Fußnote].

un critère général pour juger de l'exactitude d'une solution trouvée par quelque méthode que ce soit."

Zergliedere ich (127) noch weiter, indem ich auf die Variationen der Elemente selbst zurückgehe, so entwickelt sich vermöge (28a) und der Bezeichnungen (88) daraus:

$$(128)\qquad \sum_{\varkappa}\sum_{\lambda} Da_{\varkappa}\Delta a_{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\nu}\frac{\partial\{q_{\nu}, p_{\nu}\}}{\partial\{a_{\varkappa}, a_{\lambda}\}}$$
$$= \sum_{\varkappa}\sum_{\lambda} Da_{\varkappa}\Delta a_{\lambda}\cdot\sum_{\nu}\sum_{\varrho}\left\{\frac{\partial\{q_{\nu}, p_{\varrho}\}}{\partial\{a_{\varkappa}, a_{\lambda}\}}P'_{\nu\varrho} + \frac{1}{2}\frac{\partial\{q_{\nu}, q_{\varrho}\}}{\partial\{a_{\varkappa}, a_{\lambda}\}}P_{\nu\varrho}\right\},$$

und durch Vergleich der Koeffizienten von $Da_{\varkappa}\,\Delta a_{\lambda}$ leicht die im fünften Abschnitt entwickelte Fundamentalformel der Lagrangeschen Störungstheorie. Zugleich erkennen wir aber auch aus (127) und (128) wegen der Willkür der Änderungen $Da_{\varkappa}\,\Delta a_{\lambda}$ direkt ohne das im siebenten Abschnitte gebrauchte, umständliche Verfahren, daß sämtliche $\frac{\partial(a_{\varkappa}, a_{\lambda})}{\partial t}$ nur verschwinden können, wenn es zugleich alle $P_{\nu\varrho}$ und $P'_{\nu\varrho}$ tun. Das war das vollständige Fundamentaltheorem über das Lagrangesche Klammersymbol.

9. Reduktion der Störungsgleichungen auf die kanonische Form. Die allgemeine Näherungsmethode. Beispiel.

A. Die Ableitung der kanonischen Form.

Während wir bisher gezeigt haben, daß die allgemeine Form der Störungsgleichungen weder eine Beschränkung in der Art der störenden, noch eine andere, als die in der Einleitung gemachte Voraussetzung, in der Art der Grundkräfte erfordert, daß die Grundkräfte allein die Abhängigkeit der in den Störungsformeln auftretenden Koeffizienten von der Zeit beeinflussen, erörtern wir nunmehr ihr Verhältnis zu den Voraussetzungen der klassischen Theorie, d. h. die Vereinfachungen, die sich aus der Beschränkung

1. auf konservative Grundkräfte
2. auf konservative Störkräfte

ergeben.

1. Lassen die Grundkräfte ein räumliches Potential zu, so führt eine spezielle Wahl der Elemente zur sogenannten kanonischen Form der Störungsgleichungen Diese besonderen Werte bilden eben deshalb ein kanonisches System der Elemente. Lagrange[1]) hat diese kanoni-

1) Es ist immer noch die irrtümliche Meinung verbreitet, daß sie erst von Hamilton 1837 entdeckt worden sei.