Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik

Winkelmann, Max

1909

7. Relationen, welche zwischen den beiden Klammersymbolen und ihren [...]

von 0 verschieden ist. Δ ist aber die Determinante der quadratischen Form, in der sich die konjugierte Energieform T' vermöge der p darstellt. Sei

$$T' = \sum_{\varrho\sigma} B_{\varrho\sigma} p_\varrho p_\sigma, \tag{103}$$

so bedeuten die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 T'}{\partial p_\varrho \partial p_\sigma}$ die Koeffizienten $B_{\varrho\sigma}$ der quadratischen Form, und es ist

$$\Delta = |B_{\varrho\sigma}|. \tag{104}$$

Würde jedoch Δ verschwinden, so wäre (89) T' eine sogenannte singuläre, quadratische Form und zwischen den Größen $\frac{\partial T'}{\partial p_\varrho}$ würde eine lineare, homogene Relation bestehen[1]), d. h. wegen $\frac{\partial T'}{\partial p_\varrho} = \dot{q}_\varrho$ eine solche zwischen den Geschwindigkeitskomponenten $\dot{q}_\varrho$, was der Festsetzung über die Unabhängigkeit der Koordinaten zuwiderläuft. Mithin sind alle $\frac{\partial P_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0$ q. e. d.

Dieser Satz kann auch umgekehrt werden. Der Beweis verläuft ähnlich vermittels der Energieform T.

7. Relationen, welche zwischen den beiden Klammersymbolen und ihren Änderungsgeschwindigkeiten bestehen.

Daß wir die Änderungsgeschwindigkeiten der beiden Klammerausdrücke untereinander ohne Vermittlung der Kraftkomponenten oder ihrer Ableitungen nach den Zustandsgrößen des Systems in Beziehung setzen können, wird sogleich aus dem Formelsystem (I)—(III) (98—100) erkannt. Wir brauchen darin ja nur die einander entsprechenden Glieder jeder Gleichung vermöge der Übereinstimmung der ersten Glieder (der Wirbelkomponenten und Impulsderivierten) miteinander zu vergleichen. Es fragt sich dann: Wie drücken sich die Zeitderivierten der $[a_\varkappa, a_\lambda]$ einzeln durch die Zeitderivierten der $(a_\varkappa, a_\lambda)$ und umgekehrt linear aus? Zu diesem Zwecke gehen wir nicht von den erwähnten Relationen aus, sondern von den im 4. und 5. Abschnitt hergestellten Ausdrücken der beiden Arten von Änderungsgeschwindigkeiten.

1) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten (5. Auflage 1881) § 13, Nr. 10.

1. Wir beginnen mit dem **Poissonschen** Symbol, indem wir die Formel (76) oder lieber in der Gestalt (89a) folgendermaßen identisch erweitern:

$$\tag{105} \begin{aligned} \frac{\partial[a_\varkappa, a_\lambda]}{dt} = \sum_\nu \sum_\varrho \Big\{ & \Big(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\varrho}\Big) P'_{\nu\varrho} \\ & + \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\Big) P_{\nu\varrho} + \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\varrho} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu}\Big) 0 \Big\}. \end{aligned}$$

Für $P'_{\nu\varrho}$ und 0 substituieren wir diejenigen Ausdrücke des Systems I—III, die nur die **Lagrangeschen** Symbole enthalten. Nämlich:

$$\tag{106} \begin{cases} (93) & P'_{\nu\varrho} = \displaystyle\sum_{\varkappa', \lambda'} \Big(\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial p_\varrho}\frac{\partial q_{\lambda'}}{\partial q_\nu}\Big)\frac{\partial(a_{\varkappa'}, a_{\lambda'})}{\partial t} \\ (91) & P_{\nu\varrho} = \displaystyle\sum_{\varkappa', \lambda'} \Big(\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial q_\varrho} - \frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial q_\nu}\Big)\frac{\partial(a_{\varkappa'}, a_{\lambda'})}{\partial t} \\ (95) & 0 = \displaystyle\sum_{\varkappa', \lambda'} \Big(\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial p_\varrho}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial p_\nu}\Big)\frac{\partial(a_{\varkappa'}, a_{\lambda'})}{\partial t} \end{cases}$$

Nach der Substitution von (106) in (107) entsteht eine dreifache Summe, nämlich die doppelte über alle ν, ϱ und die einfache über alle Kombinationen $\varkappa'$, λ'. Es ist also schon die Größe $\frac{\partial[a_\varkappa, a_\lambda]}{\partial t}$ linear durch alle $\frac{\partial(a_{\varkappa'}, a_{\lambda'})}{\partial t}$ dargestellt. Unser ganzes Geschäft besteht vielmehr darin, die Koeffizienten in diesen linearen Ausdrücken zu ermitteln. Zu dem Ende brauchen wir nur das allgemeine Glied jener dreifachen Summe einer geeigneten Umordnung zu unterwerfen. Es läßt sich vorerst tabellarisch so schreiben:

$$\begin{array}{llllll} \text{Faktor,} & \quad 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 & \\ 1, & +\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial p_\varrho} & -\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial p_\varrho} & -\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial p_\varrho} & +\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial p_\varrho} & \mathfrak{a} \\ \frac{1}{2}, & +\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\varrho}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial q_\varrho} & -\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial q_\varrho} & -\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\varrho}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial q_\varrho} & +\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial q_\varrho} & \mathfrak{b} \\ \frac{1}{2}, & +\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial p_\varrho} & -\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial p_\varrho} & -\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial p_\varrho} & +\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial p_\varrho} & \mathfrak{c} \end{array}$$

Die 4 Posten der Reihe $\mathfrak{a}$ denken wir uns doppelt mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gesetzt, darauf miteinander verbunden die Glieder

$$\begin{array}{llll} 1\mathfrak{a},\ 2\mathfrak{b} & 2\mathfrak{a},\ 1\mathfrak{b} & 3\mathfrak{a},\ 4\mathfrak{b} & 4\mathfrak{a},\ 3\mathfrak{b} \\ 1\mathfrak{a},\ 2\mathfrak{c} & 2\mathfrak{a},\ 1\mathfrak{c} & 3\mathfrak{a},\ 4\mathfrak{c} & 4\mathfrak{a},\ 3\mathfrak{c}; \end{array}$$

es entsteht aus der ursprünglichen Anordnung von 12 Gliedern folgendes Aggregat von 8 Gliedern mit dem Faktor $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial\{a_\varkappa, a_{\lambda'}\}}{\partial\{q_\varrho, p_\varrho\}} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial\{a_\lambda, a_{\lambda'}\}}{\partial\{p_\varrho, q_\varrho\}}\\
+&\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial\{a_\varkappa, a_{\varkappa'}\}}{\partial\{p_\varrho, q_\varrho\}} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial q_\nu}\frac{\partial\{a_\lambda, a_{\varkappa'}\}}{\partial\{q_\varrho, p_\varrho\}}\\
+&\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial p_\varrho}\frac{\partial\{a_\lambda, a_{\varkappa'}\}}{\partial\{p_\nu, q_\nu\}} + \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial p_\varrho}\frac{\partial\{a_\varkappa, a_{\varkappa'}\}}{\partial\{q_\nu, p_\nu\}}\\
+&\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial p_\varrho}\frac{\partial\{a_\lambda, a_{\lambda'}\}}{\partial\{q_\nu, p_\nu\}} + \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_{\varkappa'}}{\partial p_\varrho}\frac{\partial\{a_\varkappa \cdot a_{\lambda'}\}}{\partial\{p_\nu, q_\nu\}}.
\end{aligned}$$

Vertauscht man in den oberen beiden Reihen die Summenzeiger ν, ϱ, also die Reihenfolge der Summen, so können wieder je zwei Glieder vereinigt werden, so daß wir ihre Anzahl auf die Hälfte reduzieren und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\{a_\lambda, a_{\varkappa'}\}}{\partial\{p_\varrho, q_\varrho\}}\frac{\partial\{a_\varkappa, a_{\lambda'}\}}{\partial\{q_\nu, p_\nu\}} + \frac{\partial\{a_\varkappa, a_{\varkappa'}\}}{\partial\{p_\varrho, q_\varrho\}}\frac{\partial\{a_\lambda, a_{\lambda'}\}}{\partial\{p_\nu, q_\nu\}}\\
+&\frac{\partial\{a_\lambda, a_{\lambda'}\}}{\partial\{p_\varrho, q_\varrho\}}\frac{\partial\{a_\varkappa, a_{\varkappa'}\}}{\partial\{p_\nu, q_\nu\}} + \frac{\partial\{a_\varkappa, a_{\lambda'}\}}{\partial\{q_\varrho, p_\varrho\}}\frac{\partial\{a_\lambda, a_{\varkappa'}\}}{\partial\{p_\nu, q_\nu\}}.
\end{aligned}$$

Wird in der zweiten Reihe wieder ν mit ϱ vertauscht, so erscheint die erste Reihe noch einmal. Damit verschwindet der Faktor $\frac{1}{2}$. Wir führen nunmehr die Doppelsumme über alle ν, ϱ aus und erinnern uns dabei der Definition der Poissonschen Klammersymbole (33b). So kommt als Koeffizient von $\frac{\partial(a_{\varkappa'}, a_{\lambda'})}{\partial t}$ der Ausdruck:

$$[a_\lambda, a_{\varkappa'}][a_{\lambda'}, a_\varkappa] + [a_\varkappa, a_{\varkappa'}][a_\lambda, a_{\lambda'}] = [a_\varkappa, a_{\varkappa'}][a_\lambda, a_{\lambda'}] - [a_\lambda, a_{\varkappa'}][a_\varkappa, a_{\lambda'}].$$

Dieser Determinante geben wir das Symbol:

$$(107)\qquad \begin{bmatrix} a_\varkappa & a_\lambda \\ a_{\varkappa'} & a_{\lambda'} \end{bmatrix} \text{ oder auch einfacher } \begin{bmatrix} \varkappa & \lambda \\ \varkappa' & \lambda' \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} [a_\varkappa, a_{\varkappa'}] & [a_\lambda, a_{\varkappa'}] \\ [a_\varkappa, a_{\lambda'}] & [a_\lambda, a_{\lambda'}] \end{vmatrix}.$$

Mit Hilfe desselben stellt sich daher die Zeitderivierte von $[a_\varkappa, a_\lambda]$ auf folgende Weise dar:

$$(108)\qquad \frac{\partial[a_\varkappa, a_\lambda]}{\partial t} = \sum_{\varkappa', \lambda'} \begin{bmatrix} \varkappa & \lambda \\ \varkappa' & \lambda' \end{bmatrix} \frac{\partial(a_{\varkappa'}, a_{\lambda'})}{\partial t}$$

oder in Form eines Satzes:

Die Änderungsgeschwindigkeit des Poissonschen Klammerausdruckes ist eine lineare Funktion der Änderungsgeschwindigkeiten aller Lagrangeschen Klammersymbole. Ihre Koeffizienten sind Determinanten zweiten Grades, gebildet aus Klammerausdrücken der ersten Art.

Die neuen Symbole besitzen ähnliche Eigenschaften wie die Klammerausdrücke, aus denen sie zusammengesetzt sind, nur erweitert dem Umstande entsprechend, daß vier Argumente auftreten. Sie lassen sich fast aus der Definition (107) ablesen, wenn wir jene der einfachen Klammersymbole (35) mit den Gesetzen der Determinanten kombinieren.

$$(109)\quad \begin{cases} (\alpha)\ \begin{bmatrix} \lambda\,\varkappa \\ \varkappa'\lambda' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \varkappa\,\lambda \\ \varkappa'\lambda' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varkappa\,\lambda \\ \lambda'\varkappa' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \varkappa\,\lambda \\ \varkappa'\lambda' \end{bmatrix}, \\ \ \begin{bmatrix} \varkappa'\lambda' \\ \varkappa\,\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varkappa\,\lambda \\ \varkappa'\lambda' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda\,\varkappa \\ \lambda'\varkappa' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varkappa\,\lambda \\ \varkappa'\lambda' \end{bmatrix}, \\ (\beta)\ \begin{bmatrix} \varkappa\,\varkappa \\ \varkappa'\lambda' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varkappa\,\lambda \\ \varkappa'\varkappa' \end{bmatrix} = 0, \\ (\gamma)\ \begin{bmatrix} \varkappa\,\lambda \\ \varkappa\,\lambda \end{bmatrix} = [a_\varkappa, a_\lambda]^2. \end{cases}$$

Nennen wir, analog dem Sprachgebrauch der Determinantentheorie, die Reihenfolge $\varkappa\lambda$ oder $\varkappa'\lambda'$ eine Zeile, die Reihenfolge $\varkappa\varkappa'$ oder $\lambda\lambda'$ eine Kolonne, so können wir die Regeln (109) nacheinander so aussprechen:

(α) Die Vertauschung der Elemente *einer* Zeile ändert das Vorzeichen, die Vertauschung der beiden Zeilen der beiden Kolonnen geschieht ohne Änderung des Wertes;

(β) das Symbol nimmt den Wert null an, wenn die Elemente einer Zeile einander gleich werden;

(γ) es artet in das Quadrat eines einfachen Poissonschen Klammersymbols aus, wenn die Elemente *jeder* Kolonne einander gleich sind.

Denselben Prozeß wenden wir auf die Zeitderivierten des Lagrangeschen Symbols an. Der Ausdruck (89b) wird, wie folgt, identisch erweitert:

$$(110)\quad \frac{\partial(a_\varkappa, a_\lambda)}{\partial t} = \sum_\nu \sum_\varrho \Big\{ \Big(\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\nu} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \Big) P'_{\nu\varrho} + \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \Big) P_{\nu\varrho} + \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\lambda} \Big)\, 0 \Big\};$$

alle $P'_{\nu\varrho}$, $P_{\nu\varrho}$ und 0 ersetzen wir durch ihre linearen Ausdrücke in den Poissonschen Klammersymbolen:

$$(111)\quad \begin{cases} (92)\quad P'_{\nu\varrho} = \sum\limits_{\varkappa', \lambda'} \Big(\frac{\partial q_\varrho}{\partial a_{\varkappa'}} \frac{\partial p_\nu}{\partial a_{\lambda'}} - \frac{\partial p_\nu}{\partial a_{\varkappa'}} \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_{\lambda'}} \Big) \frac{\partial [a_{\varkappa'}, a_{\lambda'}]}{\partial t} \\ (90)\quad P_{\nu\varrho} = \sum\limits_{\varkappa'\lambda',} \Big(\frac{\partial p_\nu}{\partial a_{\varkappa'}} \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_{\lambda'}} - \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_{\varkappa'}} \frac{\partial p_\nu}{\partial a_{\lambda'}} \Big) \frac{\partial [a_{\varkappa'}, a_{\lambda'}]}{\partial t} \\ (94)\quad\ \ 0 = \sum\limits_{\varkappa'\lambda'} \Big(\frac{\partial q_\nu}{\partial a_{\varkappa'}} \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_{\lambda'}} - \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_{\varkappa'}} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_{\lambda'}} \Big) \frac{\partial [a_{\varkappa'}, a_{\lambda'}]}{\partial t}; \end{cases}$$

die weitläufige Analyse der linearen dreifachen Summe, die sich wieder aus (110) durch (111) ergibt, unterdrücke ich aber wegen ihrer völligen Analogie mit der früheren. Als Koeffizient von $\frac{\partial[a_{\varkappa'}, a_{\lambda'}]}{\partial t}$ erscheint jetzt die nur aus Lagrangeschen Klammersymbolen gebildete Determinante

$$(a_\varkappa, a_{\varkappa'})(a_\lambda, a_{\lambda'}) - (a_\lambda, a_{\varkappa'})(a_\varkappa, a_{\lambda'}),$$

der wir nach Analogie der Bezeichnung (107) zweckmäßig das Symbol

$$(112) \qquad \begin{pmatrix} a_\varkappa & a_\lambda \\ a_{\varkappa'} & a_{\lambda'} \end{pmatrix} \text{ oder einfacher } \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \varkappa' & \lambda' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} (a_\varkappa, a_{\varkappa'}) & (a_\lambda, a_{\varkappa'}) \\ (a_\varkappa, a_{\lambda'}) & (a_\lambda, a_{\lambda'}) \end{vmatrix}$$

zuerteilen. Damit gewinnen wir für die Ableitung von $(a_\varkappa, a_\lambda)$ nach t folgende Darstellung:

$$(113) \qquad \frac{\partial(a_\varkappa, a_\lambda)}{\partial t} = \sum_{\varkappa', \lambda'} \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \varkappa' & \lambda' \end{pmatrix} \frac{\partial[a_{\varkappa'}, a_{\lambda'}]}{\partial t},$$

d. h. den Satz:

Die Änderungsgeschwindigkeit des Lagrangeschen Klammerausdruckes ist eine lineare Funktion der Änderungsgeschwindigkeiten aller Poissonschen Klammersymbole. Ihre Koeffizienten sind Determinanten zweiten Grades, gebildet aus den Klammerausdrücken der ersten Art.

Die Eigenschaften des Symbols (112) sind so vollständig homolog denen des Symbols (107), daß wir in (109) nur die eckigen Klammern durch die runden zu ersetzen brauchen, um zu erhalten:

$$(114) \quad \left| \begin{array}{ll} (\alpha) & \begin{pmatrix} \lambda & \varkappa \\ \varkappa' & \lambda' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \varkappa' & \lambda' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \lambda' & \varkappa' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \varkappa' & \lambda' \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} \varkappa' & \lambda' \\ \varkappa & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \varkappa' & \lambda' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \varkappa \\ \lambda' & \varkappa' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \varkappa' & \lambda' \end{pmatrix}, \\ (\beta) & \begin{pmatrix} \varkappa & \varkappa \\ \varkappa' & \lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \varkappa' & \varkappa' \end{pmatrix} = 0, \\ (\gamma) & \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \varkappa & \lambda \end{pmatrix} = (a_\varkappa, a_\lambda)^2. \end{array} \right.$$

Und auch im Wortlaut sind diese Regeln selbstredend dieselben wie für (109):

(α) Die Vertauschung der Elemente einer Zeile ändert das Vorzeichen, die Vertauschung beider Zeilen oder beider Kolonnen geschieht ohne Änderung des Wertes;

(β) das Symbol nimmt den Wert null an, wenn die Elemente einer Zeile einander gleich werden;

(γ) es artet in das Quadrat eines einfachen Lagrangeschen Klammersymbols aus, wenn die Elemente jeder Kolonne einander gleich sind.

Anmerkung 1. Aus (108) und (113) folgt noch direkt der Satz: *Sind sämtliche Klammersymbole der einen Art unabhängig von der Zeit und bloße Funktionen der Elemente, so sind es auch die der anderen Art.*

Dieser Satz ist zwar an sich selbstverständlich, da wir schon auf Grund der Relationen (64) wissen, daß die Klammersymbole der einen Art durch die der anderen rational ausdrückbar sind, also auch ihre Ableitungen nach t, doch ist es wichtig, ihn hier in den Gl. (108, 113) von neuem and unmittelbar bestätigt zu sehen.

Anmerkung 2. Die in (109α, β) bez. (114α, β) ausgedrückten Eigenschaften der beiden erweiterten Klammersymbole geben eine Probe auf die Richtigkeit der Formeln (108) bez. (113) ab. Denn eine Vertauschung der Elemente $a_\varkappa$, a_λ muß auf der rechten Seite der Gleichungen ein negatives Vorzeichen erzeugen, und ihre Gleichsetzung sie identisch gleich null machen. Diese Forderungen werden durch (109α, β) bez. (114α, β) wirklich erfüllt.

Anmerkung 3. Für zwangläufige Systeme ($n = 1$) schrumpfen die Gl. (108, 113) auf die folgende Gestalt zusammen:

$$(115) \qquad \frac{\partial [a,b]}{\partial t} = \begin{bmatrix} ab \\ ab \end{bmatrix} \frac{\partial (a,b)}{\partial t} = [a,b]^2 \frac{\partial (a,b)}{\partial t}$$

$$(116) \qquad \frac{\partial (a,b)}{\partial t} = \begin{pmatrix} ab \\ ab \end{pmatrix} \frac{\partial [a,b]}{\partial t} = (a,b)^2 \frac{\partial [a,b]}{\partial t}$$

nach (109γ, 114γ). a und b sind die beiden Elemente. Diese Gleichungen folgen direkt aus (64):

$$(a,b)[a,b] = -1.$$

Durch partielle Differentiation nach t ergibt sich:

$$[a,b]\frac{\partial (a,b)}{\partial t} = -(a,b)\frac{\partial [a,b]}{\partial t}.$$

Indem ich nun einmal rechts (a, b) nach der vorhergehenden Gleichung durch $[a, b]$ ausdrücke, das andere Mal links umgekehrt verfahre, erhalte ich nacheinander die Formeln (115, 116).

3. *Es ist merkwürdig, daß die Änderungsgeschwindigkeiten der beiden Klammerausdrücke von Poisson und Lagrange in einer ähnlichen Reziprozität zueinander stehen, wie die Elementgeschwindigkeiten $\dot{a}$ zu den Störungsgrößen A.* Diese vollkommene Analogie betätigt sich auch in der Verknüpfung der beiden symbolisch abgekürzten Koeffizienten. Da die eine der beiden Formeln (108, 113) die Umkehrung der anderen ist (immer nach den Änderungsgeschwindigkeiten der Klammerausdrücke von derselben Art als den Unbekannten), so müssen die folgenden Beziehungen gelten:

$$(117) \quad \varepsilon_{\substack{\varkappa\,\lambda \\ \varkappa'\lambda'}} = \sum_{\mu\mu'} \begin{pmatrix} \varkappa\ \varkappa' \\ \mu\ \mu' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mu\ \mu' \\ \lambda\ \lambda' \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 \text{ wenn } \lambda \neq \varkappa \text{ bez. } \varkappa', & \lambda' \neq \varkappa' \text{ bez. } \varkappa \\ +1 \text{ wenn } \lambda = \varkappa, & \lambda' = \varkappa' \\ -1 \text{ wenn } \lambda = \varkappa', & \lambda' = \varkappa. \end{cases}$$

Der Wert -1 läßt sich jedoch aus dem Wert $+1$ ableiten, weil

$$\begin{bmatrix}\mu\ \mu' \\ \varkappa'\ \varkappa\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\mu\ \mu' \\ \varkappa\ \varkappa'\end{bmatrix}$$

nach dem Vertauschungssatz (109α) ist. Ihre Analogie mit (64) ist augenscheinlich.

Zum Beweise erweitern wir die einfache Summe über alle Kombinationen μ, μ' zur doppelten über μ, μ', wo jeder Index die Zahlen von 1 bis $2n$ durchläuft. Ich behaupte, daß

$$\sum_{\mu\,\mu'} \begin{pmatrix}\varkappa\ \varkappa' \\ \mu\ \mu'\end{pmatrix} \begin{bmatrix}\mu\ \mu' \\ \lambda\ \lambda'\end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \begin{pmatrix}\varkappa\ \varkappa' \\ \mu\ \mu'\end{pmatrix} \begin{bmatrix}\mu\ \mu' \\ \lambda\ \lambda'\end{bmatrix}$$

ist. Die Erweiterung fügt nämlich erstens zu jeder Kombination μ, μ' die umgekehrte μ', μ hinzu. Diese ändert aber in beiden Symbolen nach dem Vertauschungssatze nur das Vorzeichen, mithin an ihrem Produkte gar nichts; zweitens treten die Glieder mit gleichen Elementen $\mu' = \mu$ hinzu, die aber nach (109β, 114β) identisch null sind. Die kombinatorische Summe ist daher bloß verdoppelt. Jetzt werten wir das Produkt der beiden Symbole aus:

$$\begin{pmatrix}\varkappa\ \varkappa' \\ \mu\ \mu'\end{pmatrix} \begin{bmatrix}\mu\ \mu' \\ \lambda\ \lambda'\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}(a_\varkappa, a_\mu) & (a_{\varkappa'}, a_\mu) \\ (a_\varkappa, a_{\mu'}) & (a_{\varkappa'}, a_{\mu'})\end{vmatrix} \begin{vmatrix}[a_\mu, a_\lambda] & [a_{\mu'}, a_\lambda] \\ [a_\mu, a_{\lambda'}] & [a_{\mu'}, a_{\lambda'}]\end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix}(a_\varkappa, a_\mu)[a_\mu, a_\lambda] + (a_{\varkappa'}, a_\mu)[a_{\mu'}, a_\lambda] & (a_\varkappa, a_\mu)[a_\mu, a_{\lambda'}] + (a_{\varkappa'}, a_\mu)[a_{\mu'}, a_{\lambda'}] \\ (a_{\varkappa'}, a_{\mu'})[a_\mu, a_\lambda] + (a_{\varkappa'}, a_{\mu'})[a_{\mu'}, a_\lambda] & (a_\varkappa, a_{\mu'})[a_\mu, a_{\lambda'}] + (a_{\varkappa'}, a_{\mu'})[a_{\mu'}, a_{\lambda'}]\end{vmatrix}.$$

Diese achtgliedrige Determinante reduziert sich, wie man leicht durch Zerlegung übersieht, auf die beiden folgenden zweigliedrigen:

$$\begin{vmatrix}(a_\varkappa, a_\mu)[a_\mu, a_\lambda] & (a_\varkappa, a_\mu)[a_\mu, a_{\lambda'}] \\ (a_{\varkappa'}, a_{\mu'})[a_{\mu'}, a_\lambda] & (a_{\varkappa'}, a_{\mu'})[a_{\mu'}, a_{\lambda'}]\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}(a_{\varkappa'}, a_\mu)[a_{\mu'}, a_\lambda] & (a_{\varkappa'}, a_\mu)[a_{\mu'}, a_{\lambda'}] \\ (a_\varkappa, a_{\mu'})[a_\mu, a_\lambda] & (a_\varkappa, a_{\mu'})[a_\mu, a_{\lambda'}]\end{vmatrix}.$$

Nachdem wir noch in den Diagonalreihen der zweiten Determinante die eckigen Klammersymbole miteinander vertauscht haben, führen wir die Doppelsumme über alle μ, μ' aus und beachten (64); dadurch kommt:

(118a) $$\varepsilon_{\substack{\varkappa\,\lambda \\ \varkappa'\lambda'}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\varepsilon_{\varkappa\lambda} & \varepsilon_{\varkappa\lambda'} \\ \varepsilon_{\varkappa'\lambda} & \varepsilon_{\varkappa'\lambda'}\end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\varepsilon_{\varkappa'\lambda'} & \varepsilon_{\varkappa'\lambda} \\ \varepsilon_{\varkappa\lambda'} & \varepsilon_{\varkappa\lambda}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\varepsilon_{\varkappa\lambda} & \varepsilon_{\varkappa'\lambda} \\ \varepsilon_{\varkappa\lambda'} & \varepsilon_{\varkappa'\lambda'}\end{vmatrix}.$$

Das neue ε mit vierfachem Index ist durch eine Determinante zweiten Grades aus den einfachen Unstetigkeitsfaktoren ε mit Doppelindex ausgedrückt. Die vorausgesetzten Eigenschaften von

(118b) $$\varepsilon_{\substack{\varkappa\,\lambda \\ \varkappa'\lambda'}} = \varepsilon_{\varkappa\lambda}\,\varepsilon_{\varkappa'\lambda'} - \varepsilon_{\varkappa\lambda'}\,\varepsilon_{\varkappa'\lambda}$$

sind also wegen (64) ganz von selbst da:

(118c) $$\varepsilon_{\substack{\varkappa\,\varkappa \\ \varkappa'\varkappa'}} = +1, \quad \varepsilon_{\substack{\varkappa\,\varkappa' \\ \varkappa'\varkappa}} = -1 \quad \text{und sonst} \quad \varepsilon_{\substack{\varkappa\,\lambda \\ \varkappa\,\lambda'}} = 0.$$

Der Unstetigkeitsfaktor $\varepsilon_{\varkappa\ \lambda \atop \varkappa'\lambda'}$ *ist aus den Unstetigkeitsfaktoren* $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ *in ganz derselben Weise zusammengesetzt wie die Symbole* $\left[{\varkappa\ \lambda \atop \varkappa'\lambda'}\right]$ *bzw.* $\left({\varkappa\ \lambda \atop \varkappa'\lambda'}\right)$ *aus den Klammersymbolen* $[a_\varkappa, a_\lambda]$ *bzw.* $(a_\varkappa, a_\lambda)$.

Damit haben wir die allgemeine Untersuchung über die Abhängigkeit der Klammersymbole von der Zeit vollendet. Der praktische Nutzen, den die Relationen (108, 113) gewähren können, scheint zunächst nur in der Kontrolle zu liegen, die sie auf die vollständig berechneten Klammerausdrücke beider Arten ausüben.

8. Das Lagrangesche Theorem.

Dieses Theorem[1]) besteht in einer allgemeinen Relation zwischen den Variationen der Elemente, ist allein der Lagrangeschen Störungstheorie eigentümlich und steht zu den Überlegungen des fünften Abschnittes in einer so nahen Verwandtschaft, daß wir seine Resultate aus ihm unmittelbar wiedergewinnen werden. Nur dürfen wir uns nicht von vornherein auf konservative Grundkräfte einschränken.

Wir gehen wieder von der Zentralgleichung aus, in der Form (38):

$$\frac{d}{dt}\sum_\nu p_\nu \delta q_\nu = \delta T + \delta \mathsf{A}.$$

Führt man die Zustandsgleichungen (4) ein, fordert aber, daß die Zeitdifferentiation des ersten Gliedes so erfolge, als wenn die Elemente konstant wären, so geht die Zentralgleichung über in die der Grundbewegung, und zwar in der Gestalt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_\nu p_\nu D q_\nu = D(T) + D\mathfrak{A}. \tag{119}$$

Die virtuellen Verrückungen δ sind jetzt solche geworden, die aus virtuellen Variationen der Elemente hervorgehen. Ich habe, um dies auszudrücken, für δ das Zeichen D gesetzt. Möge $\varDelta$ eine andere Verrückung derselben Art[2]) bedeuten, so gilt für eine beliebige Funktion der Elemente, wie leicht zu beweisen,

$$\varDelta D F = D \varDelta F, \tag{120}$$

1) M. A. Sec. Part. Sect. V § 1 I p. 328 (noch nicht in den Abhandlungen). Poisson (Mém. 1816) beweist es für die elementaren Bewegungsgleichungen in den rechtwinkligen Koordinaten der Systempunkte, wenn diese noch durch Bedingungsgleichungen verknüpft sind, und sagt dann (p. 10): „M. Lagrange donne, dans la seconde édition de la mécanique analytique, une formule analogue à notre équation (1), qui se confond avec elle, quand les mobiles sont libres, mais qui en diffère essentiellement, lorsqu'il s'agit d'un système de points lié entre eux d'une manière quelconque".

2) Diese Verrückungen sind natürlich identisch mit den S. 16 erklärten.