

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik**

**Winkelmann, Max**

**1909**

6. Ergänzung zu den Beweisen der beiden Fundamentaltheoeme.  
Umkehrung [...]

[urn:nbn:de:bsz:31-270659](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-270659)

lassen. Es ist uns also dieselbe Aufgabe begegnet wie bei dem Beweis des Poissonschen Theorems, und ihrer gemeinsamen Erledigung wenden wir uns im folgenden Abschnitte zu.

### 6. Ergänzung zu den Beweisen der beiden Fundamentaltheoreme. Umkehrung der Ausdrücke für die Änderungsgeschwindigkeiten der Klammersymbole nach den Kraftkomponenten des Systems.

Wir stellen die für die Änderungsgeschwindigkeiten der beiden Klammersymbole gewonnenen Ausdrücke noch einmal zusammen, indem wir vorübergehend für die Wirbelkomponenten und Impulsderivierten die Abkürzungen

$$(88) \quad \frac{\partial P_v}{\partial q_\rho} - \frac{\partial P_\rho}{\partial q_v} = P_{v\rho}, \quad \frac{\partial P_v}{\partial p_\rho} = P'_{v\rho}$$

gebrauchen wollen, ihre Koeffizienten aber wieder ausführlich hinschreiben:

$$(89a) \quad \frac{\partial [a_x, a_\lambda]}{\partial t} = \sum_v \sum_\rho \left\{ \left( \frac{\partial a_x}{\partial q_\rho} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_v} - \frac{\partial a_x}{\partial p_v} \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\rho} \right) P_{v\rho} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_x}{\partial p_v} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\rho} - \frac{\partial a_x}{\partial p_\rho} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_v} \right) P_{v\rho} \right\}$$

$$(89b) \quad \frac{\partial (a_x, a_\lambda)}{\partial t} = \sum_v \sum_\rho \left\{ \left( \frac{\partial q_v}{\partial a_x} \frac{\partial p_\rho}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial p_\rho}{\partial a_x} \frac{\partial q_v}{\partial a_\lambda} \right) P_{v\rho} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial q_v}{\partial a_x} \frac{\partial q_\rho}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial q_\rho}{\partial a_x} \frac{\partial q_v}{\partial a_\lambda} \right) P_{v\rho} \right\}$$

Trotz der Überzahl der  $n(2n-1)$  Gleichungen über  $\frac{n(3n-1)}{2}$  Unbekannte (die nur für  $n=1$  den Wert 0 hat), gelingt es, diese eindeutig und linear durch die Änderungsgeschwindigkeiten jeder Art von Klammersymbolen für sich darzustellen, und zwar durch das folgende Verfahren: Wir vervollständigen das System der Gl. (89), indem wir die Identitäten für  $x=\lambda$  und die Ausdrücke mit vertauschten Argumenten  $a_\lambda, a_x$  hinzufügen. Darauf multiplizieren wir jede der nunmehr  $4n^2$  Gl. (89a) und (89b) für sich mit solchen Faktoren, welche die Anwendung der Relationen (58), (59) durch Addition der mit den Faktoren versehenen Gleichungen ermöglichen.

I. Die Auflösung nach den Wirbelkomponenten  $P_{v\rho}$  geschieht in (89a) durch Multiplikation mit  $\frac{\partial p_\sigma}{\partial a_x} \frac{\partial p_\tau}{\partial a_\lambda}$ , wo  $\sigma, \tau$  jede der Zahlen von 1 bis  $n$  sein können. So erscheint zunächst:

$$\begin{aligned} & \sum_x \sum_\lambda \frac{\partial p_\sigma}{\partial a_x} \frac{\partial p_\tau}{\partial a_\lambda} \frac{\partial [a_x, a_\lambda]}{\partial t} \\ &= \sum_x \sum_\lambda \sum_v \sum_\rho \left\{ \left( \frac{\partial p_\sigma}{\partial a_x} \frac{\partial a_x}{\partial q_\rho} \cdot \frac{\partial p_\tau}{\partial a_\lambda} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_v} - \frac{\partial p_\sigma}{\partial a_x} \frac{\partial a_x}{\partial p_v} \cdot \frac{\partial p_\tau}{\partial a_\lambda} \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\rho} \right) P_{v\rho} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p_\sigma}{\partial a_x} \frac{\partial a_x}{\partial p_v} \cdot \frac{\partial p_\tau}{\partial a_\lambda} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\rho} - \frac{\partial p_\sigma}{\partial a_x} \frac{\partial a_x}{\partial p_\rho} \cdot \frac{\partial p_\tau}{\partial a_\lambda} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_v} \right) P_{v\rho} \right\}. \end{aligned}$$

Summieren wir erst über alle Elemente, so verschwinden alle Koeffizienten von  $P'_{\nu\varrho}$  und die von  $P_{\nu\varrho}$  werden

$$\frac{1}{2}(\delta_{\sigma\nu}\delta_{\tau\varrho} - \delta_{\sigma\varrho}\delta_{\tau\nu}),$$

d. h. es bleiben in der Doppelsumme über alle  $\nu, \varrho$  von dem ersten Teil nur das Glied  $\nu = \sigma, \varrho = \tau$ , von dem zweiten nur das Glied  $\varrho = \sigma, \nu = \tau$  übrig. Da aber  $P_{\tau\sigma} = -P_{\sigma\tau}$  (88), so erhalten wir die gewünschte Umkehrung in der Form

$$\sum_{\kappa} \sum_{\lambda} \frac{\partial p_{\sigma}}{\partial a_{\kappa}} \frac{\partial p_{\tau}}{\partial a_{\lambda}} \frac{\partial [a_{\kappa}, a_{\lambda}]}{\partial t} = P_{\sigma\tau}.$$

Die Doppelsumme kann aber mit Rücksicht auf (35) auch als eine einfache über alle Kombinationen  $\kappa, \lambda$  der Zahlen 1 bis  $2n$  ohne Wiederholung folgendermaßen geschrieben werden:

$$(90) \quad \sum_{\kappa, \lambda} \left( \frac{\partial p_{\sigma}}{\partial a_{\kappa}} \frac{\partial p_{\tau}}{\partial a_{\lambda}} - \frac{\partial p_{\tau}}{\partial a_{\kappa}} \frac{\partial p_{\sigma}}{\partial a_{\lambda}} \right) \frac{\partial [a_{\kappa}, a_{\lambda}]}{\partial t} = P_{\sigma\tau}.$$

Der analytische Prozeß geht für alle übrigen Umkehrungen auf dieselbe Weise vor sich, so daß ich nur das Resultat anzugeben brauche.

Auflösung nach den  $P_{\nu\varrho}$  in (89b) durch Multiplikation mit  $\frac{\partial a_{\kappa}}{\partial q_{\sigma}} \frac{\partial a_{\lambda}}{\partial q_{\tau}}$

$$(91) \quad \sum_{\kappa} \sum_{\lambda} \frac{\partial a_{\kappa}}{\partial q_{\sigma}} \frac{\partial a_{\lambda}}{\partial q_{\tau}} \frac{\partial (a_{\kappa}, a_{\lambda})}{\partial t} = \sum_{\kappa, \lambda} \left( \frac{\partial a_{\kappa}}{\partial q_{\sigma}} \frac{\partial a_{\lambda}}{\partial q_{\tau}} - \frac{\partial a_{\lambda}}{\partial q_{\sigma}} \frac{\partial a_{\kappa}}{\partial q_{\tau}} \right) \frac{\partial (a_{\kappa}, a_{\lambda})}{\partial t} = P_{\sigma\tau}.$$

II. Die Auflösung nach den *Impulsderivierten*  $P'_{\nu\varrho}$  in (89a) durch die Multiplikation mit  $\frac{\partial q_{\tau}}{\partial a_{\kappa}} \frac{\partial p_{\sigma}}{\partial a_{\lambda}}$

$$(92) \quad \sum_{\kappa} \sum_{\lambda} \frac{\partial q_{\tau}}{\partial a_{\kappa}} \frac{\partial p_{\sigma}}{\partial a_{\lambda}} \frac{\partial [a_{\kappa}, a_{\lambda}]}{\partial t} = \sum_{\kappa, \lambda} \left( \frac{\partial q_{\tau}}{\partial a_{\kappa}} \frac{\partial p_{\sigma}}{\partial a_{\lambda}} - \frac{\partial p_{\sigma}}{\partial a_{\kappa}} \frac{\partial q_{\tau}}{\partial a_{\lambda}} \right) \frac{\partial [a_{\kappa}, a_{\lambda}]}{\partial t} = P'_{\sigma\tau}.$$

In (89b) durch Multiplikation mit  $\frac{\partial a_{\kappa}}{\partial q_{\sigma}} \frac{\partial a_{\lambda}}{\partial p_{\tau}}$ :

$$(93) \quad \sum_{\kappa} \sum_{\lambda} \frac{\partial a_{\kappa}}{\partial q_{\sigma}} \frac{\partial a_{\lambda}}{\partial p_{\tau}} \frac{\partial (a_{\kappa}, a_{\lambda})}{\partial t} = \sum_{\kappa, \lambda} \left( \frac{\partial a_{\kappa}}{\partial q_{\sigma}} \frac{\partial a_{\lambda}}{\partial p_{\tau}} - \frac{\partial a_{\lambda}}{\partial p_{\sigma}} \frac{\partial a_{\kappa}}{\partial q_{\tau}} \right) \frac{\partial (a_{\kappa}, a_{\lambda})}{\partial t} = P'_{\sigma\tau}.$$

Es gibt aber noch eine Art linearer Relationen zwischen den Änderungsgeschwindigkeiten  $\frac{\partial [a_{\kappa}, a_{\lambda}]}{\partial t}$  und  $\frac{\partial (a_{\kappa}, a_{\lambda})}{\partial t}$  unter sich, die homogen sind, indem alle von den Kraftkomponenten abhängenden Größen herausfallen. Dies erfolgt

III. durch Multiplikation von (89a) mit  $\frac{\partial q_\sigma}{\partial a_x} \frac{\partial q_\tau}{\partial a_\lambda}$ :

$$(94) \quad \sum_x \sum_\lambda \frac{\partial q_\sigma}{\partial a_x} \frac{\partial q_\tau}{\partial a_\lambda} \frac{\partial [a_x, a_\lambda]}{\partial t} = \sum_{x,\lambda} \left( \frac{\partial q_\sigma}{\partial a_x} \frac{\partial q_\tau}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial q_\tau}{\partial a_x} \frac{\partial q_\sigma}{\partial a_\lambda} \right) \frac{\partial [a_x, a_\lambda]}{\partial t} = 0;$$

und von (89b) mit  $\frac{\partial a_x}{\partial p_\sigma} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\tau}$ :

$$(95) \quad \sum_x \sum_\lambda \frac{\partial a_x}{\partial p_\sigma} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\tau} \frac{\partial (a_x, a_\lambda)}{\partial t} = \sum_{x,\lambda} \left( \frac{\partial a_x}{\partial p_\sigma} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\tau} - \frac{\partial a_x}{\partial p_\tau} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\sigma} \right) \frac{\partial (a_x, a_\lambda)}{\partial t} = 0.$$

Hierbei kommen nur die „Nullgleichungen“ von (58), (59) zur Anwendung.

Anmerkung 1. Durch Gebrauch der Multiplikator-Kombinationen  $\frac{\partial p_\sigma}{\partial a_x} \frac{\partial q_\tau}{\partial a_\lambda}$  in bezug auf (89a) und  $\frac{\partial a_x}{\partial p_\tau} \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\sigma}$  in bezug auf (89b) kommt naturgemäß nichts Neues. Denn (89a) gibt die Relation:

$$\sum_{x,\lambda} \left( \frac{\partial p_\sigma}{\partial a_x} \frac{\partial q_\tau}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial q_\tau}{\partial a_x} \frac{\partial p_\sigma}{\partial a_\lambda} \right) \frac{\partial [a_x, a_\lambda]}{\partial t} = -P_{\sigma\tau} \quad \text{und (89b):}$$

$$\sum_{x,\lambda} \left( \frac{\partial a_x}{\partial p_\tau} \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial a_x}{\partial q_\sigma} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\tau} \right) \frac{\partial (a_x, a_\lambda)}{\partial t} = -P_{\sigma\tau},$$

welche sich von (92) bzw. (93) ersichtlich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Damit sind aber sämtliche denkbaren Kombinationen von Multiplikatoren dieser Gattung, welche die Anwendung der Relationen (58), (59) gestatten, erschöpft.

Anmerkung 2. Mit den Gl. (92, 93) verknüpfen wir noch eine merkwürdige Probe. Wähle aus ihnen alle mit dem gleichen Index  $\tau = \sigma$  und setze für ihn  $\nu$ , so ist

$$(92) \quad \sum_{x,\lambda} \left( \frac{\partial q_\nu}{\partial a_x} \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial p_\nu}{\partial a_x} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \right) \frac{\partial [a_x, a_\lambda]}{\partial t} = P_{\nu\nu}$$

$$(93) \quad \sum_{x,\lambda} \left( \frac{\partial a_x}{\partial q_\nu} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu} - \frac{\partial a_x}{\partial p_\nu} \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu} \right) \frac{\partial (a_x, a_\lambda)}{\partial t} = P_{\nu\nu}.$$

Durch Summation über alle  $\nu$  folgen die lehrreichen Formeln:

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{x,\lambda} (a_x, a_\lambda) \frac{\partial [a_x, a_\lambda]}{\partial t} = \sum_\nu P_{\nu\nu} = \sum_\nu \frac{\partial P_\nu}{\partial p_\nu} \\ - \sum_{x,\lambda} [a_x, a_\lambda] \frac{\partial (a_x, a_\lambda)}{\partial t} = \sum_\nu P_{\nu\nu} = \sum_\nu \frac{\partial P_\nu}{\partial p_\nu} \end{array} \right.$$

nach der Definition der beiden Klammersymbole. Wir subtrahieren die Gl. (96) von einander und finden:

$$(97) \quad \frac{\partial}{\partial t} \sum_{x,\lambda} (a_x, a_\lambda) [a_x, a_\lambda] = 0.$$

Weil aber  $\sum_{x,\lambda} (a_x, a_\lambda) [a_x, a_\lambda] = -1$  nach (64), so ist auch  $\sum_{x,\lambda} (a_x, a_\lambda) [a_x, a_\lambda]$  eine reine Zahl ( $= -n$ ) und deshalb ist (97) ein richtiges Ergebnis.

Wenn wir die Abkürzungen  $P_{\sigma\tau}, P'_{\sigma\tau}$  wieder aufgeben und berücksichtigen, daß sämtliche Koeffizienten sich wieder als Donkin'sche Symbole darstellen lassen, so lauten jetzt die gefundenen, wichtigen Formeln (90) bis (95) zu einem System zusammengeordnet:

$$(I) \quad \frac{\partial P_\sigma}{\partial q_\tau} - \frac{\partial P_\tau}{\partial q_\sigma} = \sum_{x,\lambda} \frac{\partial \{p_\sigma, p_\tau\}}{\partial \{a_x, a_\lambda\}} \frac{\partial [a_x, a_\lambda]}{\partial t}, \quad \frac{\partial P_\sigma}{\partial q_\tau} - \frac{\partial P_\tau}{\partial q_\sigma} = \sum_{x,\lambda} \frac{\partial \{a_x, a_\lambda\}}{\partial \{q_\sigma, q_\tau\}} \frac{\partial (a_x, a_\lambda)}{\partial t}$$

$$(II) \quad \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_\tau} = \sum_{x,\lambda} \frac{\partial \{q_\tau, p_\sigma\}}{\partial \{a_x, a_\lambda\}} \frac{\partial [a_x, a_\lambda]}{\partial t}, \quad \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_\tau} = \sum_{x,\lambda} \frac{\partial \{a_x, a_\lambda\}}{\partial \{q_\sigma, p_\tau\}} \frac{\partial (a_x, a_\lambda)}{\partial t}$$

$$(III) \quad 0 = \sum_{x,\lambda} \frac{\partial \{q_\sigma, q_\tau\}}{\partial \{a_x, a_\lambda\}} \frac{\partial [a_x, a_\lambda]}{\partial t}, \quad 0 = \sum_{x,\lambda} \frac{\partial \{a_x, a_\lambda\}}{\partial \{p_\sigma, p_\tau\}} \frac{\partial (a_x, a_\lambda)}{\partial t}.$$

Die Anzahl der Gl. (I) beträgt je  $\frac{n(n-1)}{2}$ , der Gl. (II) je  $n^2$ , der Gl. (III) je  $\frac{n(n-1)}{2}$ , zusammen gerade  $n(2n-1)$ ; nämlich soviel als es je  $[a_x, a_\lambda]$  und  $(a_x, a_\lambda)$  gibt oder gerade soviel, als die Anzahl der Gl. (89a), bzw. (89b), aus denen sie hervorgegangen sind. Es hat sich also ergeben:

1. Die Formeln (98—100) stellen die eindeutigen und vollständigen Umkehrungen der linearen Gleichungen (89) vor.

Beschränken wir uns auf die Gleichungssysteme (I) und (II), so haben wir den Satz:

2. Genau wie die Änderungsgeschwindigkeiten der beiden Klammerausdrücke sich linear durch die Ableitungen der Kraftkomponenten  $P$  des Systems nach seinen Zustandsgrößen  $q, p$  darstellen ließen, geschieht es auch umgekehrt, und zwar in der Weise, daß einerseits (I) die Wirbelkomponenten des Kräftesystems, andererseits (II) die Impulsderivierten seiner Komponenten lineare Funktionen von allen  $\frac{\partial [a_x, a_\lambda]}{\partial t}$ , oder auch von allen  $\frac{\partial (a_x, a_\lambda)}{\partial t}$  werden. Ihre Koeffizienten sind wieder aus den Zustands-

gleichungen des Systems abgeleitete Funktionaldeterminanten in der Form Donkinscher Symbole.

Wenn nun sämtliche Klammerausdrücke Poissons oder Lagranges allein Funktionen der Elemente sind, mit anderen Worten ihre partiellen Ableitungen nach  $t$  sämtlich Null sind, so lehrt ein Blick auf die Gleichungen (98), (99), daß alsdann nach (I) sämtliche Impulsderivierten, nach (II) sämtliche Wirbelkomponenten der eingepprägten Kräfte verschwinden müssen. Das heißt also:

3. *Die notwendige und hinreichende Bewegung dafür, daß die beiden Klammerausdrücke von Poisson und Lagrange die Zeit nicht explizite enthalten, ist: Das Kraftfeld muß erstens wirbelfrei und zweitens unabhängig vom Impulszustande des Systems sein; d. h. aber nach unseren Voraussetzungen: Die eingepprägten Kräfte müssen konservativ sein.<sup>1)</sup>*

Damit haben wir die Beweise der beiden im 4. und 5. Abschnitte aufgestellten Fundamentaltheoreme gemeinsam vollendet.

Dagegen enthalten die vorhergehenden Entwicklungen nichts, was dem Potential der Kräfte die Abhängigkeit von der Zeit<sup>2)</sup> verbieten würde; sie können also insbesondere reine Zeitkräfte sein. Man pflegt in solchen Fällen zu sagen, *das System sei geführt*.

Betrachten wir den positiven Inhalt der Formelsysteme (98)–(100), so müssen wir zwei Arten von Verknüpfungen der Änderungsgeschwindigkeiten  $\frac{\partial[a_x, a_y]}{\partial t}$  bzw.  $\frac{\partial(a_x, a_y)}{\partial t}$  unterscheiden: Solche, welche die *Natur des Kraftfeldes* (zunächst im Lagrangeschen Raum), unter dessen Einfluß das bewegte System sich befindet, angeben (I, II) und solche, die *von den Kräften gänzlich unabhängig* sind (III). Jene trennen sich wieder in solche, welche die *räumliche Verteilung der Kräfte* bestimmen (I), und solche, welche die *Abhängigkeit der Kräfte vom Impulszustande des Systems* anzeigen (II). Die Formelsysteme hinsichtlich der Poissonschen und Lagrangeschen Symbole laufen hierbei durchaus parallel.

Das durch die Relationen (I) und (II) gewonnene Resultat läßt sich als Antwort auf die in der Einleitung gestellte Frage (S. 4) noch folgendermaßen aussprechen:

1) Die Behauptung von Jacobi in seiner schon auf S. 32 zitierten, nachgelassenen Abhandlung (Ges. Werke. Bd. 5, S. 346): „Ich bemerke ferner noch, daß sowohl die Lagrangeschen als die Poissonschen Störungsformeln un geändert bleiben, wenn  $H$  außer den Größen  $q, p$ , noch  $t$  explizite enthält und daß auch für diesen Fall die Ausdrücke  $(\alpha, \beta)$  und  $[\alpha, \beta]$  bloße Funktionen der Elemente sind“, ist also in ihrem letzten (durch kursiven Druck kenntlichen) Teil falsch. Das hier vorausgesetzte Potential der Grundkräfte darf  $p$  nicht enthalten.

2) Lagrange, M. A. Sec. Part. Sect. VIII, II p. 189.

4. Mit Hilfe der vollständigen Lösung eines mechanischen Problems (sobald wir also beide Formen seiner Zustandsgleichungen kennen) gelingt es, rückwärts auf die Natur der eingepprägten Kräfte zu schließen, ohne auf die Differentialgleichungen der Bewegung selbst zu rekurreren.

Durch einmalige Zeitdifferentiation der Poissonschen oder Lagrange-schen Klammersausdrücke

a) läßt sich feststellen, ob und wie die eingepprägten Kräfte von den Impulskomponenten des Systems (und damit von seinem Geschwindigkeits-zustande) abhängen;

b) lassen sich die „Wirbelstellen des Kraftfeldes im Lagrange-schen Raume“ (mit anderen Worten die Wirbelkomponenten der Kräfte) auffinden.

Kommt in keinem einzigen Klammersausdruck der einen oder ande-ren Art die Zeit vor, so wissen wir von vornherein, daß für die Kräfte ein räumliches Potential existiert.

Wie weit sich aus diesen Eigenschaften allein die Kräfte selbst rekonstruieren lassen, will ich einer besonderen Untersuchung vor-behalten. Offenbar können wir den Kraftkomponenten Ableitungen einer willkürlichen Kräftefunktion nach den Koordinaten des Systems hinzufügen, ohne die Relationen (98), (99) zu ändern, d. h. die konservativen Bestandteile der Kräfte werden notwendig unbestimmbar bleiben.

Wir ergänzen die Betrachtungen des gegenwärtigen Abschnittes noch durch den folgenden Satz:

*Sind die Kräfte unabhängig vom Impulszustande des Systems, so hängen sie auch nicht von seinem Geschwindigkeitszustande ab.*

Beweis: Nehmen wir an, daß die Kraftkomponenten  $P$  Funktionen der Geschwindigkeitskomponenten  $\dot{q}$  seien, so werden die Impulsderi-vierten von  $P$  durch die Ableitungen derselben Größen nach den  $\dot{q}$  wie folgt auf Grund der kanonischen Gleichungen (74) ausgedrückt:

$$(101) \quad \frac{\partial P_v}{\partial p_q} = \sum_{\sigma} \frac{\partial P_v}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \frac{\partial \dot{q}_{\sigma}}{\partial p_q} = \sum_{\sigma} \frac{\partial P_v}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \frac{\partial^2 T'}{\partial p_q \partial p_{\sigma}}$$

Wenn nun alle  $\frac{\partial P_v}{\partial p_q}$  nach der Voraussetzung des Satzes gleich 0 werden sollen, so sind die Gl. (101) für ein beliebiges, aber bestimmtes  $P_v$ ,  $n$  homogene, lineare Gleichungen mit den  $n$  Unbekannten  $\frac{\partial P_v}{\partial \dot{q}_{\sigma}}$ . Und diese verschwinden, wenn die Determinante des Systems (101)

$$(102) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 T'}{\partial p_q \partial p_{\sigma}} \end{vmatrix}$$

von 0 verschieden ist.  $\Delta$  ist aber die Determinante der quadratischen Form, in der sich die konjugierte Energieform  $T'$  vermöge der  $p$  darstellt. Sei

$$(103) \quad T' = \sum_{\rho \sigma} B_{\rho \sigma} p_{\rho} p_{\sigma},$$

so bedeuten die Differentialquotienten  $\frac{\partial^2 T'}{\partial p_{\rho} \partial p_{\sigma}}$  die Koeffizienten  $B_{\rho \sigma}$  der quadratischen Form, und es ist

$$(104) \quad \Delta = |B_{\rho \sigma}|.$$

Würde jedoch  $\Delta$  verschwinden, so wäre (89)  $T'$  eine sogenannte singuläre, quadratische Form und zwischen den Größen  $\frac{\partial T'}{\partial p_{\rho}}$  würde eine lineare, homogene Relation bestehen<sup>1)</sup>, d. h. wegen  $\frac{\partial T'}{\partial p_{\rho}} = \dot{q}_{\rho}$  eine solche zwischen den Geschwindigkeitskomponenten  $\dot{q}_{\rho}$ , was der Festsetzung über die Unabhängigkeit der Koordinaten zuwiderläuft. Mithin sind alle  $\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_{\sigma}} = 0$  q. e. d.

Dieser Satz kann auch umgekehrt werden. Der Beweis verläuft ähnlich vermittels der Energieform  $T$ .

### 7. Relationen, welche zwischen den beiden Klammersymbolen und ihren Änderungsgeschwindigkeiten bestehen.

Daß wir die Änderungsgeschwindigkeiten der beiden Klammersymbole untereinander ohne Vermittlung der Kraftkomponenten oder ihrer Ableitungen nach den Zustandsgrößen des Systems in Beziehung setzen können, wird sogleich aus dem Formelsystem (I)—(III) (98—100) erkannt. Wir brauchen darin ja nur die einander entsprechenden Glieder jeder Gleichung vermöge der Übereinstimmung der ersten Glieder (der Wirbelkomponenten und Impulsderivierten) miteinander zu vergleichen. Es fragt sich dann: Wie drücken sich die Zeitderivierten der  $[a_x, a_x]$  einzeln durch die Zeitderivierten der  $(a_x, a_x)$  und umgekehrt linear aus? Zu diesem Zwecke gehen wir nicht von den erwähnten Relationen aus, sondern von den im 4. und 5. Abschnitt hergestellten Ausdrücken der beiden Arten von Änderungsgeschwindigkeiten.

<sup>1)</sup> Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten (5. Auflage 1881) § 13, Nr. 10.