Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik

Winkelmann, Max

1909

5. Theorem über das Lagrangesche Klammersymbol

urn:nbn:de:bsz:31-270659

Daß die Reihenfolge dieser Operationen vertauscht werden kann, ist nicht selbstverständlich.

2. Wir führen in die Gl. (68b) für $\dot{q}_\varrho$, $\dot{p}_\varrho$ noch die allgemeinen kanonischen Ausdrücke (74) ein und erhalten:

$$(78a)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} = \sum_\varrho \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial^2 T'}{\partial q_\varrho \partial q_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial^2 T'}{\partial p_\varrho \partial q_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu}\right)$$

$$(78b)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} = \sum_\varrho \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial^2 T'}{\partial q_\varrho \partial p_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial^2 T'}{\partial p_\varrho \partial p_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial P_\varrho}{\partial p_\nu}\right).$$

Nehmen wir für die Positionskoordinaten q_ϱ die rechtwinkligen Koordinaten x_i, y_i, z_i eines *freien* Systems von k Massenpunkten m_i, so werden die Impulskomponenten q_ϱ entsprechend $m_i\dot{x}_i$, $m_i\dot{y}_i$, $m_i\dot{z}_i$, die Kraftkomponenten P_ϱ entsprechend X_i, Y_i, Z_i. Sind diese sämtlich von den Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ unabhängig, d. h. alle $\frac{\partial P_\nu}{\partial p_\varrho} = 0$, so nimmt (78b) die einfache Gestalt[1]) an:

$$(79)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{\partial a_\varkappa}{\partial x_i}, \qquad i \text{ von } 1 \text{ bis } k$$

und ebenso für y und z. Diese merkwürdigen Gleichungen hat Lagrange in der M. A. (Sec. Part. VII, 61 **II** p. 83) unter der Annahme, daß eine Kräftefunktion existiert, abgeleitet.[2]) *Sie gelten aber, wie man sieht, auch noch für den allgemeinen Fall reiner Ortskräfte.*

3. Die Formel (76) wird für $n = 1$ (Systeme von einem Freiheitsgrad, zwangläufige S.) auf ein einziges Glied reduziert:

$$(80)\qquad \frac{\partial[a, b]}{\partial t} = \frac{\partial\{a, b\}}{\partial\{q, p\}}\frac{\partial P}{\partial p} = -[a, b]\frac{\partial P}{\partial p},$$

worin a, b die beiden Elemente bedeuten.

5. Theorem über das Lagrangesche Klammersymbol.

Obwohl schon aus dem im dritten Abschnitte (S. 26) bewiesenen Satze, daß die Lagrangeschen Klammersymbole rationale Funktionen aller Poissonschen sind, ohne weiteres dasselbe Theorem für jene folgt, welches im vorhergehenden Abschnitte für diese aufgestellt worden

---

1) $T' = T = \frac{1}{2}\sum_1^k m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$ und deshalb verschwinden alle $\frac{\partial^2 T'}{\partial q_\varrho \partial p_\nu}$ und von $\frac{\partial^2 T}{\partial p_\varrho \partial p_\nu}$ alle, für die $\varrho \neq \nu$, während für $\varrho = \nu$ der Wert $\frac{1}{m_i}$ ist.

2) Ihre Bedeutung siehe in einer nachgelassenen Arbeit von Jacobi: Über diejenigen Probleme der Mechanik, in welchen eine Kräftefunktion existiert, und über die Theorie der Störungen. — Ges. Werke **5**, 347.

ist, wollen wir es mit Rücksicht auf die hierbei sich ergebenden, wichtigen Formeln und die daraus abzuleitenden Folgerungen unabhängig beweisen. Das fundamentale Theorem lautet:

Die Lagrangeschen Klammerausdrücke sind sämtlich[1]) *dann, und nur dann, explizite unabhängig von der Zeit und bloße Funktionen der Elemente, wenn die Kräfte der ungestörten Bewegung konservativ sind.*

Beweis: 1. Wenn wir an $(a_\varkappa, a_\lambda)$ die partielle Differentiation nach t ausführen, so folgt:

$$(81) \quad \frac{\partial (a_\varkappa, a_\lambda)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_\nu \left\{ \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \right\}$$
$$= \sum_\nu \left\{ \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial t \partial a_\varkappa} \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial t \partial a_\lambda} \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa} + \frac{\partial^2 p_\nu}{\partial t \partial a_\lambda} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa} - \frac{\partial^2 p_\nu}{\partial t \partial a_\varkappa} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \right\}.$$

Vertauscht man aber die Zeitdifferentiation mit der nach den Elementen, was hier gestattet ist, weil die q, p schon als Funktionen der a, t dargestellt sind, so schreiben wir:

$$\frac{\partial^2 q_\nu}{\partial t \partial a_\varkappa} = \frac{\partial \dot{q}_\nu}{\partial a_\varkappa}, \quad \frac{\partial^2 p_\nu}{\partial t \partial a_\varkappa} = \frac{\partial \dot{p}_\nu}{\partial a_\varkappa}$$

und führen für $\dot{q}_\nu$, $\dot{p}_\nu$ die kanonischen Differentialgleichungen der Grundbewegung ein, und zwar:

2. In der Form (70), wenn ein Potential U für die Grundkräfte vorausgesetzt wird. Dann folgt

$$(82) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \dot{q}_\nu}{\partial a_\varkappa} &= \frac{\partial}{\partial q_\varkappa} \frac{\partial H}{\partial p_\nu} = \sum_\varrho \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial q_\nu \partial p_\nu} \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\varkappa} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_\varrho \partial q_\nu} \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\varkappa} \right\} \\ \frac{\partial \dot{p}_\nu}{\partial a_\varkappa} &= -\frac{\partial}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial H}{\partial q_\nu} = -\sum_\varrho \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial q_\varrho \partial q_\nu} \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\varkappa} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_\varrho \partial q_\nu} \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\varkappa} \right\}. \end{aligned}$$

Durch (82) entwickelt sich aus (81):

$$(83) \quad \begin{aligned} \frac{\partial (a_\varkappa, a_\lambda)}{\partial t} = \sum_\nu \sum_\varrho \Big\{ & -\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\lambda} \frac{\partial^2 H}{\partial q_\varrho \partial q_\nu} + \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \frac{\partial^2 H}{\partial q_\varrho \partial q_\nu} \\ & - \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\lambda} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\varrho \partial q_\nu} + \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\varrho \partial q_\nu} \\ & + \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\lambda} \frac{\partial^2 H}{\partial q_\varrho \partial p_\nu} - \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\lambda} \frac{\partial^2 H}{\partial q_\varrho \partial p_\nu} \\ & + \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\lambda} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\varrho \partial p_\nu} - \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\lambda} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\varrho \partial p_\nu} \Big\}. \end{aligned}$$

1) Es gilt hier dieselbe nähere Bestimmung des Wortes „sämtlich" wie in der Fußnote zum Poissonschen Satz (p. 128).

Die ersten und die letzten beiden Doppelsummen zerstören sich, weil sie erstens entgegengesetztes Vorzeichen haben und zweitens sich durch Vertauschung der Summationen ineinander überführen lassen. Die mittleren vier heben sich aber paarweise gegeneinander auf. Damit verschwindet die ganze Doppelsumme (83) und wir haben gefunden:

$$(84) \qquad \frac{\partial (a_\varkappa, a_\lambda)}{\partial t} = 0,$$

d. h. die Existenz eines räumlichen Potentials ist die *ausreichende* Bedingung dafür, daß $(a_\varkappa, a_\lambda)$ bloße Funktion der Elemente ist.

3. Die *Notwendigkeit* dieser Bedingung nachzuweisen, unterläßt auch Lagrange, obgleich er in den Schlußbemerkungen zu Kap. I des achten Abschnittes (M. A. Sec. Part. **II**, p. 189) ausdrücklich betont: «Mais la même extension[1]) ne peut pas avoir lieu à l'égard des forces principales qui entrent dans les équations différentielles dont l'intégration introduit les constantes arbitraires. Ces forces, multipliées chacune par l'élément de sa direction, doivent toujours former une quantité intégrable...» Doch er beruhigt sich bei dieser Beschränkung immer mit dem Gedanken: «C'est le cas de la nature»!

Werden nunmehr die Grundkräfte allgemein vorausgesetzt, so benutzen wir die kanonischen Gleichungen (74), und bilden wie vorher

$$(85) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \dot q_\nu}{\partial a_\varkappa} &= \frac{\partial}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial T'}{\partial p_\nu} = \sum_\varrho \left\{ \frac{\partial^2 T'}{\partial q_\varrho \partial p_\nu}\frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\varkappa} + \frac{\partial^2 T'}{\partial p_\varrho \partial p_\nu}\frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\varkappa} \right\} \\ \frac{\partial \dot p_\nu}{\partial a_\varkappa} &= \frac{\partial P_\nu}{\partial a_\varkappa} - \frac{\partial}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial T'}{\partial q_\nu} = -\sum_\varrho \left\{ \frac{\partial^2 T'}{\partial q_\varrho \partial q_\nu}\frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\varkappa} + \frac{\partial^2 T'}{\partial p_\varrho \partial q_\nu}\frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\varkappa} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho}\frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\varkappa} + \frac{\partial P_\nu}{\partial p_\varrho}\frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\varkappa} \right\}, \end{aligned}$$

denn wir können die Grundkräfte als Funktionen von q, p, t darstellen[2]) (s. Einl. S. 5). Werden die Ausdrücke (85) in (81) eingeführt, so sind die Summenglieder mit T' genau so gebaut wie früher mit H in (83). Dieser Teil der Doppelsummen verschwindet demnach wieder, und es bleibt zunächst:

$$(86) \quad \frac{\partial (a_\varkappa, a_\lambda)}{\partial t} = \sum_\nu \sum_\varrho \left\{ \left(\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \right) \frac{\partial P_\nu}{\partial p_\varrho} + \left(\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \right) \frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho} \right\}.$$

1) Siehe Einleitung S. 2.

2) Stellen wir uns dagegen die P als Funktionen von a, t vor, so haben wir auch die bemerkenswerte Form:

$$\frac{\partial (a_\varkappa, a_\lambda)}{\partial t} = \sum_\nu \left\{ \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial P_\nu}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial P_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \right\} = \sum_\nu \frac{\partial \{q_\nu, P_\nu\}}{\partial \{a_\varkappa, a_\lambda\}}.$$

Dieser Ausdruck kann ganz derselben Transformation unterworfen werden wie der analoge für das Poissonsche Klammersymbol (75). Es verschwinden nämlich die Koeffizienten aller $\frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu}$, bei denen $\varrho = \nu$, und für $\varrho \neq \nu$ korrespondiert jedem Glied

$$\left(\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda}\right)\frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho}$$

ein zweites mit vertauschten Summenzeigern ϱ, ν. Diese werden vereinigt, so daß für den zweiten Teil der Doppelsumme (86)

$$\sum_{\nu,\varrho}\left(\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda}\right)\left(\frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho} - \frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu}\right)$$

steht, wo die Summe sich nun über alle Kombinationen ν, ϱ der Zahlen 1 bis n ohne Wiederholung erstreckt. Doch schreiben wir ihn auch in der Form der Doppelsumme

$$\frac{1}{2}\sum_\nu\sum_\varrho\left(\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda}\right)\left(\frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho} - \frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu}\right),$$

wo ν, ϱ über alle Zahlen von 1 bis n gehen.

Die Koeffizienten von $\frac{\partial P_\nu}{\partial p_\varrho}$ und $\frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho} - \frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu}$ lassen sich wieder vermittels der Donkinschen Symbole ausdrücken, so daß schließlich (86) die Gestalt[1]) erhält:

$$(87)\qquad \frac{\partial(a_\varkappa, a_\lambda)}{\partial t} = \sum_\nu\sum_\varrho \frac{\partial\{q_\nu, p_\varrho\}}{\partial\{a_\varkappa, a_\lambda\}}\frac{\partial P_\nu}{\partial p_\varrho} + \sum_{\nu,\varrho}\frac{\partial\{q_\nu, q_\varrho\}}{\partial\{a_\varkappa, a_\lambda\}}\left(\frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho} - \frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu}\right)$$

Mit Worten:

Die Änderungsgeschwindigkeit der Lagrangeschen Klammerausdrücke ist ebenfalls eine lineare Funktion der sämtlichen Impulsderivierten der Kraftkomponenten des Systems und der Wirbelkomponenten des Kraftfeldes; ihre Koeffizienten sind Funktionaldeterminanten in der Form Donkinscher Symbole.

Die Größen $\frac{\partial(a_\varkappa, a_\lambda)}{\partial t}$ werden Null, wenn alle Impulsderivierten und Wirbelkomponenten verschwinden; um aber das Umgekehrte zu beweisen, muß gezeigt werden, daß sich die $n(2n-1)$ linearen Gleichungen (87) nach den $\frac{n(3n-1)}{2}$ Größen $\frac{\partial P_\nu}{\partial p_\varrho}$ und $\frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho} - \frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu}$ auflösen

---

1) Für $n = 1$ wird einfach $\frac{\partial(a,b)}{\partial t} = \frac{\partial\{q,p\}}{\partial\{a,b\}}\frac{\partial P}{\partial p} = (a, b)\frac{\partial P}{\partial p}$, worin a, b die beiden Elemente der Bewegung sind.

lassen. Es ist uns also dieselbe Aufgabe begegnet wie bei dem Beweis des Poissonschen Theorems, und ihrer gemeinsamen Erledigung wenden wir uns im folgenden Abschnitte zu.

6. Ergänzung zu den Beweisen der beiden Fundamentaltheoreme. Umkehrung der Ausdrücke für die Änderungsgeschwindigkeiten der Klammersymbole nach den Kraftkomponenten des Systems.

Wir stellen die für die Änderungsgeschwindigkeiten der beiden Klammersymbole gewonnenen Ausdrücke noch einmal zusammen, indem wir vorübergehend für die Wirbelkomponenten und Impulsderivierten die Abkürzungen

$$\frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho} - \frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu} = P_{\nu\varrho}, \qquad \frac{\partial P_\nu}{\partial p_\varrho} = P'_{\nu\varrho} \tag{88}$$

gebrauchen wollen, ihre Koeffizienten aber wieder ausführlich hinschreiben:

$$\frac{\partial[a_\varkappa, a_\lambda]}{\partial t} = \sum_\nu \sum_\varrho \left\{ \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\varrho} \right) P'_{\nu\varrho} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu} \right) P_{\nu\varrho} \right\} \tag{89a}$$

$$\frac{\partial(a_\varkappa, a_\lambda)}{\partial t} = \sum_\nu \sum_\varrho \left\{ \left(\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial p_\varrho}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \right) P'_{\nu\varrho} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial q_\varrho}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \right) P_{\nu\varrho} \right\} \tag{89b}$$

Trotz der Überzahl der $n(2n-1)$ Gleichungen über $\frac{n(3n-1)}{2}$ Unbekannte (die nur für $n = 1$ den Wert 0 hat), gelingt es, diese eindeutig und linear durch die Änderungsgeschwindigkeiten jeder Art von Klammersymbolen für sich darzustellen, und zwar durch das folgende Verfahren: Wir vervollständigen das System der Gl. (89), indem wir die Identitäten für $\varkappa = \lambda$ und die Ausdrücke mit vertauschten Argumenten $a_\lambda, a_\varkappa$ hinzufügen. Darauf multiplizieren wir jede der nunmehr $4n^2$ Gl. (89a) und (89b) für sich mit solchen Faktoren, welche die Anwendung der Relationen (58), (59) durch Addition der mit den Faktoren versehenen Gleichungen ermöglichen.

I. Die Auflösung nach den *Wirbelkomponenten* $P_{\nu\varrho}$ geschieht in (89a) durch Multiplikation mit $\frac{\partial p_\sigma}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial p_\tau}{\partial a_\lambda}$, wo σ, τ jede der Zahlen von 1 bis n sein können. So erscheint zunächst:

$$\sum_\varkappa \sum_\lambda \frac{\partial p_\sigma}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial p_\tau}{\partial a_\lambda} \frac{\partial[a_\varkappa, a_\lambda]}{\partial t}$$

$$= \sum_\varkappa \sum_\lambda \sum_\nu \sum_\varrho \left\{ \left(\frac{\partial p_\sigma}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho} \cdot \frac{\partial p_\tau}{\partial a_\lambda} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu} - \frac{\partial p_\sigma}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \cdot \frac{\partial p_\tau}{\partial a_\lambda} \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\varrho} \right) P'_{\nu\varrho} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_\sigma}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \cdot \frac{\partial p_\tau}{\partial a_\lambda} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_o} - \frac{\partial p_\sigma}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho} \cdot \frac{\partial p_\tau}{\partial a_\lambda} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu} \right) P_{\nu\varrho} \right\}.$$