Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik

Winkelmann, Max

1909

4. Theorem über das Poissonsche Klammersymbol

Die Summe über die Produkte aus sämtlichen Störungsgrößen A in die zugehörigen Elementgeschwindigkeiten $\dot{a}$ hat den Wert Null.

In Zeichen:

$$\sum_{\varkappa} A_{\varkappa} \dot{a}_{\varkappa} = 0. \tag{66a}$$

Diese Summe besitzt eine mechanische Bedeutnng; *sie stellt die Leistung der Störkräfte am System dar, welche durch die Störung seiner sämtlichen Koordinaten verursacht wird.* Bezeichnen wir sie mit $\mathfrak{L}$, so ist mit Rücksicht auf (29):

$$\mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{B}}{\mathfrak{d}t} = \sum_{\nu} Q_{\nu} \frac{\mathfrak{d}q_{\nu}}{\mathfrak{d}t} = \sum_{\varkappa} A_{\varkappa} \frac{da_{\varkappa}}{dt}. \tag{66b}$$

Es waren aber von vornherein die Störungen der Koordinaten: $\mathfrak{d}q_{\nu} = 0$, so daß durch $\mathfrak{L} = 0$ der Satz (66a) nur als ein selbstverständliches Korollar dieser Festsetzung erscheint.

Immerhin müssen ihn auch die Störungsgleichungen bestätigen. Substituiert man nämlich in (66b) für jedes $\dot{a}_{\varkappa}$ seinen Ausdruck nach (56a) oder für jedes $A_{\varkappa}$ nach (56b), so kommt

$$\sum_{\varkappa} A_{\varkappa} \dot{a}_{\varkappa} = \sum_{\varkappa} \sum_{\lambda} [a_{\varkappa}, a_{\lambda}] A_{\varkappa} A_{\lambda} = \sum_{\varkappa} \sum_{\lambda} (a_{\varkappa}, a_{\lambda}) \dot{a}_{\varkappa} \dot{a}_{\lambda};$$

und da beide Summenbuchstaben $\varkappa$, λ die Zahlen von 1 bis $2n$ durchlaufen, so kann man auch schreiben:

$$\sum_{\varkappa} A_{\varkappa} \dot{a}_{\varkappa} = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa} \sum_{\lambda} A_{\varkappa} A_{\lambda} \{[a_{\varkappa}, a_{\lambda}] + [a_{\lambda}, a_{\varkappa}]\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\varkappa} \sum_{\lambda} \dot{a}_{\varkappa} \dot{a}_{\lambda} \{(a_{\varkappa}, a_{\lambda}) + (a_{\lambda}, a_{\varkappa})\}.$$

Die in Klammern stehenden Faktoren verschwinden wegen (35, 55) und deshalb auch $\sum_{\varkappa} A_{\varkappa} \dot{a}_{\varkappa}$.

Damit ist der Zusammenhang der beiden Systeme von Störungsgleichungen hinreichend aufgeklärt. Wir untersuchen nunmehr den Einfluß, welchen die *Grundkräfte* auf ihre Struktur ausüben.

4. Theorem über das Poissonsche Klammersymbol.

Die *beiden* Klammersymbole sind, wie schon bemerkt, Funktionen der Elemente und der Zeit. Ihre Abhängigkeit von der Zeit, sofern sie als selbständige Veränderliche auftritt, wird aber allein durch den Charakter der Grundkräfte bestimmt. In bezug hierauf gilt das folgende, fundamentale Theorem:

Die Poissonschen *Klammerausdrücke sind insgesamt dann, und* nur dann[1]), *explizite unabhängig von der Zeit und bloße Funktionen der Elemente, wenn die Kräfte der ungestörten Bewegung konservativ sind.*

Beweis: Poisson zeigt nur, daß die Existenz eines räumlichen Potentials für die Grundkräfte die hinreichende Bedingung für die Unabhängigkeit von t ist. Für die allgemeine Grundlage unserer Untersuchungen ist es aber wesentlich, auch die Notwendigkeit dieser Bedingung einzusehen.

1. Wir bilden deshalb direkt

$$\frac{\partial[a_\varkappa, a_\lambda]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\sum_\nu \left\{\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\right\} = \tag{67}$$

$$\sum_\nu \left\{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\cdot\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\cdot\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\right\},$$

worin die partielle Differentiation nach t *bei konstant gehaltenen Elementen* vorzunehmen ist. Da die im Summengliede auftretenden Differentialquotienten durch ihre Ableitung aus den Zustandsgleichungen (3) zunächst als Funktionen von q, p, t auftreten, so bedeutet z. B. $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}$ nicht etwa dasselbe wie $\frac{\partial^2 a_\varkappa}{\partial t\,\partial q_\nu}$. Vielmehr ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} &= \frac{\partial^2 a_\varkappa}{\partial t\,\partial q_\nu} + \sum_\varrho\left\{\frac{\partial^2 a_\varkappa}{\partial q_\varrho \partial q_\nu}\frac{\partial q_\varrho}{\partial t} + \frac{\partial^2 a_\varkappa}{\partial p_\varrho \partial q_\nu}\frac{\partial p_\varrho}{\partial t}\right\} \quad \text{und} \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} &= \frac{\partial^2 a_\varkappa}{\partial t\,\partial p_\nu} + \sum_\varrho\left\{\frac{\partial^2 a_\varkappa}{\partial q_\varrho \partial p_\nu}\frac{\partial q_\varrho}{\partial t} + \frac{\partial^2 a_\varkappa}{\partial p_\varrho \partial p_\nu}\frac{\partial p_\varrho}{\partial t}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{68a}$$

Wenn wir die Gl. (63), nachdem ν durch ϱ ersetzt ist, partiell nach q_ν und p_ν differenzieren, so kommt:

$$0 = \frac{\partial^2 a_\varkappa}{\partial q_\nu \partial t} + \sum_\varrho\left\{\frac{\partial^2 a_\varkappa}{\partial q_\nu \partial q_\varrho}\frac{\partial q_\varrho}{\partial t} + \frac{\partial^2 a_\varkappa}{\partial q_\nu \partial p_\varrho}\frac{\partial p_\varrho}{\partial t} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial}{\partial q_\nu}\frac{\partial q_\varrho}{\partial t} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial}{\partial q_\nu}\frac{\partial p_\varrho}{\partial t}\right\}$$

$$0 = \frac{\partial^2 a_\varkappa}{\partial p_\nu \partial t} + \sum_\varrho\left\{\frac{\partial^2 a_\varkappa}{\partial p_\nu \partial q_\varrho}\frac{\partial q_\varrho}{\partial t} + \frac{\partial^2 a_\varkappa}{\partial p_\nu \partial p_\varrho}\frac{\partial p_\varrho}{\partial t} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial}{\partial p_\nu}\frac{\partial q_\varrho}{\partial t} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_\varrho}{\partial t}\right\}.$$

Wir können und wollen für $\frac{\partial q_\varrho}{\partial t}$, $\frac{\partial p_\varrho}{\partial t}$ die Bezeichnungen $\dot q_\varrho$, $\dot p_\varrho$ ge-

1) Wenn die Kräfte kein Potential besitzen, so können wohl einzelne, aber niemals alle Klammerausdrücke unabhängig von t werden.

brauchen. Wird die Folge der Differentiationen vertauscht, so verwandeln diese beide Gleichungen die vorhergehenden (68a) in

$$(68\text{b})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} = -\sum\limits_\varrho \left\{ \dfrac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\dfrac{\partial \dot q_\varrho}{\partial q_\nu} + \dfrac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\dfrac{\partial \dot p_\varrho}{\partial q_\nu} \right\} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} = -\sum\limits_\varrho \left\{ \dfrac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\dfrac{\partial \dot q_\varrho}{\partial p_\nu} + \dfrac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\dfrac{\partial \dot p_\varrho}{\partial p_\nu} \right\}. \end{cases}$$

Mit Hilfe der so ausgeführten Differentiationen wird:

$$(69)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial[a_\varkappa, a_\lambda]}{\partial t} = -\sum_\nu\sum_\varrho \Bigg\{ & \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu}\frac{\partial \dot q_\varrho}{\partial p_\nu} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu}\frac{\partial \dot p_\varrho}{\partial p_\nu} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\varrho}\frac{\partial \dot q_\varrho}{\partial q_\nu} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\varrho}\frac{\partial \dot p_\varrho}{\partial q_\nu} \\ & - \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial \dot q_\varrho}{\partial q_\nu} - \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial \dot p_\varrho}{\partial q_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\varrho}\frac{\partial \dot q_\varrho}{\partial p_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\varrho}\frac{\partial \dot p_\varrho}{\partial p_\nu} \Bigg\}. \end{aligned}$$

Die Größen $\dot q_\varrho$, $\dot p_\varrho$ müssen die Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung befriedigen, denn die Zeitdifferentiationen verstehen sich bei konstanten Elementen.

2. Setzen wir jetzt voraus, daß die Grundkräfte ein Potential U besitzen, d. h. $P_\nu = -\dfrac{\partial U}{\partial q_\nu}$, wo U bloß Funktion der Koordinaten ist, aber auch t enthalten kann, so lauten die Bewegungsgleichungen in der kanonischen Form:

$$(70)\qquad \dot q_\varrho = \frac{\partial H}{\partial p_\varrho}, \quad \dot p_\varrho = -\frac{\partial H}{\partial q_\varrho},$$

worin $H = T' + U$, die **Hamiltonsche** Funktion, nur von den q, p und eventuell von t abhängt. Also:

$$(71)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \dot q_\varrho}{\partial q_\nu} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial q_\nu \partial p_\varrho}, & \dfrac{\partial \dot p_\varrho}{\partial q_\nu} = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_\nu \partial q_\varrho} \\ \dfrac{\partial \dot q_\varrho}{\partial p_\nu} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\nu \partial p_\varrho}, & \dfrac{\partial \dot p_\varrho}{\partial p_\nu} = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\nu \partial q_\varrho}. \end{cases}$$

Folglich:

$$(72)\qquad \frac{\partial \dot q_\varrho}{\partial p_\nu} = \frac{\partial \dot q_\nu}{\partial p_\varrho}, \quad \frac{\partial \dot p_\varrho}{\partial q_\nu} = \frac{\partial \dot p_\nu}{\partial q_\varrho}, \quad \frac{\partial \dot q_\varrho}{\partial q_\nu} + \frac{\partial \dot p_\nu}{\partial p_\varrho} = 0.$$

Beachtet man, daß in der Doppelsumme (69) die Indices ν, ϱ miteinander vertauscht werden dürfen, so heben sich ihre Glieder vermöge (72) paarweise gegeneinander weg, und man erhält

$$(73)\qquad \frac{\partial[a_\varkappa, a_\lambda]}{\partial t} = 0,$$

welches der erste Teil unserer Behauptung ist.

3. Sind aber die Grundkräfte allgemein (existiert keine Kräftefunktion), so treten an Stelle der speziellen kanonischen Gleichungen (70) die allgemeinen:

$$\dot{q}_\varrho = \frac{\partial T'}{\partial p_\varrho}, \quad \dot{p}_\varrho = P_\varrho - \frac{\partial T'}{\partial q_\varrho}. \tag{74}$$

Hinsichtlich T' gilt also dasselbe, als wenn H stehen würde. Führen wir die Ausdrücke (74) in (69) ein, so bleiben allein Glieder mit den partiellen Derivierten von P_ϱ nach q_ϱ und p_ϱ übrig, zunächst in der Form:

$$\frac{\partial [a_\varkappa, a_\lambda]}{\partial t} = \sum_\nu \sum_\varrho \left\{ \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho} \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu} \right) \frac{\partial P_\varrho}{\partial p_\nu} + \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\varrho} \right) \frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu} \right\}. \tag{75}$$

Der zweite Teil dieser Summe kann umgeformt werden. Beachtet man nämlich, daß die Koeffizienten aller Größen $\frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu}$, bei denen $\varrho = \nu$ ist, den Wert Null besitzen, während bei verschiedenen ϱ und ν die Koeffizienten von $\frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu}$ und $\frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho}$ sich durch das Zeichen unterscheiden, so kann man für den zweiten Teil der Summe auch

$$\sum_{\nu, \varrho} \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\varrho} \right) \left(\frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu} - \frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho} \right)$$

schreiben, wo nunmehr über alle Kombinationen ν, ϱ der Zahlen 1 bis n ohne Wiederholung summiert wird, aber auch in der Form:

$$\tfrac{1}{2} \sum_\nu \sum_\varrho \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\varrho} \right) \left(\frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu} - \frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho} \right),$$

wo sowohl ν, als auch ϱ alle Zahlen von 1 bis n durchläuft. Wir fassen die Ausdrücke $\frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu} - \frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho}$ als selbständige Größen auf und nennen sie die *Wirbelkomponenten des Kraftfeldes.*[1]) Die Größen $\frac{\partial P_\varrho}{\partial p_\nu}$ sollen kurzweg die *Impulsderivierten der Kraftkomponenten* des Systems heißen. Wenn wir uns endlich der Donkinschen Bezeichnung für die Koeffizienten bedienen, so wird

$$\frac{\partial [a_\varkappa, a_\lambda]}{\partial t} = \sum_\nu \sum_\varrho \frac{\partial \{a_\varkappa, a_\lambda\}}{\partial \{q_\nu, p_\varrho\}} \frac{\partial P_\varrho}{\partial p_\nu} + \sum_{\nu, \varrho} \frac{\partial \{a_\varkappa, a_\lambda\}}{\partial \{p_\varrho, p_\nu\}} \left(\frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu} - \frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho} \right). \tag{76}$$

1) Als „Feld" ist hier der sog. Lagrangesche Raum zu verstehen. Vgl. Heun, L. d. M. Nr. 92, S. 146. Für Elementarkräfte, die nach rechtwinkligen Koordinaten zerlegt sind, ist dieser Ausdruck in der math. Physik gebräuchlich.

Wir sagen:

Die Änderungsgeschwindigkeit[1]) *der Poissonschen Klammerausdrücke ist eine lineare Funktion der sämtlichen Impulsderivierten der Kraftkomponenten des Systems und der Wirbelkomponenten des Kraftfeldes; ihre Koeffizienten sind Funktionaldeterminanten in der Form der Donkinschen Symbole.*

Die Zahl der Glieder der ersten Art ist offenbar n^2, die der zweiten $\frac{n(n-1)}{2}$, also besteht der lineare Ausdruck (76) zusammen aus $\frac{n(3n-1)}{2}$ Gliedern.

Die Größen $\frac{\partial [a_\varkappa, a_\lambda]}{\partial t}$ werden Null, wenn alle Impulsderivierten und Wirbelkomponenten verschwinden. Um aber zu beweisen, daß diese verschwinden müssen, wenn jene *sämtlich* den Wert Null haben, muß gezeigt werden, daß sich die $n(2n-1)$ linearen Gleichungen (76) nach den $\frac{n(3n-1)}{2}$ Größen $\frac{\partial P_\varrho}{\partial p_\nu}$ und $\frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu} - \frac{\partial P_\nu}{\partial q_\varrho}$ auflösen lassen. Es ist aber für die ferneren Entwicklungen zweckmäßiger, diesen Teil des Beweises mit dem entsprechenden für die Lagrangeschen Klammersymbole gemeinschaftlich im 6. Abschnitte auszuführen. Die hier entwickelten Formeln veranlassen noch die folgenden *Bemerkungen:*

1. Differenziert man die Gl. (63), wieder nach Vertauschung von ν mit ϱ, partiell nach q_ν bzw. p_ν derart, daß dabei die Elemente und die Zeit konstant gehalten werden, so kommt

$$\frac{\partial}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial t} = -\sum_\varrho \left\{\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial \dot{q}_\varrho}{\partial q_\nu} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial \dot{p}_\varrho}{\partial q_\nu}\right\}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial t} = -\sum_\varrho \left\{\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial \dot{q}_\varrho}{\partial p_\nu} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial \dot{p}_\varrho}{\partial p_\nu}\right\}.$$

Die Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}$ und $\frac{\partial}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}$ sind nämlich gleich Null, weil $\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}$ und $\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}$, ursprünglich zwar Funktionen der q, p, t, aber nach (4) hier als Funktionen von a, t aufzufassen sind. Diese sollen jedoch bei der Differentiation unverändert bleiben. Vergleichen wir die eben gebildeten Ausdrücke mit den Gl. (68b), so finden wir:

$$(77) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} = \frac{\partial}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} = \frac{\partial}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial t}.$$

1) Da die störenden Kräfte bei diesen Betrachtungen gänzlich außer Acht bleiben, so vergessen wir hinzuzufügen: bei konstanten Elementen, und reden auch schlechtweg von den Kräften des Systems. Vgl. Cayleys Report Nr. 10.

Daß die Reihenfolge dieser Operationen vertauscht werden kann, ist nicht selbstverständlich.

2. Wir führen in die Gl. (68b) für $\dot{q}_\varrho$, $\dot{p}_\varrho$ noch die allgemeinen kanonischen Ausdrücke (74) ein und erhalten:

$$(78a)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} = \sum_\varrho \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial^2 T'}{\partial q_\varrho \partial q_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial^2 T'}{\partial p_\varrho \partial q_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial P_\varrho}{\partial q_\nu}\right)$$

$$(78b)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} = \sum_\varrho \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial^2 T'}{\partial q_\varrho \partial p_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\varrho}\frac{\partial^2 T'}{\partial p_\varrho \partial p_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\varrho}\frac{\partial P_\varrho}{\partial p_\nu}\right).$$

Nehmen wir für die Positionskoordinaten q_ϱ die rechtwinkligen Koordinaten x_i, y_i, z_i eines *freien* Systems von k Massenpunkten m_i, so werden die Impulskomponenten q_ϱ entsprechend $m_i\dot{x}_i$, $m_i\dot{y}_i$, $m_i\dot{z}_i$, die Kraftkomponenten P_ϱ entsprechend X_i, Y_i, Z_i. Sind diese sämtlich von den Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ unabhängig, d. h. alle $\frac{\partial P_\nu}{\partial p_\varrho} = 0$, so nimmt (78b) die einfache Gestalt[1]) an:

$$(79)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{\partial a_\varkappa}{\partial x_i}, \qquad i \text{ von } 1 \text{ bis } k$$

und ebenso für y und z. Diese merkwürdigen Gleichungen hat Lagrange in der M. A. (Sec. Part. VII, 61 **II** p. 83) unter der Annahme, daß eine Kräftefunktion existiert, abgeleitet.[2]) *Sie gelten aber, wie man sieht, auch noch für den allgemeinen Fall reiner Ortskräfte.*

3. Die Formel (76) wird für $n = 1$ (Systeme von einem Freiheitsgrad, zwangläufige S.) auf ein einziges Glied reduziert:

$$(80)\qquad \frac{\partial [a, b]}{\partial t} = \frac{\partial \{a, b\}}{\partial \{q, p\}}\frac{\partial P}{\partial p} = -[a, b]\frac{\partial P}{\partial p},$$

worin a, b die beiden Elemente bedeuten.

5. Theorem über das Lagrangesche Klammersymbol.

Obwohl schon aus dem im dritten Abschnitte (S. 26) bewiesenen Satze, daß die Lagrangeschen Klammersymbole rationale Funktionen aller Poissonschen sind, ohne weiteres dasselbe Theorem für jene folgt, welches im vorhergehenden Abschnitte für diese aufgestellt worden

1) $T' = T = \frac{1}{2}\sum_1^k m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$ und deshalb verschwinden alle $\frac{\partial^2 T'}{\partial q_\varrho \partial p_\nu}$ und von $\frac{\partial^2 T}{\partial p_\varrho \partial p_\nu}$ alle, für die $\varrho \neq \nu$, während für $\varrho = \nu$ der Wert $\frac{1}{m_i}$ ist.

2) Ihre Bedeutung siehe in einer nachgelassenen Arbeit von Jacobi: Über diejenigen Probleme der Mechanik, in welchen eine Kräftefunktion existiert, und über die Theorie der Störungen. — Ges. Werke 5, 347.