Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik

Winkelmann, Max

1909

3. Die Beziehungen zwischen den Poissonschen und Lagrangeschen Störungsformeln

urn:nbn:de:bsz:31-270659

Ihre Anzahl ist wieder $n(2n-1)$; hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von der Zeit gilt dasselbe, was am Schluß des ersten Abschnittes bemerkt worden ist.

3. Die Beziehungen zwischen den Poissonschen und Lagrangeschen Störungsformeln.

Wir haben somit das *Theorem* gewonnen:

Die allgemeine Form der Poissonschen und Lagrangeschen Störungsformeln bleibt bestehen, selbst wenn die Grundkräfte der Bewegung allgemein sind und kein Potential besitzen.

Stellen wir die beiden Formelsysteme noch einmal gegenüber:

$$\text{(56a)} \quad \text{Poisson} \quad \dot{a}_\varkappa = \sum_\lambda [a_\varkappa, a_\lambda] A_\lambda, \quad [a_\varkappa, a_\lambda] = \sum_\nu \frac{\partial \{a_\varkappa, a_\lambda\}}{\partial \{p_\nu, q_\nu\}}$$

$$\text{(56b)} \quad \text{Lagrange} \quad A_\lambda = \sum_\mu (a_\lambda, a_\mu) \dot{a}_\mu, \quad (a_\lambda, a_\mu) = \sum_\nu \frac{\partial \{q_\nu, p_\nu\}}{\partial \{a_\lambda, a_\mu\}},$$

so fällt uns die Reziprozität zwischen ihnen auf, die in Bezug auf die Klammerausdrücke als Koeffizienten namentlich in der Donkinschen Bezeichnung deutlich ausgeprägt ist. Jedes der beiden Systeme (56a, b) ist offenbar die Umkehrung des anderen. Jedem kommt eine eigentümliche Bedeutung zu, die sich so ausdrücken läßt:

Sind die störenden Kräfte vollständig bekannt, so berechnen wir die durch sie verursachten Veränderungen der Elemente nach den Poissonschen Formeln (56a); *kennen wir hingegen vollständig die Geschwindigkeiten, mit welchen die Elemente sich verändern, so erfahren wir die sie verursachenden Kräfte nach den Lagrangeschen Formeln* (56b).

Wir können in der Tat immer aus den Größen A rückwärts die Systemkomponenten Q der Störkräfte konstruieren, wie wir in Nr. 31 gezeigt haben. Die weitere Reduktion (Auflösung in Elementarkräfte) ist eine Aufgabe der Statik.[1])

Wenn wir das reziproke Verhältnis der Poissonschen zu den Lagrangeschen Formeln so auffassen, wird die Polemik hinfällig, die Lagrange an seine Formeln gegen die von Poisson anschließt.[2]) Da wir die beiden Störungsformeln aus zwei gänzlich verschiedenen Quellen abgeleitet haben, so ist es wünschenswert, den Übergang von der einen zur andern direkt zu bewirken und damit diese durch jene

1) Der allgemeine Gedanke, überhaupt aus den Systemgrößen der Mechanik rückwärts die elementaren zu berechnen, findet sich an den kinematischen Größen der Geschwindigkeit und Beschleunigung ausgeführt bei Heun, L. d. M. Nr. 86, p. 136—139.

2) M. A. Sec. Part. Sect. VIII, Chap. I, Nr. 7, II p. 186.

zu verifizieren. Poisson hält eine solche Umkehrung durch einen direkten Eliminationsprozeß für unmöglich[1]): «Mais il ne paraît pas qu'on puisse parvenir, par ce moyen, aux expressions générales de ces differentielles».[2])

Bevor wir die Möglichkeit dieser Umkehrung nachweisen, will ich die vollständigen Differentialrelationen vorausschicken, die sich aus der Gleichwertigkeit der beiden Formen (3) und (4) der Zustandsgleichungen ergeben. Diese Beziehungen bilden für alle ferneren Entwicklungen das fundamentale, analytische Werkzeug.

Wir haben die $2n$ Zustandsgrößen q_ν, p_ν, die $2n$ Elemente $a_\varkappa$ und die Zeit t als explizite Größen in den funktionalen Beziehungen

$$(4)\quad q_\nu = q_\nu(a, t),\quad p_\nu = p_\nu(a, t) \quad\text{und}\quad (3)\quad a_\varkappa = a_\varkappa(q, p, t).$$

Setzen wir nun die Werte sämtlicher a aus (3) in (4) ein, so ergeben sich in bezug auf alle q, p und t die Identitäten

$$(57)\qquad (\alpha)\ q_\nu \equiv q_\nu[a_\varkappa(q, p, t), t],\quad (\beta)\ p_\nu \equiv p_\nu[a_\varkappa(q, p, t), t],\qquad \begin{cases}\varkappa \text{ von 1 bis } 2n\\ \nu \text{ von 1 bis } n.\end{cases}$$

Wir differenzieren sie partiell nach jeder einzelnen vorkommenden Variabeln und zwar

I) nach jedem q_μ:

$$(58)\qquad (57\alpha)\quad \delta_{\nu\mu} = \sum_\varkappa \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\mu},\qquad (57\beta)\quad 0 = \sum_\varkappa \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\mu};$$

II) nach jedem p_μ:

$$(59)\qquad (57\alpha)\quad 0 = \sum_\varkappa \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\mu},\qquad (57\beta)\quad \delta_{\nu\mu} = \sum_\varkappa \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\mu};$$

III) nach t:

$$(60)\qquad (57\alpha)\quad 0 = \sum_\varkappa \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial t} + \frac{\partial q_\nu}{\partial t},\qquad (57\beta)\quad 0 = \sum_\varkappa \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial t} + \frac{\partial p_\nu}{\partial t}.$$

Umgekehrt setzen wir die Werte sämtlicher q_ν, p_ν aus (4) in (3) ein, erhalten die identischen Gleichungen

$$(61)\qquad a_\varkappa \equiv a_\varkappa[q_\nu(a, t),\ p_\nu(a, t),\ t]\qquad \begin{cases}\nu \text{ von 1 bis } n\\ \varkappa \text{ von 1 bis } 2n\end{cases}$$

und differenzieren sie partiell

I) nach jedem a_λ:

$$(62)\qquad \delta_{\varkappa\lambda} = \sum_\nu \left\{\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_\nu}{\partial a_\lambda}\right\};$$

---

1) l. c. p. 22.

2) nämlich der Elemente.

II) nach t:

$$0 = \sum_\nu \left\{\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial q_\nu}{\partial t} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_\nu}{\partial t}\right\} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial t}. \tag{63}$$

In den so abgeleiteten Relationen (58)—(60), (62)—(63) bedeuten, wie üblich, die Zeichen $\delta_{\nu\mu}$ und $\delta_{\varkappa\lambda}$ die Zahl 0, sobald die Indices verschieden, die Zahl 1, sobald sie einander gleich sind.

Anmerkung 1. Substituieren wir entweder die Werte von $\frac{\partial q_\nu}{\partial t}, \frac{\partial p_\nu}{\partial t}$ nach (60) in (63), oder umgekehrt die Werte von $\frac{\partial a_\varkappa}{\partial t}$ nach (63) in (60), so werden die Gl. (63) bez. (60) vermöge der Rel. (62), bez. (58), (59) identisch erfüllt. Die Gl. (63) bez. (60) sind also nicht unabhängig von den übrigen, lassen sich vielmehr durch eine Kombination derselben gewinnen. Oder auch: die Gl. (60) und (63) genügen, um die Rel. (58), (59), (62) zu beweisen, denn diese ergeben sich aus den oben erwähnten Identitäten.

Anmerkung 2. Die Gl. (63) drückt aus, daß von dem vollständigen Differentialausdruck

$$da_\varkappa = \sum_\nu \left\{\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} dq_\nu + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} dp_\nu\right\} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial t} dt$$

nur der Teil übrig bleibt, der in Gl. (24a) nach der Definition des Symbols $\mathfrak{d}$ bestehen muß, da die Änderungen der Elemente allein von den Störungen der Zustandsgrößen, $\mathfrak{d}q$ und $\mathfrak{d}p$, herrühren.

Anmerkung 3. Mit Hilfe der in (58), (59) erreichten Darstellungen der Zahlen 0, 1 geschehen leicht und unmittelbar solche Umkehrungen, wie z. B. die Berechnung der Systemkomponenten Q aus den Größen A auf Grund der Gl. (30). Die Gl. (31) werden aus ihnen erhalten, wenn wir (30) einmal mit $\frac{\partial q_\varkappa}{\partial q_\mu}$, das andere Mal mit $\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\mu}$ multiplizieren, über alle $\varkappa$ summieren und für die rechte Seite die erste Gleichung von (58) bez. (59) beachten. Die Rel. (58), (59), (62) fließen auch aus (28a, b).

Es läßt sich nunmehr folgender Zusammenhang zwischen den beiden Klammersymbolen beweisen:

$$\varepsilon_{\varkappa\mu} = \sum_\lambda [a_\varkappa, a_\lambda](a_\lambda, a_\mu) = \begin{cases} 0 \text{ wenn } \varkappa \neq \mu \\ 1 \text{ wenn } \varkappa = \mu. \end{cases} \tag{64}$$

Erinnern wir uns der Bedeutung der Symbole nach (56), so schreibt sich ausführlich

$$\varepsilon_{\varkappa u} = \sum_\lambda \sum_\nu \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\right) \cdot \sum_{\nu'} \left(\frac{\partial q_{\nu'}}{\partial a_\lambda}\frac{\partial p_{\nu'}}{\partial a_u} - \frac{\partial p_{\nu'}}{\partial a_\lambda}\frac{\partial q_{\nu'}}{\partial a_u}\right),$$

dann, die Summenglieder einzeln miteinander multipliziert, läßt sich das Produkt folgendermaßen anordnen:

$$\varepsilon_{\varkappa\mu} = \sum_{\nu}\sum_{\nu'}\left\{\begin{aligned} &+\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_{\nu'}}{\partial a_\mu}\sum_\lambda \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu}\frac{\partial q_{\nu'}}{\partial a_\lambda} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial q_{\nu'}}{\partial a_\mu}\sum_\lambda \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_{\nu'}}{\partial a_\lambda} \\ &-\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial p_{\nu'}}{\partial a_\mu}\sum_\lambda \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\frac{\partial q_{\nu'}}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial q_{\nu'}}{\partial a_\mu}\sum_\lambda \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu}\frac{\partial p_{\nu'}}{\partial a_\lambda}\end{aligned}\right\}.$$

Hier verschwinden die beiden letzten Doppelsummen ganz wegen (58, 59), und nach denselben Relationen zieht sich die ursprünglich dreifache Summe zusammen auf die einfache

$$(65) \qquad (62) \quad \varepsilon_{\varkappa\mu} = \sum_\nu \left\{\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_\nu}{\partial a_\mu} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\mu}\right\} = \delta_{\varkappa\mu},$$

w. z. b. w. Ich fand diese Beziehung samt Beweis nachträglich auch in dem neuen, vortrefflichen Buche von Whittaker, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies (Cambridge 1904), Chapt. XI, Nr. 130, p. 288. Dort wird jedoch auf ihre wichtige Bedeutung für den Zusammenhang der beiden Störungsformeln nicht aufmerksam gemacht. Sie findet sich aber auch schon in einer nachgelassenen Arbeit von Jacobi: Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi. Ges. Werke B. 5, 1 p. 188.

Aus den Formeln (64), denen man noch die ihnen äquivalenten und ebenso leicht zu beweisenden (die Eigenschaften (35α) bez. (55α) der beiden Klammersymbole beachtend)

$$\varepsilon_{\mu\varkappa} = \sum_\lambda (a_\varkappa, a_\lambda)[a_\lambda, a_\mu] = \delta_{\mu\varkappa}$$

zur Seite stellen kann, ergibt sich ohne weiteres, daß die Gl. (56a) die Auflösungen der Gl. (56b) nach den A als Unbekannten und umgekehrt, daß die Gl. (56b) die Auflösungen der Gl. (56a) nach den $\dot{a}$ als Unbekannten sind. Aus diesen $n(2n-1)$ bilinearen Relationen (64) zwischen den $[a_\varkappa, a_\lambda]$ und $(\alpha_\varkappa, \alpha_\lambda)$ folgt ferner:

Die Poissonschen Klammersymbole sind rationale Funktionen der Lagrangeschen und umgekehrt.

Es gehört hierher noch ein Satz, den Lagrange unter der Voraussetzung konservativer Kräfte nur für das spezielle astronomische Störungsproblem als eine bemerkenswerte Folgerung aus seinen Störungsformeln angesehen hat.[1]) Wir verallgemeinern ihn in der folgenden Fassung:

1) M. A. Sec. Part. Sect. VII, 65. **II**, p. 90: C'est une conséquence importante, un résultat très remarquable.

Die Summe über die Produkte aus sämtlichen Störungsgrößen A in die zugehörigen Elementgeschwindigkeiten $\dot{a}$ hat den Wert Null.

In Zeichen:

$$\sum_{\varkappa} A_{\varkappa} \dot{a}_{\varkappa} = 0. \tag{66a}$$

Diese Summe besitzt eine mechanische Bedeutnng; *sie stellt die Leistung der Störkräfte am System dar, welche durch die Störung seiner sämtlichen Koordinaten verursacht wird.* Bezeichnen wir sie mit $\mathfrak{L}$, so ist mit Rücksicht auf (29):

$$\mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{W}}{\mathfrak{d}t} = \sum_{\nu} Q_{\nu} \frac{\mathfrak{d}q_{\nu}}{\mathfrak{d}t} = \sum_{\varkappa} A_{\varkappa} \frac{da_{\varkappa}}{dt}. \tag{66b}$$

Es waren aber von vornherein die Störungen der Koordinaten: $\mathfrak{d}q_{\nu} = 0$, so daß durch $\mathfrak{L} = 0$ der Satz (66a) nur als ein selbstverständliches Korollar dieser Festsetzung erscheint.

Immerhin müssen ihn auch die Störungsgleichungen bestätigen. Substituiert man nämlich in (66b) für jedes $\dot{a}_{\varkappa}$ seinen Ausdruck nach (56a) oder für jedes $A_{\varkappa}$ nach (56b), so kommt

$$\sum_{\varkappa} A_{\varkappa} \dot{a}_{\varkappa} = \sum_{\varkappa} \sum_{\lambda} [a_{\varkappa}, a_{\lambda}] A_{\varkappa} A_{\lambda} = \sum_{\varkappa} \sum_{\lambda} (a_{\varkappa}, a_{\lambda}) \dot{a}_{\varkappa} \dot{a}_{\lambda};$$

und da beide Summenbuchstaben $\varkappa$, λ die Zahlen von 1 bis $2n$ durchlaufen, so kann man auch schreiben:

$$\sum_{\varkappa} A_{\varkappa} \dot{a}_{\varkappa} = \tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa} \sum_{\lambda} A_{\varkappa} A_{\lambda} \{[a_{\varkappa}, a_{\lambda}] + [a_{\lambda}, a_{\varkappa}]\}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa} \sum_{\lambda} \dot{a}_{\varkappa} \dot{a}_{\lambda} \{(a_{\varkappa}, a_{\lambda}) + (a_{\lambda}, a_{\varkappa})\}.$$

Die in Klammern stehenden Faktoren verschwinden wegen (35, 55) und deshalb auch $\sum_{\varkappa} A_{\varkappa} \dot{a}_{\varkappa}$.

Damit ist der Zusammenhang der beiden Systeme von Störungsgleichungen hinreichend aufgeklärt. Wir untersuchen nunmehr den Einfluß, welchen die *Grundkräfte* auf ihre Struktur ausüben.

4. Theorem über das Poissonsche Klammersymbol.

Die *beiden* Klammersymbole sind, wie schon bemerkt, Funktionen der Elemente und der Zeit. Ihre Abhängigkeit von der Zeit, sofern sie als selbständige Veränderliche auftritt, wird aber allein durch den Charakter der Grundkräfte bestimmt. In bezug hierauf gilt das folgende, fundamentale Theorem: