Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik

Winkelmann, Max

1909

2. Die Lagrangeschen Störungsformeln

urn:nbn:de:bsz:31-270659

zu bloßen Zahlen ausarten. Ihre *explizite* Abhängigkeit von der Zeit ist durch die Natur der Grundkräfte allein bedingt. Wir behalten uns die genauere Untersuchung dieses Umstandes vor, wenn wir die Störungstheorie von Lagrange entwickelt haben.

2. Die Lagrangeschen Störungsformeln.

Als der natürliche Ausgangspunkt für die Ableitung der zuerst von Lagrange aufgestellten Störungsformeln erscheint die *Zentralgleichung*[1]), deren Keim wir schon bei ihm[2]) finden. Ihre Bedeutung in dynamischer Auffassung[3]) ist diese:

Die Leistung der virtuellen Impulsarbeit des Systems ist gleich der Summe der virtuellen Änderung seiner kinetischen Energie und der virtuellen Arbeit der eingeprägten Kräfte.

---

1) Ihre zentrale Bedeutung (daher der Name) für die systematische Mechanik, insbesondere ihr wesentlich *kinematischer* Inhalt ist wohl zuerst von K. Heun klar erkannt worden. Von der Literatur über die Zentralgleichung, soweit sie wirklich selbständig auftritt, ist mir die folgende bekannt. a) Deutsche Autoren:

Schering, Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Maß von der Bewegung der Körper abhängt, 1873. — Abhandlungen der königl. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen. Bd. XVIII. Ableitung aus dem Gauß schen Prinzip des kleinsten Zwanges. Rein formal. p. 17. „Fundamentalgleichung der Bewegung."

Hamel, Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik, 1903. — Sonderabdruck aus der Z. f. Math. u. Phys. **50** (1904), S. 14 (K. II § 4). Dynamische Auffassung und Ableitung aus der Lagrangeschen Identität.

— Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik, 1904. — Math. Ann. **59**, S. 423 (§ 2). „Allgemeine Zentralgleichung."

Heun, Die Bedeutung des D'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen, 1901. Archiv der Math. u. Phys. (3) **2**.

— Formeln und Lehrsätze der allgemeinen Mechanik, 1902. (Leipzig, Göschen) Anhang. Hier heißt sie noch „Lagrangesche Grundgleichung."

— Lehrbuch der Mechanik I. Teil. Kinematik, 1906. (Leipzig, Göschen. Sammlung Schubert Nr. 37) a. m. O. siehe Register. Rein kinematische Form. Methodischer Gebrauch.

b) Nichtdeutsche Autoren:

Beltrami, Sulle equazioni dinamiche di Lagrange. — Rendiconti dell' Istituto Lombardo, S. II, vol. XXVIII, fasc. XIV p. 745 zitiert bei

Volterra, Sopra una classe di equazioni dinamiche . Atti di Torino 1897–1898 vol. XXXIII p. 255. Einfach als „principio di Lagrange" bezeichnet.

Lorentz, Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. — Encyklopädie der math. Wiss. V, 2 Heft 1 Nr. **13** Abschnitt 35, p. 124; Nr. **14** Abschnitt 8 p. 165. L. nennt es „das D'Alembertsche Prinzip in der Form . . ."

2) l. c. Sec. Part. Sect. IV, 3. **I** p. 305.

3) Der Zentralgleichung liegt dann nur die Verbindung einer kinematischen Relation mit dem D'Alembertschen Prinzip zugrunde.

Sei die virtuelle Arbeit des Impulses $= \delta \mathsf{J}$, die der eingeprägten Kräfte $= \delta \mathsf{A}$ und die kinetische Energie[1]) des Systems $= \mathsf{E}$, so lautet die Lagrange sche Zentralgleichung

$$\frac{d}{dt}\delta \mathsf{J} = \delta \mathsf{E} + \delta \mathsf{A}. \tag{36}$$

Wir wissen seit der Arbeit von G. Hamel über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik, daß diese einfache Form der Zentralgleichung nur richtig ist, wenn die virtuellen Verrückungen aller Bahnpunkte des Systems wieder virtuelle Bahnen erzeugen[2]), also die speziellen Verrückungen der Variationsrechnung sind, daß dagegen jene Form durch eine weit kompliziertere[3]) ersetzt werden muß, wenn die virtuellen Verrückungen ganz allgemein sind.

Werden nunmehr die Größen der Gl. (36) durch die Koordinaten q, die Geschwindigkeitskomponenten $\dot{q}$ und die Impulskomponenten p, kurz durch alle Zustandsgrößen des Systems ausgedrückt, d. h. wird gesetzt:

$$\delta \mathsf{J} = \sum_\nu p_\nu \delta q_\nu, \quad \delta \mathsf{E} = \delta T, \quad \delta \mathsf{A} = \sum_\nu K_\nu \delta q_\nu, \tag{37}$$

so nimmt die Zentralgleichung die Gestalt an:

$$\frac{d}{dt}\sum_\nu p_\nu \delta q_\nu = \sum_\nu K_\nu \delta q_\nu + \delta T. \tag{38}$$

Nach Voraussetzung sind alle q wirkliche Positionskoordinaten; dies zusammen mit der Bedingung für die einfache Form der Zentralgleichung ergibt die folgenden *Übergangsgleichungen*[4]):

$$d\delta q_\nu = \delta d q_\nu, \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n. \tag{39}$$

Aus (38) werden wir eine verwandte, für unsern Zweck besser geeignete Gleichung gewinnen, wenn wir die zu T konjugierte Energieform[5]) T' einführen. Während T in den Zustandsgrößen $q, \dot{q}$ ausgedrückt

1) Ich will für die *Größe* der kinetischen Energie schlechtweg den Buchstaben E gebrauchen, wenn ich mir über die Form derselben keine bestimmte Vorstellung mache; sei sie nun in den Elementargeschwindigkeiten der Massenteile des Systems, oder in seinen Zustandsgrößen oder sonst welchen mit ihnen zusammenhängenden Variabeln ausgedrückt. Die Zentralgleichung gibt nur einen Zusammenhang zwischen zwischen den virtuellen Arbeiten des Impulses, der eingeprägten Kräfte und der virtuellen Änderung der kinetischen Energie des Systems an, ohne über die *Form* dieser virtuellen Größen an sich etwas vorauszusetzen.

2) In dieser geometrischen Fassung bei Heun, L. d. M. p. 94.

3) l. c. § 2, p. 424.

4) Hamel, L.-E. Gl. I, § 2 p. 9, — Virt. Versch. § 1 p. 422.

5) Hamilton, Irish Philosophical Transactions 1835.

ist, ist T' auf die Zustandsgrößen q, p transformiert. Bekanntlich sind T und T' verknüpft durch die Gleichung

$$2\mathsf{E} = T + T' = \sum_\nu p_\nu \dot{q}_\nu \tag{40}$$

und folglich $\delta T, \delta T'$ durch die Gleichung

$$\delta T + \delta T' = \sum_\nu \{ \dot{q}_\nu \delta p_\nu + p_\nu \delta \dot{q}_\nu \}. \tag{41}$$

Nun ist wegen (39)

$$\frac{d}{dt} \sum_\nu p_\nu \delta q_\nu = \sum_\nu \left\{ \dot{p}_\nu \delta q_\nu + p_\nu \frac{d\,\delta q_\nu}{dt} \right\} = \sum_\nu \{ \dot{p}_\nu \delta q_\nu + p_\nu \delta \dot{q}_\nu \}.$$

Führt man diesen Ausdruck in die linke Seite von (38) ein und drückt rechts δT durch $\delta T'$ vermittels Gl. (41) aus, so folgt nach einer geringen Umordnung

$$\sum_\nu \{ \dot{p}_\nu \delta q_\nu - \dot{q}_\nu \delta p_\nu \} = \sum_\nu K_\nu \delta q_\nu - \delta T'. \tag{42}$$

Um auf die Einführung der konjugierten Energieform hinzuweisen, will ich diese Gleichung die *konjugierte Zentralgleichung*[1]) nennen. Ihr läßt sich nicht der einfache, begriffliche Ausdruck wie der ursprünglichen geben.

Werden die Gesamtkräfte K wieder in Grundkräfte mit den Komponenten P und in Störkräfte mit den Komponenten Q zerlegt, so wird es auch die Arbeit der Kraftkomponenten K. Die virtuelle Arbeit der Grundkräfte sei mit $\delta\mathfrak{A}$, die der störenden mit $\delta\mathfrak{B}$ bezeichnet, so daß

$$\delta \mathsf{A} = \delta\mathfrak{A} + \delta\mathfrak{B}, \tag{43}$$

wobei, entsprechend (22) bedeuten:

$$\delta\mathfrak{A} = \sum_\nu P_\nu \delta q_\nu, \quad \delta\mathfrak{B} = \sum_\nu Q_\nu \delta q_\nu. \tag{44}$$

Die konjugierte Zentralgleichung der gestörten Bewegung nimmt dann die Form an:

$$\sum_\nu \left\{ \frac{dp_\nu}{dt} \delta q_\nu - \frac{dq_\nu}{dt} \delta p_\nu \right\} = \delta\mathfrak{A} + \delta\mathfrak{B} - \delta T'. \tag{45}$$

Werden nun die Zustandsgleichungen in der Form (4) mit beweglichen Elementen benutzt, um (45) zu befriedigen, und nehmen wir

1) Aus ihr lassen sich unmittelbar die kanonischen Bewegungsgleichungen der Mechanik ableiten.

für die virtuellen Verschiebungen δ die schon im ersten Abschnitt (S. 16) charakterisierten $\varDelta$, so müssen wir für (45) schreiben:

$$\sum_\nu \left\{ \frac{dp_\nu}{dt} \varDelta q_\nu - \frac{dq_\nu}{dt} \varDelta p_\nu \right\} = \varDelta \mathfrak{A} + \varDelta \mathfrak{B} - \varDelta T, \tag{46}$$

während bei Vernachlässigung der Störkräfte

$$\sum_\nu \left\{ \frac{\partial p_\nu}{\partial t} \varDelta q_\nu - \frac{\partial q_\nu}{\partial t} \varDelta p_\nu \right\} = \varDelta \mathfrak{A} - \varDelta (T') \tag{47}$$

als die konjugierte Zentralgleichung der ungestörten Bewegung entsteht. (T') bedeutet ihre lebendige Kraft in der konjugierten Energieform. Es ist leicht einzusehen, daß $\varDelta (T') = \varDelta T'$. Denn (T') wie T' sind dieselben Funktionen von q, p, also auch vermöge der Zustandsgleichungen (4) von a, t. Daraus folgt aber, wenn wir dieselben Änderungen $\varDelta a$ zugrunde legen, von selbst $\varDelta (T') = \varDelta T'$.

Zerlegen wir also jetzt in (46) jedes dq_ν und dp_ν wie in (18) und berücksichtigen (47), so kommt

$$\sum_\nu \left\{ \frac{\mathfrak{d} p_\nu}{\mathfrak{d} t} \varDelta q_\nu - \frac{\mathfrak{d} q_\nu}{\mathfrak{d} t} \varDelta p_\nu \right\} = \varDelta \mathfrak{B} = \sum_\nu Q_\nu \varDelta q_\nu, \tag{48}$$

jene für die Theorie von Lagrange charakteristische *Zentralgleichung der Störung*, die er selbst auf einem Umwege und mit der Beschränkung auf konservative Kräfte im I. Bande der M. A. (Sect. V, § 2 Nr. 11) herleitet.

Anmerkung 1. Wenn wir beachten, daß alle $\frac{\mathfrak{d} q_\nu}{\mathfrak{d} t} = 0$ sind (15a), so folgen aus (48) durch Vergleich der Koeffizienten von $\varDelta q_\nu$ die Impulsgleichungen der gestörten Bewegung wieder: $\frac{\mathfrak{d} p_\nu}{\mathfrak{d} t} = Q_\nu$.

Anmerkung 2. Nehmen wir Rücksicht auf die gleich unten entwickelten Relationen (51), d. h. drücken wir die Impulsgeschwindigkeiten $\frac{\mathfrak{d} p_\nu}{\mathfrak{d} t}$ durch die Elementgeschwindigkeiten $\dot{a}_\varkappa$ aus, so erhalten wir die Gleichungen der Lagrangeschen Störungstheorie in ihrer *einfachsten* Gestalt:

$$Q_\nu = \sum_\varkappa \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa} \dot{a}_\varkappa, \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n \tag{49}$$

als die Umkehrungen zu den Fundamentalgleichungen der Poissonschen Theorie (27). Sie können aus diesen direkt vermöge der im 3. Abschnitt bewiesenen Relationen (59) hergeleitet werden.

Aus (48) entwickeln sich nunmehr rasch die allgemeinen Störungsformeln von Lagrange. Denn wenn wir darin links die Verschiebungen der Elemente, $\varDelta a_\varkappa$, nach (28a), rechts die Störungsgrößen $A_\varkappa$ nach

(29) einführen, so ergibt sich aus der Willkür der Verrückungen $\varDelta a_\varkappa$ durch Vergleich der Koeffizienten:

(50) $$\sum_\nu \left\{ \frac{\mathfrak{d} p_\nu}{\mathfrak{d} t} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa} - \frac{\mathfrak{d} q_\nu}{\mathfrak{d} t} \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa} \right\} = A_\varkappa, \qquad \varkappa \text{ von 1 bis } 2n.$$

Wir lassen das zweite, nach (15a) eigentlich verschwindende Summenglied nicht allein aus Symmetriegründen stehen, verfahren vielmehr analog wie in der Entwicklung der Poissonschen Theorie. Aus den Zutandsgleichungen (4) folgen nämlich zwischen den während des Zeitteilchens dt erzeugten Störungen der Zustandsgrößen q, p und den Störungen der Elemente a die Beziehungen:

(51) $$\mathfrak{d} q_\nu = \sum_1^{2n} {}_\lambda \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} da_\lambda \quad \mathfrak{d} p_\nu = \sum_1^{2n} {}_\lambda \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\lambda} da_\lambda, \qquad \nu \text{ von 1 bis } n$$

also wird (50) mit Hilfe von (51)

(52) $$A_\varkappa = \sum_\nu \sum_\lambda \left(\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \right) \frac{da_\lambda}{dt}, \qquad \varkappa \text{ von 1 bis } 2n.$$

Es ist aber der Koeffizient von $\frac{da_\lambda}{dt}$ der von Lagrange zuerst eingeführte Klammerausdruck

(53) $$(a_\varkappa, a_\lambda) = \sum_\nu \left(\frac{\partial q_\nu}{\partial \alpha_\varkappa} \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda} \right) = \sum_\nu \frac{\partial \{q_\nu, p_\nu\}}{\partial \{a_\varkappa, a_\lambda\}}.$$

Mit Hilfe desselben stellt sich (52) dar als

(54) $$A_\varkappa = \sum_\lambda (a_\varkappa, a_\lambda)\, \dot{a}_\lambda; \qquad \varkappa \text{ von 1 bis } 2n$$

das sind *die Lagrangeschen Störungsgleichungen in ihrer allgemeinen Form*[1]), deren Bedeutung der folgende Satz ausdrückt:

Die aus den Systemkomponenten der störenden Kräfte zusammengesetzten Größen A sind lineare Funktionen der Elementgeschwindigkeiten; ihre Koeffizienten sind die Lagrangeschen Klammersymbole.

Diese Klammerausdrücke besitzen dieselben Fundamentaleigenschaften wie die von Poisson, d. h. es ist

(55) $$(\alpha) \quad (a_\lambda, a_\varkappa) = -(a_\varkappa, a_\lambda), \qquad (\beta) \quad (a_\varkappa, a_\varkappa) = 0.$$

1) Lagrange leitet in den M. A. I. Sec. Part. Sect. V aus (48) zunächst die sogen. kanonische Form der Störungsgleichungen ab. Erst im II. Bande nimmt er die Gl. (48) wieder auf und gewinnt in Sect. VIII Nr. 7 die allgemeinen Störungsgleichungen (54). Poisson entwickelt sie wesentlich auf demselben Wege im Mém. 1816, § II (p. 22), läßt aber nicht-konservative Störkräfte zu.

Ihre Anzahl ist wieder $n(2n-1)$; hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von der Zeit gilt dasselbe, was am Schluß des ersten Abschnittes bemerkt worden ist.

3. Die Beziehungen zwischen den Poissonschen und Lagrangeschen Störungsformeln.

Wir haben somit das *Theorem* gewonnen:

Die allgemeine Form der Poissonschen und Lagrangeschen Störungsformeln bleibt bestehen, selbst wenn die Grundkräfte der Bewegung allgemein sind und kein Potential besitzen.

Stellen wir die beiden Formelsysteme noch einmal gegenüber:

$$\text{(56a)} \quad \text{Poisson} \quad \dot{a}_\varkappa = \sum_\lambda [a_\varkappa, a_\lambda] A_\lambda, \quad [a_\varkappa, a_\lambda] = \sum_\nu \frac{\partial\{a_\varkappa, a_\lambda\}}{\partial\{p_\nu, q_\nu\}}$$

$$\text{(56b)} \quad \text{Lagrange} \quad A_\lambda = \sum_\mu (a_\lambda, a_\mu)\dot{a}_\mu, \quad (a_\lambda, a_\mu) = \sum_\nu \frac{\partial\{q_\nu, p_\nu\}}{\partial\{a_\lambda, a_\mu\}},$$

so fällt uns die Reziprozität zwischen ihnen auf, die in Bezug auf die Klammerausdrücke als Koeffizienten namentlich in der Donkinschen Bezeichnung deutlich ausgeprägt ist. Jedes der beiden Systeme (56a, b) ist offenbar die Umkehrung des anderen. Jedem kommt eine eigentümliche Bedeutung zu, die sich so ausdrücken läßt:

Sind die störenden Kräfte vollständig bekannt, so berechnen wir die durch sie verursachten Veränderungen der Elemente nach den Poissonschen Formeln (56a); *kennen wir hingegen vollständig die Geschwindigkeiten, mit welchen die Elemente sich verändern, so erfahren wir die sie verursachenden Kräfte nach den Lagrangeschen Formeln* (56b).

Wir können in der Tat immer aus den Größen A rückwärts die Systemkomponenten Q der Störkräfte konstruieren, wie wir in Nr. 31 gezeigt haben. Die weitere Reduktion (Auflösung in Elementarkräfte) ist eine Aufgabe der Statik.[1]

Wenn wir das reziproke Verhältnis der Poissonschen zu den Lagrangeschen Formeln so auffassen, wird die Polemik hinfällig, die Lagrange an seine Formeln gegen die von Poisson anschließt.[2] Da wir die beiden Störungsformeln aus zwei gänzlich verschiedenen Quellen abgeleitet haben, so ist es wünschenswert, den Übergang von der einen zur andern direkt zu bewirken und damit diese durch jene

1) Der allgemeine Gedanke, überhaupt aus den Systemgrößen der Mechanik rückwärts die elementaren zu berechnen, findet sich an den kinematischen Größen der Geschwindigkeit und Beschleunigung ausgeführt bei Heun, L. d. M. Nr. 86, p. 136—139.

2) M. A. Sec. Part. Sect. VIII, Chap. I, Nr. 7, II p. 186.