Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik

Winkelmann, Max

1909

1. Die Poissonschen Störungsformeln

urn:nbn:de:bsz:31-270659

Zustandsgleichungen die Integrale der Bewegungsgleichungen genannt.[1]) Mit ihnen ist aber auch gleichwertig[2]) die andere Form, in der die Zustandsgrößen

(4) $$q_\nu = q_\nu(a, t), \quad p_\nu = p_\nu(a, t) \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n$$

als Funktionen der sämtlichen Elemente und der Zeit erscheinen. Sie beschreiben uns eigentlich erst die Bewegungsform des mechanischen Systems. Die Form (3) der Zustandsgleichungen ist nun charakteristisch für die zuerst von Poisson (Mémoire 1809) und die Form (4) für die zuerst von Lagrange (Mémoire 1809) hergestellten Störungsformeln. Entsprechend wollen wir zwischen der Poissonschen und Lagrangeschen Theorie unterscheiden, wenngleich die späteren Untersuchungen der beiden Forscher ganz ineinandergreifen, indem sie beide Formen der Störungsgleichungen nebeneinander betrachtet haben. Wir beginnen mit der Poissonschen Theorie.

1. Die Poissonschen Störungsformeln.

Wird das betrachtete, mechanische System in irgend einem Augenblick von einem einzelnen Stoß[3]) oder von einem System von Stoßkräften getroffen, so gelangt es in einen neuen Bewegungszustand, der sich von dem früheren nur durch eine Änderung seiner Elemente unterscheidet. In der Tat sind die besonderen Werte der Elemente einer individuellen Bewegungsform des Systems durch seinen „Anfangszustand" bestimmt. Als Anfangszustand können wir aber Lage und Geschwindigkeit, bez. Lage und Impuls des Systems in dem Augenblick setzen, in welchem die eben beschriebene Unstetigkeit des dynamischen Vorganges eingetreten ist. Dadurch erleiden also bloß die willkürlichen Konstanten in den Zustandsgleichungen plötzliche und, allgemein zu reden, endliche Änderungen. Wir nennen sie *Störungen der Elemente durch Impulsionen.* Lagrange hat solche unstetigen Änderungen in den Elementen der elliptischen Planetenbewegung wirklich berechnet[4])

1) Rep. Nr. 11. Auch Jacobi unterscheidet so zwischen Integralen und Integralgleichungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen in seinen Vorlesungen über Dynamik, Supplementband zu seinen ges. Werken (2. Ausgabe 1884) p. 3. — Wir vermeiden beiläufig durch die oben an den Gebrauch der mathematischen Physik angeschlossenen Namen den Doppelsinn, den das Wort „Integralgleichungen" durch die Arbeiten von Hilbert neuerdings angenommen hat.

2) Diejenigen Differentialrelationen, welche diesen Gleichwert von (3) und (4) ausdrücken, werden im 3. Abschnitt (p. 24) vollständig entwickelt.

3) Hier wird unter einem „Stoß" nicht der wahre und komplizierte, physikalische Vorgang verstanden, sondern der daraus idealisierte, instantan verlaufende Prozeß, der die Wirkung einer „Momentankraft" ausdrückt.

4) M. A., Sec. Part. VII, Chap. II, 1. II p. 66—75.

und neben einer anderen merkwürdigen Folgerung daraus eine obere Grenze für die durch einen Stoß auf den Planeten hervorgerufene Geschwindigkeit abgeleitet, damit er sich in einen Kometen verwandeln könne.

Folgen sich aber die Stöße „rasch“ aufeinander[1]), und setzen wir ihre Intensität proportional mit dem Zeitelemente ihrer Wirkung, so sind sie von unendlich kleinen Änderungen der Elemente begleitet. Ersetzen wir demnach die Störkräfte wie Lagrange[2]) durch eine beliebig rasche Aufeinanderfolge solcher unendlich kleiner Stöße, so beleben sich unter ihrem Einfluß die vorher starren Elemente der Grundbewegung und verändern sich in der Grenze stetig in der gestörten, solange sich auch die Störkräfte kontinuierlich ändern. Eben diese Veränderung der Elemente heißt die Variation der Konstanten.

Um aber diesen Prozeß mechanisch zu verstehen, müssen wir

1. *von dem elementaren Stoßvorgang (Impulsion)* ausgehen. Wirkt auf einen *freien* Massenpunkt m in irgend einem Augenblick t die Stoßkraft $\bar{\mathfrak{k}}$[3]) ein, so setzt sich sein Impuls $\bar{\mathfrak{p}}$ mit $\bar{\mathfrak{k}}$ zu einem neuen Impuls $\bar{\mathfrak{p}}'$ zusammen, der die Resultante aus $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathfrak{k}}$ ist, symbolisch:

$$\bar{\mathfrak{p}}' = \bar{\mathfrak{p}} + \bar{\mathfrak{k}}, \tag{5a}$$

oder die Änderung des Impulses, $\triangle\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{p}}' - \bar{\mathfrak{p}}$, ist nach Größe und Richtung mit der Stoßkraft $\bar{\mathfrak{k}}$ identisch. Die Geschwindigkeit $\bar{v}$ des Massenpunktes erleidet also, weil $\bar{\mathfrak{p}} = m\bar{v}$ ist, eine plötzliche Änderung $\triangle\bar{v}$, deren Größe und Richtung bestimmt wird durch die Gleichung:

$$\triangle\bar{\mathfrak{p}} = m\triangle\bar{v} = \bar{\mathfrak{k}}. \tag{5b}$$

Ist dagegen der Punkt m als Massenteilchen eines mechanischen Systems *gebunden*, so tritt zum eingeprägten Stoß die Reaktion $\bar{\mathfrak{r}}$ hinzu, und die Impuls-, bez. Geschwindigkeitsänderung erfolgt so, daß

$$\triangle\bar{\mathfrak{p}} = m\triangle\bar{v} = \bar{\mathfrak{k}} + \bar{\mathfrak{r}}, \tag{5c}$$

wobei die Reaktionsstöße $\bar{\mathfrak{r}}$ von sämtlichen Massenpunkten nach dem D'Alembertschen Prinzip im Gleichgewicht sein müssen. Wiederholt sich der Stoßvorgang in kurzen Zeitintervallen, und werden die Stoßstärken diesen Zeitintervallen selbst proportional, so ist er bei beliebig

1) Ich bediene mich absichtlich dieser mathematisch nicht präzisen, aber anschaulichen Ausdrucksweise, wie sie neuerdings wieder in der Mechanik durch die Monographie von Klein-Sommerfeld: Über die Theorie des Kreisels, zur Geltung gebracht ist.

2) l. c. und Sec. Part. Sect. VIII, Nr. 4, 5. **II** p. 180—181.

3) Vektoren sollen nach dem Vorgange von Resal und Heun durch einen übergesetzten Strich bezeichnet werden.

abnehmender Größe der Stoßpausen von der Wirkung kontinuierlicher Kräfte in der Grenze nicht mehr zu unterscheiden. Folgen sich also die Stöße $\bar{\mathfrak{k}}$ im Zeitelemente dt, und setzen wir

$$\bar{\mathfrak{k}} = \bar{k}dt, \tag{6}$$

so ist der Faktor $\bar{k}$ gleichwertig mit einer dem Punkt m eingeprägten, zeitlich wirkenden Kraft. $\bar{\mathfrak{k}}$ heißt alsdann der von der Kraft $\bar{k}$ „während des Zeitelementes dt“ erzeugte infinitesimale Stoß.[1]) Damit geschehen auch die Impuls- und Geschwindigkeitsänderungen stetig, (5b) verwandelt sich in die Differentialgleichung

$$d\bar{\mathfrak{p}} = m d\bar{v} = \bar{k}dt, \tag{7}$$

die für die ganze Dauer der Wirkung von $\bar{k}$ gilt. Für den gebundenen Massenpunkt des Systems wird auch der Reaktionsstoß $\bar{\mathfrak{r}}$ dem Zeitelemente dt proportional; wir setzen also (6) entsprechend,

$$\bar{\mathfrak{r}} = \bar{r}dt, \tag{8}$$

worin der Faktor $\bar{r}$ die Reaktionskraft bedeutet. Die stetige Änderung des Impulses und der Geschwindigkeit jedes Systempunktes erfolgt so, daß

$$d\bar{\mathfrak{p}} = m d\bar{v} = \bar{k}dt + \bar{r}dt \tag{9}$$

und nach dem D'Alembertschen Prinzip die sämtlichen Reaktionen $\bar{r}$ während der Bewegung des Systems im Zustande des Gleichgewichtes verharren. Wir entwickeln nunmehr

2. *den elementaren Störungsprozeß*. Die Bewegung des Systems möge unter dem Einfluß der seine Massenteilchen angreifenden Grundkräfte $\bar{g}$ vor sich gehen. Zu irgend einem Zeitpunkt mögen neue Kräfte $\bar{h}$ hinzutreten, welche die vorhandene Bewegung stören. Die Geschwindigkeit $\bar{v}$ eines jeden Systemteilchens erfährt nunmehr in jedem ferneren Augenblick eine doppelte Änderung, nämlich erstens von den (infinitesimalen) Stößen der Grundkräfte her und die mit $\partial\bar{v}$, zweitens von den Stößen der Störkräfte her und die mit $\mathfrak{d}\bar{v}$ bezeichnet sei. Die letztere möge *die Störung der Geschwindigkeit $\bar{v}$ während des Zeitzuwachses dt* heißen. Überhaupt wollen wir fortan mit den Symbolen ∂, $\mathfrak{d}$[2]) immer solche Änderungen aller Größen ausdrücken, die von den

---

1) Man pflegt in der angewandten Mechanik $\int \bar{k}dt$ den Antrieb der Kraft $\bar{k}$ während des Zeitraumes ihrer Wirkung zu nennen. Der infinitesimale Stoß von $\bar{k}$ zur Zeit t würde also auch das Element dieses Kraftantriebes heißen müssen.

2) Das von Lagrange und Poisson benutzte δ empfiehlt sich hier nicht wegen des für die virtuellen Verrückungen eingebürgerten Gebrauchs dieses Zeichens.

Grund- bez. Störkräften herrühren und die der letzteren Art als Störungen[1]) der betroffenen Größen benennen. Damit zerfällt auch die Elementarreaktion $\bar{r}$ der gestörten Bewegung in zwei Komponenten: $\bar{r}_g$ von den Grundkräften, $\bar{r}_h$ von den Störkräften verursacht. Da der *D'Alembertsche Ansatz* sowohl für die Grundbewegung die Impuls- bez. Geschwindigkeitsänderung durch

(10a) $$\partial\bar{\mathfrak{p}} = m\partial\bar{v} = (\bar{g} + \bar{r}_g)dt,$$

als auch für die gestörte Bewegung durch

(10b) $$d\bar{\mathfrak{p}} = m d\bar{v} = (\bar{k} + \bar{r})dt$$

ausdrückt, wenn $d\bar{\mathfrak{p}} = \partial\bar{\mathfrak{p}} + \mathfrak{d}\bar{\mathfrak{p}}$ die totale Änderung des Elementarimpulses, $d\bar{v} = \partial\bar{v} + \mathfrak{d}\bar{v}$ die totale Änderung der Geschwindigkeit, $\bar{k}$ die Resultante aus $\bar{g}$ und $\bar{h}$ bedeuten, so besteht auch für die Störung des Impulses bez. der Geschwindigkeit der Ansatz:

(10c) $$\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{p}} = m\mathfrak{d}\bar{v} = (\bar{h} + \bar{r}_h)dt,$$

und *die von den Störkräften erzeugten Reaktionskomponenten* $\bar{r}_h$ *sind für sich während der gestörten Bewegung im Gleichgewicht.*

Damit ist aber der Störungsprozeß noch nicht erschöpfend gekennzeichnet. Denn wie geschieht der Anschluß der gestörten Bewegung an die ungestörte? Durch die den Störkräften gleichwertigen Stöße erfahren nur die Impulse und mit ihnen die Geschwindigkeiten aller Massenpunkte des Systems instantane Störungen. Mit anderen Worten:

Der Eingriff der Störkräfte geht so vor sich, daß nur die Elementarimpulse und Elementargeschwindigkeiten des Systems, nicht aber die Lage seiner sämtlichen Punkte augenblicklich geändert werden.

Der diesem Störungsprozeß zugrunde liegende Stoßvorgang ist also nach Heun[2]) *eine reine Impulsion.* Sie bildet das mechanische Fundament aller Störungsrechnungen. Erst nachdem Lagrange im II. Bande der Mécanique Analytique am Planetenproblem seine Methode der Variation der Konstanten entwickelt hat, begründet er seine mechanische Auffassung des Störungsprozesses allgemein mit den Worten[3]): «En nommant ξ, ψ, φ etc. les variables indépendantes auxquelles on aura réduit toutes les coordonnées x, y, z des corps du système, par le moyen des équations de condition dépendantes de la liaison des corps,

---

1) Vgl. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste I (1889), p. 167. Franz.: Perturbation.

2) Die Bedeutung des d'Alembertschen Prinzips für starre Systeme und Gelenkmechanismen. Archiv der Math. u. Phys. (3) 2, 1901, p. 306.

3) Sect. VIII, Chap. Prem. II p. 181.

on pourra toujours exprimer chaque constante par une fonction donnée de ξ, ψ, φ etc., et des différentielles $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ etc. *Or, les variables finies ξ, ψ, φ etc. ne dépendent que de la position instantanée des corps dans l'espace, et ne peuvent, par conséquent, subir aucun changement par les impulsions étrangères; il n'y aura donc que les différentielles $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ dont les valeurs pourront être changées par ces impulsions.»*

Sei daher $\bar{x}$ der Positionsvektor eines beliebigen Systempunktes, so verschwinden die Störungen aller Positionsvektoren, d. h. soviel Gleichungen

(11) $$\mathfrak{d}\bar{x} = 0,$$

als Systempunkte vorhanden sind, drücken die reine Impulsion des Störungsprozesses aus. Diese Gleichungen können aber auch durch die folgenden ersetzt werden:

(12) $$d\bar{x} = \partial\bar{x}.$$

Das bedeutet: Die Bahnen der Grundbewegung und der gestörten eines jeden Systempunktes haben ihr Richtungselement gemeinsam, oder genauer ausgedrückt:

Die gestörte Bahn eines jeden Systempunktes berührt seine ungestörte, die eintreten würde, sobald wir die Störkräfte zu irgend einer Zeit ausschalten.[1])

Führen wir nunmehr an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten der Systempunkte die Positionskoordinaten q_ν des Systems ein, ist also

$$\bar{x} = \bar{x}(q_\nu), \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n$$

so stellt sich eine virtuelle Verschiebung der Systempunkte dar durch die willkürlichen Änderungen der q_ν in den Gleichungen

(13) $$\delta\bar{x} = \sum_1^n{}^\nu \bar{e}_\nu \delta q_\nu,$$

worin alle $\bar{e}_\nu = \frac{\partial\bar{x}}{\partial q_\nu}$ die sogenannten *Begleitvektoren*[2]) des betrachteten Punktes bedeuten. Ebenso würden die Störungen der Positionsvektoren des Systems Störungen seiner allgemeinen Koordinaten, $\mathfrak{d}q_\nu$, nach sich ziehen, die mit ihnen verbunden sind durch die Gleichungen

(14) $$\mathfrak{d}\bar{x} = \sum_\nu{}^x \bar{e}_\nu \mathfrak{d}q_\nu,$$

1) Der astronomische Gebrauch spricht deshalb von oskulierenden Elementen der Planetenbahnen.

2) K. Heun, Lehrbuch der Kinematik (Leipzig 1906, Göschen, Samml. Schubert **37**), p. 67 (Nr. 47).

da jene aber nach (11) verschwinden, so können sie selbstverständlich nur durch

(15a) $$\mathfrak{d}q_\nu = 0 \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n$$

erfüllt werden, d. h.

Bei der reinen Impulsion verschwinden die Störungen sämtlicher Positionskoordinaten des Systems.

Unmittelbar folgt:

Die Störungen sämtlicher Begleitvektoren des Systems sind gleich Null.

Denn aus (13, 15a) ergibt sich ohne weiteres:

(15b) $$\mathfrak{d}\bar{e}_\nu = \sum_1^n{}_{\nu'} \frac{\partial \bar{e}_\nu}{\partial q_\nu} \mathfrak{d}q_{\nu'} = 0\,.$$

Damit gelangen wir

3. *zu dem Einfluß der Störung auf die mechanischen Systemgrößen und zur Herleitung der fundamentalen Störungsformel.*

Die virtuelle Arbeit, angesetzt für die Impulse aller Systempunkte:

(16a) $$S\bar{\mathfrak{p}}\,\delta\bar{x} = \sum_\nu p_\nu \delta q_\nu$$

definiert die n Impulskomponenten p_ν des Systems, die sich vermöge (13) darstellen als

(16b) $$p_\nu = S\bar{e}_\nu \bar{\mathfrak{p}}\,, \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n$$

oder in Worten als die Summe über die *Begleitmomente*[1]) aller Elementarimpulse. Die Änderung, welche p_ν während der Grundbewegung erfährt, ist gegeben durch

(17a) $$\partial p_\nu = S\bar{e}_\nu \partial\bar{\mathfrak{p}} + S\bar{\mathfrak{p}}\,\partial\bar{e}_\nu\,;$$

die Störung der Impulskomponente wird dagegen, weil die Begleitvektoren ungestört bleiben (15b), nur durch die Störungen der Elementarimpulse, $\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{p}}$, erzeugt und ist

$$\mathfrak{d}p_\nu = S\bar{e}_\nu \mathfrak{d}\bar{\mathfrak{p}}\,,$$

während die vollständige Änderung der Impulskomponenten in der gestörten Bewegung folgendermaßen lautet:

(17c) $$dp_\nu = S\bar{e}_\nu d\bar{\mathfrak{p}} + S\bar{\mathfrak{p}}\,d\bar{e}_\nu\,.$$

Da aber die vollständige Änderung der Elementarimpulse $d\bar{\mathfrak{p}} = \partial\bar{\mathfrak{p}} + \mathfrak{d}\bar{\mathfrak{p}}$, die Änderung der Begleitvektoren bei der gestörten Bewegung dieselbe ist wie bei der Grundbewegung, oder $d\bar{e}_\nu = \partial\bar{e}_\nu$, so folgt nach (17a)

(18) $$dp_\nu = \partial p_\nu + \mathfrak{d}p_\nu\,.$$

Die Änderungen dieser *kinematischen* Systemgrößen setzen wir jetzt vermöge der bekannten Verbindung des Prinzips der virtuellen Arbeiten

1) Kinematik, p. 69 (Nr. 47).

und des d'Alembertschen in Beziehung zu den *dynamischen.* Da sowohl die sämtlichen Elementarreaktionen $\bar{r}$ als auch ihre (S. 9 erklärten) Komponenten $\bar{r}_g$ und $\bar{r}_h$ für sich genommen am System im Gleichgewicht stehen, so verschwindet die Summe ihrer virtuellen Arbeiten:

(19a) $$S\bar{r}\,\delta\bar{x} = 0, \quad S\bar{r}_g\,\delta\bar{x} = 0, \quad S\bar{r}_h\,\delta\bar{x} = 0,$$

oder es gelten, wenn man den Ausdruck (13) für die virtuellen Verrückungen einführt, die gleichwertigen $3n$ Gleichungen

(19b) $$S\bar{e}_\nu\bar{r} = 0, \quad S\bar{e}_\nu\bar{r}_g = 0, \quad S\bar{e}_\nu\bar{r}_h = 0, \quad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n.$$

Durch Bildung der Summe über die zu jedem Systempunkt hinsichtlich der Koordinate q_ν gehörigen Begleitmomente im D'Alembertschen Ansatz (10) eliminieren wir also die zunächst unbekannten Elementarreaktionen und erhalten *die kinetischen Gleichungen,* nämlich

(20a) für die gestörte Bewegung: $S\bar{e}_\nu d\mathfrak{p} = dt\,S\bar{e}_\nu\bar{k}$,

(20b) für die Grundbewegung: $S\bar{e}_\nu\partial\mathfrak{p} = dt\,S\bar{e}_\nu\bar{g}$,

(20c) für die Störung: $S\bar{e}_\nu\mathfrak{d}\mathfrak{p} = dt\,S\bar{e}_\nu\bar{h}$,

die Summe über die Begleitmomente der die Systempunkte angreifenden Kräfte $\bar{k}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ sind aber die diesen entsprechenden Systemkomponenten der totalen, der Grund- und der Störkräfte hinsichtlich der Koordinate q_ν, wie sie auch wieder aus der Quelle der virtuellen Arbeiten

(21a) $$S\bar{k}\,\delta\bar{x} = \sum_\nu K_\nu\,\delta q_\nu, \quad S\bar{g}\,\delta\bar{x} = \sum_\nu P_\nu\,\delta q_\nu, \quad S\bar{h}\,\delta\bar{x} = \sum_\nu Q_\nu\,\delta q_\nu$$

fließen, so daß

(21b) $$K_\nu = S\bar{e}_\nu\bar{k}, \quad P_\nu = S\bar{e}_\nu\bar{g}, \quad Q_\nu = S\bar{e}_\nu\bar{h}$$

ist, und vermöge $\bar{k} = \bar{g} + \bar{h}$ natürlich auch

(22) $$K_\nu = P_\nu + Q_\nu.$$

Die das zweite Glied der kinetischen Gleichungen bildenden Größen $K_\nu dt$, $P_\nu dt$, $Q_\nu dt$ sind dann die von K_ν, P_ν, Q_ν resp. erzeugten, infinitesimalen Stoßkomponenten. Das erste Glied der Gleichungen (20), die Summe über die Begleitmomente aller Impulsänderungen, drücken wir durch die oben eingeführten Impulskomponenten p_ν nach (17) aus, beschränken aber unsere Aufmerksamkeit zunächst bloß auf *die kinetischen Störungsgleichungen*

$$S\bar{e}_\nu\mathfrak{d}\mathfrak{p} = dt\,S\bar{e}_\nu\bar{h},$$

welche durch (17b) und (21b) direkt übergehen in die Form

(23a) $$\mathfrak{d}p_\nu = Q_\nu\,dt,$$

oder durch Beziehung auf die Zeiteinheit:

(23b) $$\frac{\mathfrak{d}p_\nu}{\mathfrak{d}t} = Q_\nu, \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n.$$

Wir haben n sogenannte *Impulsgleichungen*[1]) erhalten, welche die gesuchten Änderungen $\mathfrak{d}p_\nu$ dynamisch bestimmen. Ihr Inhalt ist wörtlich der folgende:

Die Störung einer jeden Impulskomponente p_ν des Systems während des Zeitelementes dt ist gleich der von den Störkräften in derselben Zeit erzeugten Stoßkomponente für die zugehörige Koordinate q_ν.

Wesentlich ist an dieser Herleitung der Impulsgleichungen, daß jede beschränkende Voraussetzung sowohl über die Grund-, als auch über die Störkräfte weggefallen ist. Für konservative Kräfte finden wir sie erst bei Lagrange, M. A. I. Sect. VIII, **II** p. 185, abgeleitet und zwar in der „energetischen Form“: $\delta \frac{dT}{d\xi'} = \frac{d\Omega}{d\xi} dt$.

Anmerkung. Die kinetischen Gleichungen der Grundbewegung:

$$\partial p_\nu - S\bar{\mathfrak{p}}\partial \bar{e}_\nu = P_\nu dt \quad \text{oder} \quad \frac{\partial p_\nu}{\partial t} - S\bar{\mathfrak{p}}\frac{\partial \bar{e}_\nu}{\partial t} = P_\nu$$

und der gestörten

$$dp_\nu - S\bar{\mathfrak{p}}d\bar{e}_\nu = K_\nu dt \quad \text{oder} \quad \frac{dp_\nu}{dt} - S\bar{\mathfrak{p}}\frac{d\bar{e}_\nu}{dt} = K_\nu$$

können wegen

$$p_\nu = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{e}_\nu}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_\nu}$$

leicht in die energetische Form der Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = P_\nu, \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = K_\nu$$

übergeführt werden und sind also, allgemein zu reden, keine reinen Impulsgleichungen mehr.

Jetzt führen wir die Zustandsgleichungen (3) oder (4) ein — erst dadurch wird die in der Einleitung über die Grundkräfte gemachte Beschränkung notwendig —, erfüllen mit ihnen bei konstant gehaltenen Elementen identisch die kinetischen Gleichungen der Grundbewegung und suchen nun durch „Variation der Konstanten“ die Störungsgleichungen zu befriedigen. Wir wissen durch die Überlegung am Eingange dieses Kapitels, daß dies aus mechanischen Gründen geschehen *muß.* Denn die Störungen der Koordinaten und Impulsgrößen erzeugen Störungen der Elemente und umgekehrt zeigen diese die Störungen

1) Diese Bezeichnung rührt von G. Hamel her. — Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik, § 9. (Genaueres Zitat S. 18, Fußnote.)

jener Zustandsgrößen an. Damit erhalten die Symbole ∂, $\mathfrak{d}$ auch einen *analytischen* Sinn: die durchgehende Einsetzung der Zustandsgleichungen (4) macht alle vorkommenden mechanischen oder geometrischen Größen zu bloßen Funktionen der Elemente und der Zeit, ihre totalen Differentiale bestehen also aus der Summe der partiellen ∂, ausgeführt bei konstanten a und veränderlichem t, und der partiellen $\mathfrak{d}$, ausgeführt bei konstantem t und veränderlichen a. Die Störungen der Elemente a selbst, oder, was dasselbe ist, die Variationen der Konstanten a, werden wir nicht, wie es folgerichtig wäre, mit $\mathfrak{d}a$, sondern einfach mit da bezeichnen, da sie sich von einem gewöhnlichen Differential solange nicht unterscheiden, als sie wie nur von der Zeit abhängige Variablen angesehen werden.

Drücken wir die Störungen der Elemente durch die Störungen der Zustandsgrößen q_ν, p_ν des Systems vermöge der Gleichungen (3) aus, so erhalten wir die $2n$ simultanen Differentialgleichungen

$$da_\varkappa = \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} \mathfrak{d} q_\nu + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \mathfrak{d} p_\nu \right), \qquad \varkappa \text{ von } 1 \text{ bis } 2n \tag{24a}$$

oder nach Division mit dem Zeitelemente dt[1])

$$\frac{da_\varkappa}{dt} = \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} \frac{\mathfrak{d} q_\nu}{\mathfrak{d} t} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \frac{\mathfrak{d} p_\nu}{\mathfrak{d} t} \right). \tag{24b}$$

Würden wir jetzt keine Rücksicht auf die vorhergeschickte Mechanik des Störungsprozesses nehmen, so würden die Gl. (24a) die $2n$ unbekannten Änderungen $da_\varkappa$ durch die $2n$ Änderungen $\mathfrak{d}q_\nu$, $\mathfrak{d}p_\nu$ ausdrücken; diese müssen aber den n Differentialgleichungen der gestörten Bewegung gehorchen. Daraus folgte, daß n von ihnen und damit auch die gesuchten Störungen der Elemente unbestimmt bleiben würden. Wir können und müssen daher[2]) jenen $2n$ Größen noch n, zunächst beliebige Bedingungen auferlegen, die von der Art abhängen, wie wir den Zustand der gestörten Bewegung an den Zustand der Grundbewegung anschließen. Die Willkür dieses Anschlusses ist aber durch die vorhergehende mechanische Betrachtung des Störungsvorganges be-

1) Bei der vollständigen Differentiation von (3) muß demnach der Bestandteil $\sum_\nu \left\{ \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} \frac{\partial q_\nu}{\partial t} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial t} \right\} + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial t}$ verschwinden. Siehe 3. Abschnitt, Anmerkung 2, Formel (63) S. 25.

2) Falls wir nicht durch nochmals wiederholte Zeitdifferentiation von n Gleichungen die zweiten Differentialquotienten der $a_\varkappa$ nach der Zeit (die Beschleunigung der Elemente) einführen, womit wir uns aber des Vorteils begeben, das Störungsproblem auf simultane Differentialgleichungen *erster* Ordnung zurückzuführen.

reits aufgehoben. Die reine Impulsion desselben führte gerade auf n besonders einfache Bedingungsgleichungen (15a):

$$\mathfrak{d} q_\nu = 0 \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n,$$

die auch ausdrücken, daß der Eingriff der Störkräfte in das System durch die ihnen äquivalenten infinitesimalen Stöße nur den Impuls-, nicht den Geschwindigkeitszustand verändern. In der Tat ist (15a) nichts anderes als

$$(25) \qquad \frac{d q_\nu}{d t} = \frac{\partial q_\nu}{\partial t} = \dot{q}_\nu \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n.$$

Denkt man sich diese Größen abhängig von den Elementen und der Zeit, so heißt das mathematisch: Die Geschwindigkeitskomponenten bewahren *dieselbe Form* in der ungestörten wie in der gestörten Bewegung des Systems, nur sind die Elemente in jener konstant, in dieser variabel. Die Differentialgleichungen (24a) vereinfachen sich also folgendermaßen:

$$(26) \qquad d a_\varkappa = \sum_\nu \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \mathfrak{d} q_\nu, \qquad \varkappa \text{ von } 1 \text{ bis } 2n$$

die Impulsstörungen $\mathfrak{d} p_\nu$ sind bereits nach den kinetischen Störungsgleichungen (23a) durch die Störkräfte ausgedrückt, so daß ihre Substitution zu den *Fundamentalgleichungen der Poissonschen Störungstheorie*[1]) führt:

$$d a_\varkappa = \sum_\nu \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} Q_\nu d t,$$

oder nach Division mit dem allen Gliedern der Summe gemeinsamen Zeitelement:

$$(27) \qquad \frac{d a_\varkappa}{d t} = \dot{a}_\varkappa = \sum_\nu \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} Q_\nu, \qquad \varkappa \text{ von } 1 \text{ bis } 2n.$$

Damit haben wir schon die Änderungsgeschwindigkeit eines jeden Elementes $a_\varkappa$, oder kurz die *Elementgeschwindigkeit* $\dot{a}_\varkappa$, durch bekannte Größen ausgedrückt. Sie stellen soviel simultane Differentialgleichungen der ersten Ordnung vor, als Elemente vorhanden sind. Die vollendete Integration muß $2n$ willkürliche Konstanten einführen; sie ist also die vollständige Lösung des Störungsproblems. Die gleichsam verlorenen

1) Poisson, Mém. 1816 S. 15. Lagrange hat diese Fundamentalgleichungen für Systemkoordinaten nicht (für freie Punktsysteme siehe jedoch M. A. Sec. Part. Sect VII, § II, Nr. 58, **II** p. 76). Er kann auch gar nicht zu ihnen gelangen, weil er beständig mit den Geschwindigkeits- statt mit den Impulskomponenten operiert. Die Einführung der p_ν als selbständiger Veränderlicher ist wesentlich Poisson zuzuschreiben, freilich ohne daß ihm auch ihre mechanische Bedeutung bewußt gewesen wäre.

Konstanten der Grundlösung sind dann wieder ersetzt durch diese Integrationskonstanten des gestörten Problems. Es bleibt aber noch übrig, die Abhängigkeit der Systemkomponenten Q_ν von den Elementen explizit darzustellen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die virtuelle Arbeit der Störkräfte: $\sum_\nu Q_\nu \delta q_\nu$ und wählen unter allen virtuellen Verrückungen δq jene aus, die allein aus unendlich kleinen, im übrigen willkürlichen Änderungen einzelner oder aller Elemente hervorgehen. Geben wir diesen das Zeichen[1]) $\varDelta a$, so unterscheiden wir solche speziellen Verschiebungen aller q von den allgemeinen durch $\varDelta q$. Ebenso erzeugen die willkürlichen Änderungen $\varDelta a$ virtuelle Verschiebungen der Impulskomponenten p, die wir entsprechend $\varDelta p$ nennen. Während nach (4) für jedes ν

$$\varDelta q_\nu = \sum_\varkappa \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa} \varDelta a_\varkappa, \quad \varDelta p_\nu = \sum_\varkappa \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa} \varDelta a_\varkappa \tag{28a}$$

ist, wird umgekehrt nach (3) für jedes $\varkappa$

$$\varDelta a_\varkappa = \sum_\nu \left\{ \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} \varDelta q_\nu + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \varDelta p_\nu \right\}, \tag{28b}$$

und man erhält auf Grund der Gl. (28a) für die virtuelle Arbeit den Ausdruck

$$\sum_\nu Q_\nu \varDelta q_\nu = \sum_\varkappa A_\varkappa \varDelta a_\varkappa, \tag{29}$$

wo

$$A_\varkappa = \sum_\nu Q_\nu \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa}. \tag{30}$$

Substituieren wir dagegen für $\varDelta a_\varkappa$ den Wert (28b), so fließen aus der Identität

$$\sum_\nu Q_\nu \varDelta q_\nu = \sum_\varkappa A_\varkappa \sum_\nu \left\{ \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} \varDelta q_\nu + \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \varDelta p_\nu \right\}$$

$$= \sum_\nu \left\{ \varDelta q_\nu \sum_\varkappa A_\varkappa \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} + \varDelta p_\nu \sum_\varkappa A_\varkappa \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} \right\}$$

für die in (29) definierten Größen $A_\varkappa$ die Gleichungen[2])

$$\sum_\varkappa A_\varkappa \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} = Q_\nu, \quad \sum_\varkappa A_\varkappa \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} = 0, \tag{31}$$

1) Poisson, l. c. p. 18; Lagrange, M. A. Sec. Part. Sect. V, I p. 331.
2) Poisson, l. c. p. 26.

die, je n, die eindeutigen Umkehrungen zu (30) sind. Vermöge der Ausdrücke für die Q_ν erhalten die Differentialgleichungen (27) die Gestalt

$$(32a) \qquad \dot{a}_\varkappa = \sum_\nu \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} \sum_\lambda A_\lambda \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu} = \sum_\lambda A_\lambda \sum_\nu \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu}, \qquad \lambda \text{ von } 1 \text{ bis } 2n.$$

Es ist aber wegen der zweiten Gruppe der Gl. (31)

$$(32b) \qquad 0 = \sum_\nu \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} \sum_\lambda A_\lambda \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu} = \sum_\lambda A_\lambda \sum_\nu \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}.$$

Wenn wir die Gl. (32b) von (32a) subtrahieren, erscheint als Koeffizient von A_λ der von Poisson zuerst eingeführte Klammerausdruck

$$(33a) \qquad [a_\varkappa, a_\lambda] = \sum_\nu \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\right).$$

Wir verwenden für solche Funktionalsubdeterminanten, wie sie das Summenglied auf der rechten Seite bilden, auch das Donkinsche Symbol[1]) und schreiben

$$(33b) \qquad [a_\varkappa, a_\lambda] = \sum_\nu \frac{\partial\{a_\varkappa, a_\lambda\}}{\partial\{p_\nu, q_\nu\}}.$$

So gewinnen wir aus (32)

$$(34) \qquad \dot{a}_\varkappa = \sum_\lambda [a_\varkappa, a_\lambda] A_\lambda, \qquad \varkappa \text{ von } 1 \text{ bis } 2n$$

die Poissonschen Störungsgleichungen in ihrer allgemeinen Form[2]) ohne jede Voraussetzung über die Grund- und Störkräfte. Ihr Inhalt läßt sich so aussprechen:

Die Geschwindigkeit eines jeden Elementes der gestörten Bewegung ist eine lineare Funktion der aus den Systemkomponenten der störenden Kräfte zusammengesetzten Größen A; ihre Koeffizienten sind die Poissonschen Klammersymbole.

Wir merken hier bereits zwei fundamentale Eigenschaften des Poissonschen Klammerausdrucks an, die sich unmittelbar aus der Definition ergeben:

$$(35) \qquad (\alpha) \quad [a_\lambda, a_\varkappa] = -[a_\varkappa, a_\lambda], \qquad (\beta) \quad [a_\varkappa, a_\varkappa] = 0.$$

Es sind also nur $n(2n-1)$ wesentlich verschiedene vorhanden. Sie sind Funktionen der Elemente, können aber in besonderen Fällen auch

1) Cayley, Report 1856 Nr. 6 Fußnote. An Stelle der üblichen runden Klammern sind hier geschweifte gesetzt worden, um einer Verwechslung mit den Lagrangeschen Klammersymbolen vorzubeugen.

2) Poisson, l. c. p. 27. — Mém. 1809 setzt voraus, daß die Störkräfte ein Potential besitzen. Lagrange M. A. Sec. Part. Sect. V, 18. I p. 341.

zu bloßen Zahlen ausarten. Ihre *explizite* Abhängigkeit von der Zeit ist durch die Natur der Grundkräfte allein bedingt. Wir behalten uns die genauere Untersuchung dieses Umstandes vor, wenn wir die Störungstheorie von Lagrange entwickelt haben.

2. Die Lagrange schen Störungsformeln.

Als der natürliche Ausgangspunkt für die Ableitung der zuerst von Lagrange aufgestellten Störungsformeln erscheint die *Zentralgleichung*[1]), deren Keim wir schon bei ihm[2]) finden. Ihre Bedeutung in dynamischer Auffassung[3]) ist diese:

Die Leistung der virtuellen Impulsarbeit des Systems ist gleich der Summe der virtuellen Änderung seiner kinetischen Energie und der virtuellen Arbeit der eingeprägten Kräfte.

---

1) Ihre zentrale Bedeutung (daher der Name) für die systematische Mechanik, insbesondere ihr wesentlich *kinematischer* Inhalt ist wohl zuerst von K. Heun klar erkannt worden. Von der Literatur über die Zentralgleichung, soweit sie wirklich selbständig auftritt, ist mir die folgende bekannt. a) Deutsche Autoren:

Schering, Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Maß von der Bewegung der Körper abhängt, 1873. — Abhandlungen der königl. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen. Bd. XVIII. Ableitung aus dem Gauß schen Prinzip des kleinsten Zwanges. Rein formal. p. 17. „Fundamentalgleichung der Bewegung."

Hamel, Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik, 1903. — Sonderabdruck aus der Z. f. Math. u. Phys. **50** (1904), S. 14 (K. II § 4). Dynamische Auffassung und Ableitung aus der Lagrangeschen Identität.

— Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik, 1904. — Math. Ann. **59**, S. 423 (§ 2). „Allgemeine Zentralgleichung."

Heun, Die Bedeutung des D'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen, 1901. Archiv der Math. u. Phys. (3) **2**.

— Formeln und Lehrsätze der allgemeinen Mechanik, 1902. (Leipzig, Göschen) Anhang. Hier heißt sie noch „Lagrangesche Grundgleichung."

— Lehrbuch der Mechanik I. Teil. Kinematik, 1906. (Leipzig, Göschen. Sammlung Schubert Nr. 37) a. m. O. siehe Register. Rein kinematische Form. Methodischer Gebrauch.

b) Nichtdeutsche Autoren:

Beltrami, Sulle equazioni dinamiche di Lagrange. — Rendiconti dell' Istituto Lombardo, S. II, vol. XXVIII, fasc. XIV p. 745 zitiert bei

Volterra, Sopra una classe di equazioni dinamiche . Atti di Torino 1897—1898 vol. XXXIII p. 255. Einfach als „principio di Lagrange" bezeichnet.

Lorentz, Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. — Encyklopädie der math. Wiss. V, 2 Heft 1 Nr. **13** Abschnitt 35, p. 124; Nr. **14** Abschnitt 8 p. 165. L. nennt es „das D'Alembertsche Prinzip in der Form ..."

2) l. c. Sec. Part. Sect. IV, 3. **I** p. 305.

3) Der Zentralgleichung liegt dann nur die Verbindung einer kinematischen Relation mit dem D'Alembertschen Prinzip zugrunde.