Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik

Winkelmann, Max

1909

Einleitung

urn:nbn:de:bsz:31-270659

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Das Störungsproblem der Astronomen, die beobachteten Abweichungen der Planeten von der ihnen durch Kepler zugewiesenen Grundform der Bewegung zu erklären und für alle Zeiten zu bestimmen, gab den Ursprung zur Methode der Variation der Konstanten und führte ihre Entwicklung. Nach Cayleys klassischem *„Bericht über den jüngsten Fortschritt der theoretischen Dynamik“*[1]) sind mit der Ausbildung dieser Methode die Namen Euler, Laplace, Lagrange und Poisson verknüpft. Während aber jene beiden bei der Behandlung des speziellen, astronomischen Problems stehen geblieben sind, haben Lagrange und Poisson, gleichzeitig und *nicht unabhängig* von einander, die besondere Methode zu einer allgemeinen Theorie fortgeführt. Sie besteht bekanntlich darin, die Lösung eines mechanischen Problems für die sogenannten *störenden Kräfte* (les forces perturbatrices) oder, wie wir häufig kurz

1) Report on the Recent Progress of Theoretical Dynamics. — British Association 1857. Abgedruckt in seinen ges. Werken (Collected Mathematical Papers) Bd. 3. Nr. 195 p. 156—204; besonders Abschnitt 3—19.

sagen wollen, für die *Störkräfte*, anzugeben, wenn dasselbe Problem für die sogenannten *Grundkräfte* (les forces principales) „vollständig" d. h. mit der gehörigen Anzahl Integrationskonstanten in den Bewegungsgleichungen bekannt ist.

Am 13. März 1809 las Lagrange seine denkwürdige Abhandlung: Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la Mécanique (Mémoires de l'Institut 1809, Supplement 1809) und am 16. Oktober desselben Jahres Poisson seine Arbeit: Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de Mécanique (Journal de l'Ecole Polytechnique, 15. Heft, Bd. VIII 1809). Indessen ist der Gegenstand am vollkommensten von jenem in der zweiten Auflage der Mécanique Analytique[1]) (I. 1811, II. 1813) und von Diesem in einer ebenso wie die ursprüngliche Arbeit überschriebenen, im ersten Bande der Académie des Sciences, 1816, erschienenen Abhandlung dargestellt worden, so daß ich mich häufiger und bequemer auf diese beiden, als auf die vorhergenannten Publikationen beziehen werde.

Diese Arbeiten beruhen wesentlich auf der Voraussetzung einer besonderen räumlichen Verteilung der Grundkräfte: sie müssen konservativ sein. Seither ist die Theorie immer nur unter dieser Annahme betrachtet und gebraucht worden. Hingegen haben schon ihre Begründer gezeigt, daß dieselbe Beschränkung in der Natur der Störkräfte überflüssig ist. Die Änderung, welche dann in dem allgemeinen Verfahren vorgenommen werden muß, deutet Lagrange in dem Avertissement zum ersten Bande der M. A. an und skizziert sie, noch einmal zur Variation der Konstanten zurückkehrend, im 8. Abschnitte des zweiten Teiles, Kap. I Bd. II p. 188, unter den Schlußbemerkungen, in welchen er die Voraussetzungen seiner Theorie zusammenfaßt Poisson führt aber von vornherein in seiner Abhandlung vom Jahre 1816 die Ab-

1) Die erste, 1788, in einem Bande erschienene, enthält überhaupt noch nichts, was sich auf die Variation der Konstanten bezieht. Lagrange und Poisson haben erst im Jahre 1808 ihre Untersuchungen über das astronomische Störungsproblem veröffentlicht und so die allgemeine Theorie, wie sie im nächsten Jahre erschien, vorbereitet. — Es würde eine weit vollständigere, historische Darstellung erfordern, die Art und den Grad der gegenseitigen Abhängigkeit beider Forscher in ihren gemeinsamen Entdeckungen auf diesem Gebiete aufzuklären. Es möge hierfür nur der anscheinend objektive Bericht erwähnt sein, den Poisson selbst in der Einleitung zu der Abhandlung: Mémoire sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité (Mém. de l' Acad. des sciences 1827) gibt. Diese Abhandlung führt Cayley nicht an, und was noch mehr auffällt, nicht einmal in seinem zweiten Bericht von 1862: Report on the progress of the Solution of certain special Problems of Dynamics (Coll. Math. Papers B. 4 Nr. 298 p. 513—593).

leitung der Störungsgleichungen aus, ohne eine Bestimmung über die Art der störenden Kräfte zu treffen.

Bisher hat die Methode der Variation der Konstanten fast allein dem Interesse der Astronomie gedient; in ihren Problemen sind Grundkräfte entweder gar nicht vorhanden, d. h. die ungestörte Bewegung geht ohne Systembeschleunigung vor sich (Beispiel: Drehung der Erde um ihren Schwerpunkt) oder erfüllen, wie in dem klassischen Störungsproblem, als zentrale Attraktionskräfte, die von Lagrange und Poisson geforderte Voraussetzung. Auch die wenigen Probleme der irdischen Mechanik, die man bisher nach dieser Methode behandelt hat[1]), enthalten als einfache, konservative Grundkraft die Schwere. Weit entfernen sich aber von dieser Bedingung die Kraftfelder, welche in den Problemen der neueren wissenschaftlichen Technik vorkommen! Wir werden in dem Berichte von K. Heun[2]) von der außerordentlichen Mannigfaltigkeit ihrer Gestalt und Abhängigkeit vom Zustande des Systems (Lage, Geschwindigkeit u. dgl.) eingehend unterrichtet. Nun scheint an sich die Zerlegung des ganzen Kräftesystems in die beiden Bestandteile der Grund- und Störkräfte völlig willkürlich zu sein, und wir könnten, indem wir bloß die konservativen Bestandteile jenen zurechnen, immer das ungestörte Problem mit konservativen Grundkräften aufstellen, dessen vollständige Lösung vorausgesetzt wird. Denn sollten selbst unter den eingeprägten Kräften konservative fehlen oder konservative Bestandteile sich nicht ausscheiden lassen, so können wir wenigstens die kräftefreie Bewegung als die ungestörte betrachten. Eine solche willkürliche Zerlegung ist statthaft, solange es gelingt, aus der vollständigen Grundlösung vermöge der Variation der willkürlichen Konstanten die *exakte* Bestimmung der gestörten Bewegung herzuleiten. Der eigentümliche Wert dieser Methode besteht aber darin, daß sie einen allgemeinen und stets möglichen Weg angibt, das gestörte Problem in eine Reihe von *Approximationen* aufzulösen. Die Konvergenz dieses Verfahrens ist jedoch an die Bedingung gebunden, daß die störenden Kräfte hinreichend klein[3]) seien im Verhältnis zu

1) Z. B. das schwere, einfache Raumpendel im widerstehenden Mittel von Lagrange: M. A. Sec. Part. VIII, Ch. II Nr. 23, **II** p. 206. Das Foucaultsche und Gaußsche Pendel von Kamerlingk Onnes: Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde. Dissertation Groningen J. B. Wolters 1879.

2) Über die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung IX., 2, 1900. Man vergleiche mit diesen Ausführungen besonders Abschnitt A Nr. 1, 2. Demnächst wird auch ein weit ausführlicherer Artikel in der Encyklopädie der mathem. Wiss. erscheinen.

3) Das Maß dieses Verhältnisses bedarf einer genauen Bestimmung, die erst auf Grund des Näherungsverfahrens selbst gewonnen werden kann.

den Grundkräften, oder was auf dasselbe hinauskommt, daß die Veränderungen, welche die Störkräfte in den willkürlichen Konstanten des Grundproblems hervorrufen, hinreichend langsam verlaufen. Diese Bedingung beschränkt also erheblich jene Willkür; vielmehr wird uns die Natur des Störungsproblems oft von selbst schon anweisen, was den Grundkräften und was den störenden zugerechnet werden muß.

Damit erhebt sich die Forderung, die Methode der Variation der Konstanten für allgemeine Grundkräfte zu entwickeln.[1]) Indem wir uns von der Voraussetzung befreien, daß diese Kräfte ein räumliches Potential zulassen, werde ich mich bemühen, die alte Theorie auf dem neuen Fundament so einfach und mechanisch so durchsichtig wie möglich aufzubauen. Es liegt mir deshalb fern, an die mathematischen Theorien der Transformation und Integration der Bewegungsgleichungen anzuknüpfen, die seit Hamilton und Jacobi eine so weitgehende Förderung erfahren haben. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind am Schlusse kurz zusammengefaßt worden. Durch sie fällt ein neues Licht auf die besonderen Vorzüge, welche die Potentialkräfte in der kanonischen Mechanik genießen. Sie eröffnen uns ferner einen Gesichtspunkt, der mehr Interesse verdient, als ihm bisher zuteil geworden zu sein scheint, die allgemeine Frage nämlich: Die Bewegung eines mechanischen Systems sei uns „vollständig“ bekannt, d. h. so, daß wir sie für jede gegebene Anfangsbedingung beschreiben können. Wie gelangen wir allein von dieser vollständigen Lösung aus zur Kenntnis der dem System eingeprägten Kräfte, oder können wir wenigstens wesentliche Eigenschaften ihres Feldes ermitteln?

Bevor wir die Untersuchung in dieser doppelten Absicht angreifen, wollen wir einige Grundbegriffe und Bezeichnungen vorausschicken.

Wir werden uns das mechanische System durch seine allgemeinen und unabhängigen (wirklichen oder holonomen) Koordinaten vorstellen, so daß q_1 bis q_n seine Lage eindeutig bestimmen, wo n die Zahl der Freiheitsgrade des Systems bedeutet. q_ν soll irgend eine der Koordinaten $q_1, \cdots q_n$ sein und p_ν die ihr zugehörige Impulskomponente. Da die Geschwindigkeitskomponenten $\dot{q}_\nu$[2]) mit den korrespondierenden Impulskomponenten p_ν nach den n Gleichungen

$$(1) \qquad p_\nu = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}, \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n,$$

1) K. Heun, Die Vektoren der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Punktes und der geraden Linie. Programm der ersten Realschule zu Berlin 1898. Einleitung. — Siehe auch das Vorwort zu den „kinetischen Problemen“.

2) Die Fluxionsbezeichnung von Newton wird hier für die (totale) Zeitdifferentiation durchweg angewandt.

wo T die kinetische Energie des Systems als Funktion der q_ν und $\dot{q}_\nu$, nämlich als quadratische Form dieser Größen, ist, linear zusammenhängen, so ist es gleichgültig, ob ich den *Zustand* des Systems beschreibe durch Lage (q) und Geschwindigkeit ($\dot{q}$) oder durch Lage (q) und Impuls (p)[1]. Wir bevorzugen die letztere Art. Bezeichnet a die Gesamtheit der $2n$ willkürlichen Integrationskonstanten, so werde

$$F_\varkappa(q, p, a, t) = 0, \qquad \varkappa \text{ von } 1 \text{ bis } 2n \tag{2}$$

als Symbol für die $2n$ Integralgleichungen der Bewegung genommen. Mit Rücksicht auf das Vorhergehende mögen sie aber lieber die *Zustandsgleichungen* des Systems in ihrer allgemeinen Form heißen. Die Größen a benennen wir, um ihr besonderes Verhältnis zur gegenwärtigen Theorie zu kennzeichnen, nach dem Vorgange des astronomischen Gebrauchs, als die *Elemente* der Bewegung, indem sie Konstanten im ungestörten Problem sind und Veränderliche im gestörten werden.

Sollen die $2n$ Elemente a zur vollständigen Beschreibung der Bewegung des ungestörten Systems vermöge der Zustandsgleichungen (2) ausreichen, so muß vorausgesetzt werden, daß *die Grundkräfte nicht mehr von Beschleunigungen höherer Ordnung der Positionskoordinaten abhängen, d. h. nur Funktionen von q, $\dot{q}$ (resp. p) und $\ddot{q}$ sein dürfen. Diese Beschränkung der Allgemeinheit liegt der ganzen folgenden Untersuchung zugrunde.* Es genügt aber, die Grundkräfte nur als Funktionen der Zustandsgrößen q, p und der Zeit t anzusehen. Denn hängen ihre Systemkomponenten noch von den Beschleunigungen $\ddot{q}$ ab, so können alle $\ddot{q}$ mit Hilfe der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen eliminiert werden. Dann erhalten wir Kraftkomponenten, die nur noch von q, $\dot{q}$ und t abhängig sind. Die Geschwindigkeitskomponenten $\dot{q}$ werden aber nach (1) durch die Impulskomponenten p ersetzt.[2]

Die allgemeinen Zustandsgleichungen (2) werden wir durch zwei besondere Formen ersetzen. Einmal wollen wir sie nach jedem Element auflösen, so daß

$$a_\varkappa = a_\varkappa(q, p, t) \qquad \varkappa \text{ von } 1 \text{ bis } 2n \tag{3}$$

die $2n$ Elemente $a_\varkappa$ als Funktionen der Zustandsgrößen q, p und der Zeit t symbolisch darstellt. Cayley hat diese Form der allgemeinen

1) Unter „Impuls" des Systems die Gesamtheit seiner Impulskomponenten verstanden.

2) Es gibt hier, wo wir die Zustandsgleichungen als bekannt voraussetzen, noch einen anderen (kürzeren) Weg, die Grundkräfte nur als Funktionen von q, p und t darzustellen. Denn falls sie noch $\dot{q}$ und $\ddot{q}$ als Variable enthielten, so folgten diese aus (4) als Funktionen von a, t. Alle a sind aber wiederum nach (3) nur Funktionen von q, p und t, also können auch die Grundkräfte selbst so dargestellt werden.

Zustandsgleichungen die Integrale der Bewegungsgleichungen genannt.[1]) Mit ihnen ist aber auch gleichwertig[2]) die andere Form, in der die Zustandsgrößen

$$q_\nu = q_\nu(a, t), \quad p_\nu = p_\nu(a, t) \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n \tag{4}$$

als Funktionen der sämtlichen Elemente und der Zeit erscheinen. Sie beschreiben uns eigentlich erst die Bewegungsform des mechanischen Systems. Die Form (3) der Zustandsgleichungen ist nun charakteristisch für die zuerst von Poisson (Mémoire 1809) und die Form (4) für die zuerst von Lagrange (Mémoire 1809) hergestellten Störungsformeln. Entsprechend wollen wir zwischen der Poissonschen und Lagrangeschen Theorie unterscheiden, wenngleich die späteren Untersuchungen der beiden Forscher ganz ineinandergreifen, indem sie beide Formen der Störungsgleichungen nebeneinander betrachtet haben. Wir beginnen mit der Poissonschen Theorie.

1. Die Poissonschen Störungsformeln.

Wird das betrachtete, mechanische System in irgend einem Augenblick von einem einzelnen Stoß[3]) oder von einem System von Stoßkräften getroffen, so gelangt es in einen neuen Bewegungszustand, der sich von dem früheren nur durch eine Änderung seiner Elemente unterscheidet. In der Tat sind die besonderen Werte der Elemente einer individuellen Bewegungsform des Systems durch seinen „Anfangszustand" bestimmt. Als Anfangszustand können wir aber Lage und Geschwindigkeit, bez. Lage und Impuls des Systems in dem Augenblick setzen, in welchem die eben beschriebene Unstetigkeit des dynamischen Vorganges eingetreten ist. Dadurch erleiden also bloß die willkürlichen Konstanten in den Zustandsgleichungen plötzliche und, allgemein zu reden, endliche Änderungen. Wir nennen sie *Störungen der Elemente durch Impulsionen.* Lagrange hat solche unstetigen Änderungen in den Elementen der elliptischen Planetenbewegung wirklich berechnet[4])

1) Rep. Nr. 11. Auch Jacobi unterscheidet so zwischen Integralen und Integralgleichungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen in seinen Vorlesungen über Dynamik, Supplementband zu seinen ges. Werken (2. Ausgabe 1884) p. 3. — Wir vermeiden beiläufig durch die oben an den Gebrauch der mathematischen Physik angeschlossenen Namen den Doppelsinn, den das Wort „Integralgleichungen" durch die Arbeiten von Hilbert neuerdings angenommen hat.

2) Diejenigen Differentialrelationen, welche diesen Gleichwert von (3) und (4) ausdrücken, werden im 3. Abschnitt (p. 24) vollständig entwickelt.

3) Hier wird unter einem „Stoß" nicht der wahre und komplizierte, physikalische Vorgang verstanden, sondern der daraus idealisierte, instantan verlaufende Prozeß, der die Wirkung einer „Momentankraft" ausdrückt.

4) M. A., Sec. Part. VII, Chap. II, 1. II p. 66—75.