Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik

Winkelmann, Max

1909

9. Reduktion der Störungsgleichungen auf die kanonische Form. Die allgemeine Nährungsmethode. Beispiel

urn:nbn:de:bsz:31-270659

un critère général pour juger de l'exactitude d'une solution trouvée par quelque méthode que ce soit.“

Zergliedere ich (127) noch weiter, indem ich auf die Variationen der Elemente selbst zurückgehe, so entwickelt sich vermöge (28a) und der Bezeichnungen (88) daraus:

$$(128)\quad \sum_{\varkappa}\sum_{\lambda} Da_{\varkappa}\varDelta a_{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\nu}\frac{\partial\{q_\nu, p_\nu\}}{\partial\{a_\varkappa, a_\lambda\}}$$

$$= \sum_{\varkappa}\sum_{\lambda} Da_{\varkappa}\varDelta a_{\lambda}\cdot\sum_{\nu}\sum_{\varrho}\left\{\frac{\partial\{q_\nu, p_\varrho\}}{\partial\{a_\varkappa, a_\lambda\}}P'_{\nu\varrho} + \frac{1}{2}\frac{\partial\{q_\nu, q_\varrho\}}{\partial\{a_\varkappa, a_\lambda\}}P_{\nu\varrho}\right\},$$

und durch Vergleich der Koeffizienten von $Da_\varkappa \varDelta a_\lambda$ leicht die im fünften Abschnitt entwickelte Fundamentalformel der Lagrangeschen Störungstheorie. Zugleich erkennen wir aber auch aus (127) und (128) wegen der Willkür der Änderungen $Da_\varkappa \varDelta a_\lambda$ direkt ohne das im siebenten Abschnitte gebrauchte, umständliche Verfahren, daß sämtliche $\frac{\partial(a_\varkappa, a_\lambda)}{\partial t}$ nur verschwinden können, wenn es zugleich alle $P_{\nu\varrho}$ und $P'_{\nu\varrho}$ tun. Das war das vollständige Fundamentaltheorem über das Lagrangesche Klammersymbol.

9. Reduktion der Störungsgleichungen auf die kanonische Form. Die allgemeine Näherungsmethode. Beispiel.

A. Die Ableitung der kanonischen Form.

Während wir bisher gezeigt haben, daß die allgemeine Form der Störungsgleichungen weder eine Beschränkung in der Art der störenden, noch eine andere, als die in der Einleitung gemachte Voraussetzung, in der Art der Grundkräfte erfordert, daß die Grundkräfte allein die Abhängigkeit der in den Störungsformeln auftretenden Koeffizienten von der Zeit beeinflussen, erörtern wir nunmehr ihr Verhältnis zu den Voraussetzungen der klassischen Theorie, d. h. die Vereinfachungen, die sich aus der Beschränkung

1. auf konservative Grundkräfte
2. auf konservative Störkräfte

ergeben.

1. Lassen die Grundkräfte ein räumliches Potential zu, so führt eine spezielle Wahl der Elemente zur sogenannten kanonischen Form der Störungsgleichungen Diese besonderen Werte bilden eben deshalb ein kanonisches System der Elemente. Lagrange[1]) hat diese kanoni-

1) Es ist immer noch die irrtümliche Meinung verbreitet, daß sie erst von Hamilton 1837 entdeckt worden sei.

sche Form zuerst in seiner zweiten Abhandlung[1]) vom Jahre 1810 aufgestellt, dann in der Mécanique Analytique[2]) reproduziert, an beiden Stellen auch mit konservativen Störkräften. Poisson reduziert seine allgemeinen Störungsformeln erst in der Abhandlung vom Jahre 1816 (p. 29) auf die kanonische Form, doch ohne die Störkräfte zu spezialisieren.

Werden nämlich zu den konstanten Elementen der Grundbewegung *die Anfangswerte der Zustandsgrößen* q, p erkoren, jene mit a, diese mit b bezeichnet, ist also für $t = 0$

$$(129)\qquad q_\nu = a_\nu,\ p_\nu = b_\nu, \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n$$

— a_ν, b_ν sollen *konjugierte Elemente* heißen — so müssen die Zustandsgleichungen (3) sich gewiß auf die Form

$$(130)\qquad a_\nu = q_\nu + t a'_\nu,\ b_\nu = p_\nu + t b'_\nu, \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n$$

bringen lassen, wo a'_ν, b'_ν wieder Funktionen aller q, p und von t sein können, die für $t = 0$ endlich bleiben, und ähnlich die Zustandsgleichungen (4) auf die Form

$$(131)\qquad q_\nu = a_\nu + t q'_\nu,\ p_\nu = b_\nu + t p'_\nu, \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n,$$

wo q'_ν, p'_ν wieder für $t = 0$ endlich bleibende Funktionen der Elemente und der Zeit sein können. Da nach den Fundamentaltheoremen die Klammersymbole, sowohl von

$$\text{Poisson: } [a_\varkappa, a_\lambda] = \sum_\nu \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\nu} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu}\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\nu}\right), \text{ als auch von}$$

$$\text{Lagrange: } (a_\varkappa, a_\lambda) = \sum_\nu \left(\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial p_\nu}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial q_\nu}{\partial a_\lambda}\right)$$

unabhängig von t sind, so können die darin vorkommenden Differentialquotienten sämtlich für $t = 0$ gebildet werden. Dann folgt aus (130) für diesen Zeitpunkt:

$$(132)\qquad \frac{\partial a_\varkappa}{\partial q_\nu} = \begin{cases} 0 \text{ wenn } a_\varkappa \neq a_\nu \\ 1 \text{ wenn } a_\varkappa = a_\nu \end{cases} \qquad \frac{\partial a_\varkappa}{\partial p_\nu} = \begin{cases} 0 \text{ wenn } a_\varkappa \neq b_\nu \\ 1 \text{ wenn } a_\varkappa = b_\nu \end{cases}$$

und deshalb

$$(133)\qquad [a_\varkappa, a_\lambda] = -1 \text{ oder } 0,$$

1) Second Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique, dans lequel on simplifie l'application des formules générales à ces problèmes. Mém. de l'Institut 1809 p. 343—352, gelesen 19. Febr. 1810. Vgl. Cayley, Report 1857 Nr. 18.

2) Sec. Part. Sect. V § II Nr. 14 I p. 336.

je nachdem $a_\varkappa, a_\lambda$ zwei konjugierte Elemente sind oder nicht. Analog aus (131) für denselben Zeitpunkt:

$$(134)\qquad \frac{\partial q_\nu}{\partial a_\varkappa} = \begin{cases} 0 \text{ wenn } a_\varkappa \neq a_\nu \\ 1 \text{ wenn } a_\varkappa = a_\nu \end{cases} \qquad \frac{\partial p_\nu}{\partial a_\varkappa} = \begin{cases} 0 \text{ wenn } a_\varkappa \neq b_\nu \\ 1 \text{ wenn } a_\varkappa = b_\nu \end{cases}$$

und deshalb

$$(135)\qquad (a_\varkappa, a_\lambda) = +1 \text{ oder } 0,$$

je nachdem $a_\varkappa, a_\lambda$ zwei konjugierte Elemente sind oder nicht. Die beiden Klammerausdrücke bewahren aber diese Werte für alle Zeiten.

Der Dualismus so konjugierter Elemente zerfällt deshalb auch die allgemeinen Störungsformeln in Paare und zwar die Poissons (34) in der Gestalt:

$$(136)\qquad \dot{a}_\nu = -B_\nu, \quad \dot{b}_\nu = +A_\nu \qquad \nu \text{ von } 1 \text{ bis } n$$

und die Lagranges (54):

$$A_\nu = +\dot{b}_\nu, \quad B_\nu = -\dot{a}_\nu$$

identisch mit (136). Die Störungsgrößen A_ν, B_ν sind einander so zugeordnet wie die konjugierten Elemente a_ν, b_ν, nämlich durch die virtuelle Arbeit der Störkräfte in der Form:

$$(137)\qquad \varDelta\mathfrak{B} = \sum_\nu (A_\nu \varDelta a_\nu + B_\nu \varDelta b_\nu).$$

Wir haben den bekannten Satz:

Die allgemeinen Störungsgleichungen von Poisson und Lagrange verwandeln sich durch diese Wahl kanonischer Elemente in dieselbe kanonische Form.

Der große Vorteil für die Anwendung der kanonischen Gleichungen besteht darin, daß sie die, oft mühsame, Berechnung der $n(2n-1)$ Koeffizienten in den allgemeinen Störungsformeln erspart. Dagegen gestatten nicht-konservative Grundkräfte diese Reduktion nicht, oder ich behaupte:

Es gibt keine kanonischen Störungsgleichungen im strengen Sinne des Wortes, wenn die Grundkräfte nicht-konservativ sind.

Beweis. Denn würde eine solche kanonische Form, wie sie in (136) aufgestellt wurde, angenommen, so hätten *alle* Klammerausdrücke als Koeffizienten durch eine besondere Wahl der Elemente die konstanten Zahlwerte $0, +1$ oder -1 erhalten, wie (133, 135) angeben. Es würde sich also kein einziger Koeffizient darunter befinden, der Funktion der Zeit t wäre. Nach den Fundamentaltheoremen über die beiden Klammersymbole kann dies nur eintreten, wenn die Kräfte konservativ sind, was der Voraussetzung widerspricht.

Zusatz. Das im 8. Abschnitte behandelte Theorem von Lagrange ermöglicht, wie von ihm selbst[1]) schon geschehen, die direkte Ableitung der kanonischen Form. Nach dem Satze S. 51 ist jetzt

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\nu}(Dp_{\nu}\varDelta q_{\nu} - Dq_{\nu}\varDelta p_{\nu}) = 0. \tag{138}$$

Nehmen wir für die Verrückung D der Zustandsgrößen insbesondere ihre im Zeitelemente dt stattfindenden Störungen $\mathfrak{d}$[2]), so wird aus (138)

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\nu}(\mathfrak{d}p_{\nu}\varDelta q_{\nu} - \mathfrak{d}q_{\nu}\varDelta p_{\nu}) = 0. \tag{139}$$

Die Summe links ist aber nach (48) gleich der virtuellen Arbeit der den Störkräften äquivalenten, infinitesimalen Stoßkomponenten, oder es ist

$$\sum_{\nu}(\mathfrak{d}p_{\nu}\varDelta q_{\nu} - \mathfrak{d}q_{\nu}\varDelta p_{\nu}) = \varDelta\mathfrak{B}\,dt. \tag{140}$$

Da wegen (139) das erste Glied dieser Gleichung unabhängig von t ist, so können wir darin für die q_{ν}, p_{ν} ihre Anfangswerte (129) a_{ν} bzw. b_{ν} setzen, die virtuelle Arbeit $\varDelta\mathfrak{B}$ wie in (137) zerlegen, so daß an Stelle von (140) die folgende Gleichung tritt:

$$\sum_{\nu}(db_{\nu}\varDelta a_{\nu} - da_{\nu}\varDelta b_{\nu}) = dt\sum_{\nu}(A_{\nu}\varDelta a_{\nu} + B_{\nu}\varDelta b_{\nu}). \tag{141}$$

Indem man hüben und drüben die Faktoren von $\varDelta a_{\nu}$, bzw. $\varDelta b_{\nu}$ vergleicht, erscheinen nach Division mit dt die kanonischen Gleichungen (136) wieder:

$$\frac{db_{\nu}}{dt} = +A_{\nu},\quad \frac{da_{\nu}}{dt} = -B_{\nu}.$$

2. Die Voraussetzung, daß die Störkräfte ein Potential besitzen, vereinfacht an sich bloß die Berechnung der aus ihren Systemkomponenten Q entspringenden Größen A. Das (negative) Potential der Störkräfte heißt bekanntlich die *Störungsfunktion*, und ihr wird gewöhnlich das Zeichen Ω gegeben. Stellen wir Ω vermöge der „fertigen" Bewegungsgleichungen $q_{\nu} = q_{\nu}(a,t)$ als Funktion der Elemente dar, so sind die Größen A einfach die partiellen Ableitungen der Störungsfunktion Ω nach den zugehörigen Elementen a. In Zeichen:

$$A_{\varkappa} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_{\varkappa}}. \tag{142}$$

---

1) l. c. Sec. Part. Sect. V Nr. 12—14. I p. 333—336.
2) was erlaubt ist, weil die virtuellen Verschiebungen die reellen umfassen

Hamilton und Jacobi[1]) haben übrigens nachgewiesen, daß Ω außer den Koordinaten q auch die Impulskomponenten p enthalten darf.

Sind außerdem die Grundkräfte konservativ, und nehmen wir wieder die Anfangswerte der Zustandsgrößen als kanonische Elemente, so erhalten wir an Stelle von (136) die eigentlichen kanonischen Störungsformeln der Astronomie:

$$\frac{da_\nu}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b_\nu}, \quad \frac{db_\nu}{dt} = +\frac{\partial \Omega}{\partial a_\nu}. \tag{143}$$

B. Die allgemeine Näherungsmethode.

Das Störungsproblem ist somit seiner analytischen Natur nach auf ein System simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung für die veränderlichen Elemente zurückgeführt, ihre Form sei nun die allgemein gültige oder die unter A. für konservative Grundkräfte entwickelte kanonische (136, 143). Denn im allgemeinen werden die Störungsgrößen A auch Funktionen der Elemente.

Diese Gleichungen erfreuen sich (innerhalb der getroffenen Voraussetzungen) vollkommen mathematischer Strenge. Wie aber schon in der Einleitung hervorgehoben ist, gewähren sie den wahren Nutzen für die Bestimmung der gestörten Bewegung erst durch ihre, stets mögliche, angenäherte Auflösung. Ein schon von den Erfindern der Störungsrechnung ausgearbeitetes, allgemein geltendes Verfahren[2]) besteht nun kurz darin: Sind die Störkräfte relativ klein, so sind sie von entsprechend langsamen Veränderungen der Elemente begleitet. Wir können sie selbst also in erster Annäherung konstant setzen, nachdem die Klammersymbole und Störungsgrößen als Funktionen der Elemente und der Zeit ausdrücklich berechnet worden sind. Dann werden sämtliche Elementgeschwindigkeiten offenbar nur noch reine Zeitfunktionen, z. B.

$$\dot{a}_\varkappa = f_\varkappa(t), \tag{144}$$

woraus durch reine Quadratur nach t folgt

$$a_\varkappa = \int f_\varkappa dt + a_\varkappa^0, \tag{145}$$

d. h. der zeitliche Verlauf des Elements ist bekannt, das Ziel, welches wir erreichen wollten. Die Integration beginnt mit $t = 0$, indem wir

1) Jacobi in der schon S. 32 zitierten, nachgelassenen Abhandlung p. 338. Hamilton, l. c. (Fußnote S. 19).

2) Lagrange M. A. Sec. Part. Sect. V, 15 **I**, p. 336—339. Im übrigen ist diese Methode nicht zwingend. An ihre Stelle kann irgend ein anderes Verfahren treten, z. B. der von Runge (Math. Ann. **46** (1895)) und Heun (Zeitschr. f. Math. u. Phys. **45** (1898)) nach dem Vorbilde der mechanischen Quadratur erfundene Algorithmus. Vgl. auch Kin. Probl. p. 116.

die Zeit von dem Augenblick an zählen, wo die Störkräfte eingreifen. Die zu den veränderlichen Elementen $a_\varkappa$ der gestörten Bewegung gehörigen, willkürlichen Integrationskonstanten $a_\varkappa^0$ sind demnach die unveränderlichen Werte derselben Elemente in der Grundbewegung. Da in den Funktionen $f_\varkappa$ keine anderen Konstanten vorkommen, so erhalten wir durch Substitution des Ausdrucks (145) für die $a_\varkappa$ in den Zustandsgleichungen (3) oder (4) die vollständige Lösung des Störungsproblems in erster Annäherung. Dieses Verfahren trägt den Keim einer vollständigen Reihenentwicklung in sich. Wir brauchen es ja nur mit den neuen Zustandsgleichungen zu wiederholen. Ich begnüge mich mit dieser Skizze einer hinreichend bekannten Methode, die keinen anderen Zweck hatte, als zu zeigen, daß sie, unberührt von dem Charakter der Grundkräfte, insbesondere von dem Unterschied, ob die Klammerausdrücke die Zeit explizite enthalten oder nicht, auf die allgemeinen Störungsformeln ebenso anwendbar bleibt, wie sie es hinsichtlich der kanonischen Gleichungen immer gewesen ist.

C. Beispiel: Einfacher Typus eines gekoppelten Systems von zwei Freiheitsgraden der Bewegung ohne Dämpfung.

Um die ganze Theorie noch kurz an einem Beispiel ohne mathematische Verwicklungen durchzuführen, wollen wir die Differentialgleichungen für die kleinen Schwingungen eines sog. gekoppelten Systems mit zwei Freiheitsgraden[1]) in der einfachen Form

(146a) $$\ddot{x} - ky = 0, \qquad \ddot{y} + hx = 0$$

annehmen, worin wir die „Koppelungskoeffizienten" k, h als *Größen mit demselben Vorzeichen* der Bequemlichkeit halber gleich 1 setzen können. Wenn also x, y die beiden Koordinaten des gekoppelten Systems bedeuten, sind

(146b) $$\ddot{x} - y = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{y} + x = 0$$

die simultanen Differentialgleichungen seiner ungestörten Bewegung; sie bestimmen die ungedämpften Eigenschwingungen. Deuten wir x, y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes mit der Einheit der Masse, so stellen auch die Gl. (146) die Bewegung des repräsentierenden Punktes in der Koordinatenebene dar, der einem nicht-konservativen Kraftfeld mit den Komponenten $X = +y$ und $Y = -x$ gehorcht.

1) Solche Systeme haben neuerdings das Interesse der Physiker wieder erregt. Ihre mechanische Theorie hat M. Wien in den Annalen der Physik (1897, N. F. **61**, 151) vollständig diskutiert, und die von ihm gebrauchte Terminologie scheint sehr zweckmäßig zu sein. In der Wellentelegraphie sind Sender und Empfänger mit ihren Antennen Beispiele. Auch schwingende Schraubenfedern sind interessante Fälle dieser Art. Vgl. A. Sommerfeld, Wüllner-Festschrift. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Wirken außerdem Störkräfte mit den rechtwinkligen Komponenten X, Y' ein, so lauten die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung

$$\ddot{x} - y = \dot{X}', \qquad \ddot{y} + x = Y'. \tag{147}$$

Die vollständige Lösung (146) wollen wir der Bequemlichkeit halber in der komplexen Form angeben, welche die zugehörige determinierende Gleichung

$$\lambda^4 + 1 = 0 \tag{148}$$

direkt liefert. Die Wurzeln derselben sind

$$\lambda_1 = \frac{i+1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = -\frac{i+1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_3 = \frac{i-1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_4 = -\frac{i-1}{\sqrt{2}}, \tag{149}$$

und ihnen entsprechend erhalten wir die komplexen Zustandsgleichungen[1]) in der Lagrangeschen Form (4), wenn wir noch abgekürzt setzen:

$$e_h = e^{\lambda_h t}, \qquad h \text{ von } 1 \text{ bis } 4 \tag{150}$$

$$\begin{cases} x = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4, & \dot{x} = \lambda_1 ae_1 - \lambda_1 be_2 + \lambda_3 ce_3 - \lambda_3 de_4 \\ y = iae_1 + ibe_2 - ice_3 - ide_4, & \dot{y} = i\lambda_1 ae_1 - i\lambda_1 be_2 - i\lambda_3 ce_3 + i\lambda_3 de_4. \end{cases} \tag{151}$$

Die zu x, y gehörigen Impulskomponenten sind mit $\dot{x}$ bzw. $\dot{y}$ identisch. a, b, c, d sind die vier Elemente der Bewegung. Werden die Gl. (151) nach ihnen aufgelöst, so erscheinen die Zustandsgleichungen in der Poissonschen Form (3):

$$\begin{cases} a = \frac{e_2}{4}(z' - \lambda_3 \dot{z}'), & c = \frac{e_4}{4}(z - \lambda_1 \dot{z}) \\ b = \frac{e_1}{4}(z' + \lambda_3 \dot{z}'), & d = \frac{e_3}{4}(z + \lambda_1 \dot{z}), \end{cases} \tag{152}$$

worin z, z' die aus x, y gebildeten, konjugiert-komplexen Größen

$$z = x + iy, \quad z' = x - iy \tag{153}$$

bedeuten. Aus (151) leiten sich die Poissonschen, aus (152) die Lagrangeschen Klammersymbole, sechs von jeder Art, her, die wir hier zusammenstellen wollen:

$$\begin{aligned} &[a, b] = 0, && (a, b) = 0 \\ &[a, c] = +\frac{\sqrt{2}}{8} e^{-i\sqrt{2}t}, && (a, c) = -2\sqrt{2} e^{+i\sqrt{2}t} \\ &[a, d] = -i\frac{\sqrt{2}}{8} e^{-\sqrt{2}t}, && (a, d) = -2i\sqrt{2} e^{+\sqrt{2}t} \\ &[b, c] = +i\frac{\sqrt{2}}{8} e^{+\sqrt{2}t}, && (b, c) = +2i\sqrt{2} e^{-\sqrt{2}t} \\ &[b, d] = -\frac{\sqrt{2}}{8} e^{+i\sqrt{2}t}, && (b, d) = +2\sqrt{2} e^{-i\sqrt{2}t} \\ &[c, d] = 0, && (c, d) = 0. \end{aligned} \tag{154}$$

---

1) Die reelle Lösung läßt sich ja leicht daraus ableiten, z. B. in der Form: $x = me^{-\tau}\sin(\tau + \varepsilon) + m'e^{\tau}\sin(\tau + \varepsilon')$, $y = -me^{-\tau}\cos(\tau + \varepsilon) + m'e^{\tau}\cos(\tau + \varepsilon')$, wo

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

In vier Klammerausdrücken jeder Art tritt also die Zeit explizite auf, weil die Komponenten X, Y sich nicht als Ableitungen einer Kräftefunktion darstellen lassen. Die Werte der 10 Unstetigkeitsfaktoren

$$\varepsilon_{aa} = \varepsilon_{bb} = \varepsilon_{cc} = \varepsilon_{dd} = 1$$

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{ac} = \varepsilon_{ad} = \varepsilon_{bc} = \varepsilon_{bd} = \varepsilon_{cd} = 0$$

werden aus (154) nach (64) leicht bestätigt.

Die Störkräfte wollen wir uns als reine Zeitkräfte vorstellen, indem wir

$$X' = g(t), \quad Y' = h(t)$$

setzen. Alsdann existiert eine Störungsfunktion

$$\Omega = gx + hy,$$

aus der die Störungsgrößen

$$A = \frac{\partial \Omega}{\partial a} = fe_1, \quad B = \frac{\partial \Omega}{\partial b} = fe_2, \quad C = \frac{\partial \Omega}{\partial c} = f'e_3, \quad D = \frac{\partial \Omega}{\partial d} = f'e_4 \tag{157}$$

bequem folgen. Hierbei haben wir aus g, h die konjugiert-komplexen Größen

$$g + ih = f, \quad g - ih = f' \tag{158}$$

gebildet. Die Poissonschen Störungsformeln ergeben für die Variation der vier Elemente:

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= [a, b]B + [a, c]C + [a, d]D = \tfrac{\lambda_4}{4} f' e_2 \\
\dot{b} &= [b, a]A + [b, c]C + [b, d]D = \tfrac{\lambda_3}{4} f' e_1 \\
\dot{c} &= [c, a]A + [c, b]B + [c, d]D = \tfrac{\lambda_2}{4} f e_4 \\
\dot{d} &= [d, a]A + [d, b]B + [d, c]C = \tfrac{\lambda_1}{4} f e_3.
\end{aligned} \tag{159}$$

Nun sind auch die Elemente selbst durch Integration nach t als Zeitfunktionen bekannt. Ihre Einführung in die Bewegungsgleichungen (151) des ungestörten Systems scheidet die Eigenbewegungen desselben von den durch die Störkräfte g, h erzwungenen. Diese lassen sich leicht mit Benutzung der Komplexen z, z' in die Form

$$\left\{\begin{aligned}
z_g &= \frac{\lambda_1}{2} \int_0^t f(\tau)\, d\tau \left\{ e^{\lambda_4 (t-\tau)} - e^{\lambda_3 (t-\tau)} \right\} \\
z'_g &= \frac{\lambda_3}{2} \int_0^t f'(\tau)\, d\tau \left\{ e^{\lambda_2 (t-\tau)} - e^{\lambda_1 (t-\tau)} \right\}
\end{aligned}\right. \tag{160}$$

kleiden, während jene nach (151, 153) sind:

$$z_f = 2(c'e_3 + d'e_4), \quad z'_f = 2(a'e_1 + b'e_2), \tag{161}$$

so daß

$$z = z_f + z_g, \quad z' = z'_f + z'_g \tag{162}$$

die vollständige Lösung des gestörten Problems in komplexer Form ist. Die Akzente sollen nur die Unveränderlichkeit der Größen a bis d ausdrücken. Bei diesem ganzen Rechengeschäft mag man alle Vorteile wahrnehmen, welche die Beziehungen zwischen den Wurzeln der binomischen Gleichung (148) fast von selbst darbieten. Die Zerlegung der Ausdrücke (160) in reelle Bestandteile können wir hier füglich unterlassen. Es müssen vermöge des Anschlusses der gestörten Bewegung an die ungestörte die Gleichungen

$$\mathfrak{d}x = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{d}y = 0 \tag{163}$$

erfüllt sein. In der Tat ist

$$\frac{\mathfrak{d}x}{\mathfrak{d}t} = \frac{\partial x}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial x}{\partial b}\dot{b} + \frac{\partial x}{\partial c}\dot{c} + \frac{\partial x}{\partial d}\dot{d} = \frac{f'}{4}(\lambda_3 + \lambda_4) + \frac{f}{4}(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$$

$$\frac{\mathfrak{d}y}{\mathfrak{d}t} = \frac{\partial y}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial y}{\partial b}\dot{b} + \frac{\partial y}{\partial c}\dot{c} + \frac{\partial y}{\partial d}\dot{d} = \frac{if'}{4}(\lambda_3 + \lambda_4) - \frac{if}{4}(\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$

Da die Grundkräfte X, Y bloß vom Orte abhängen, so besteht der lineare Zusammenhang mit den Änderungsgeschwindigkeiten der Klammersymbole allein in der Wirbelkomponente $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$ auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[a,b]}{\partial t} &= \left(\frac{\partial a}{\partial \dot{x}}\frac{\partial b}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial a}{\partial \dot{y}}\frac{\partial b}{\partial \dot{x}}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial(a,b)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{164}$$

Wenn wir dies für alle Klammersymbole ausführen, so erhalten wir dieselben Werte wie durch direkte Zeitdifferentiation der Ausdrücke (154).

Nehmen wir jetzt an, daß uns allein die Zustandsgleichungen des Systems in den Formen (151) und (152) bekannt seien, so finden wir rückwärts die Eigenschaften des Kraftfeldes nach den Fundamentalformeln (98, 99) des 6. Abschnittes.

I) Sind Wirbelkomponenten des Kraftfeldes vorhanden? (98) antwortet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial a}\frac{\partial \dot{y}}{\partial b} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial a}\frac{\partial \dot{x}}{\partial b}\right)\frac{\partial[a,b]}{\partial t} + \cdots, \quad \text{oder auch} \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}\right)\frac{\partial(a,b)}{\partial t} + \cdots = +2. \end{aligned} \tag{165}$$

II) Sind Impulsderivierten der Kraftkomponenten vorhanden? (99) antwortet:

$$(166)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial \dot{x}} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial b} - \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial a}\dfrac{\partial x}{\partial b}\right)\dfrac{\partial [a,b]}{\partial t} + \cdots = \left(\dfrac{\partial a}{\partial x}\dfrac{\partial b}{\partial x} - \dfrac{\partial a}{\partial \dot{x}}\dfrac{\partial b}{\partial x}\right)\dfrac{\partial (a,b)}{\partial t} + \cdots = 0 \\ \dfrac{\partial X}{\partial \dot{y}} = \left(\dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial b} - \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial a}\dfrac{\partial y}{\partial b}\right)\dfrac{\partial [a,b]}{\partial t} + \cdots = \left(\dfrac{\partial a}{\partial x}\dfrac{\partial b}{\partial \dot{y}} - \dfrac{\partial a}{\partial \dot{y}}\dfrac{\partial b}{\partial x}\right)\dfrac{\partial (a,b)}{\partial t} + \cdots = 0 \\ \dfrac{\partial Y}{\partial \dot{x}} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial \dot{y}}{\partial b} - \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial a}\dfrac{\partial x}{\partial b}\right)\dfrac{\partial [a,b]}{\partial t} + \cdots = \left(\dfrac{\partial a}{\partial y}\dfrac{\partial b}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial a}{\partial \dot{x}}\dfrac{\partial b}{\partial y}\right)\dfrac{\partial (a,b)}{\partial t} + \cdots = 0 \\ \dfrac{\partial Y}{\partial \dot{y}} = \left(\dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial \dot{y}}{\partial b} - \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial a}\dfrac{\partial y}{\partial b}\right)\dfrac{\partial [a,b]}{\partial t} + \cdots = \left(\dfrac{\partial a}{\partial y}\dfrac{\partial b}{\partial \dot{y}} - \dfrac{\partial a}{\partial \dot{y}}\dfrac{\partial b}{\partial y}\right)\dfrac{\partial (a,b)}{\partial t} + \cdots = 0. \end{cases}$$

Als Kontrollformeln dienen uns aber

III) die Relationen (100):

$$(167)\quad \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\right)\frac{\partial [a,b]}{\partial t} + \cdots = \left(\frac{\partial a}{\partial \dot{x}}\frac{\partial b}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial a}{\partial \dot{y}}\frac{\partial b}{\partial \dot{x}}\right)\frac{\partial (a,b)}{\partial t} + \cdots = 0.$$

In unserem Beispiel waren also $2 \cdot n(2n-1) = 12$ Formeln zu berechnen.

X, *Y* sind hiermit als rein vom Ort abhängige Kräfte erkannt, die der Bedingung

$$(168)\quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 2$$

unterliegen. Diese partielle Differentialgleichung wird aber befriedigt durch die allgemeine Lösung

$$(169)\quad X = y + \frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = -x + \frac{\partial V}{\partial y},$$

worin V eine notwendig unbestimmte Kräftefunktion bedeutet.

Der Zusammenhang der Klammerausdrücke mit ihren Änderungsgeschwindigkeiten, wie er in den Formeln (94, 99) des 7. Abschnittes ausgedrückt ist, wird durch einfache Rechnungen bestätigt. Es ist überflüssig, das vollständige System der $2 \cdot 6$ Gleichungen in der besonderen Form unseres Beispiels herzusetzen; es mag genügen, zwei der typischen hinzuschreiben:

$$\alpha)\quad \frac{\partial [a,b]}{\partial t} = \begin{bmatrix} ab \\ ab \end{bmatrix}\frac{\partial (a,b)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ab \\ ac \end{bmatrix}\frac{\partial (a,c)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ab \\ ad \end{bmatrix}\frac{\partial (a,d)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ab \\ bc \end{bmatrix}\frac{\partial (b,c)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ab \\ bd \end{bmatrix}\frac{\partial (b,d)}{\partial t} + \begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}\frac{\partial (c,d)}{\partial t}$$

und die reziproke mit vertauschten Klammern. Das erste und das letzte Glied verschwinden wegen $(a, b) = (c, d) = 0$, die übrigen, weil die