Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie

Ludwig, Walther

1904

§ 1. Aufstellung der einfachsten Transformationen [...]

urn:nbn:de:bsz:31-270270

auf den Hauptkreis konjugierten Punkten identisch; das heißt, jeder dieser Strahlen schneidet $\varkappa$ und den Hauptkreis in denselben beiden Punkten, ist eine Hauptsehne von $\varkappa$. So können wir die Hauptsehnen von $\varkappa$ auch bei imaginärem Hauptkreis konstruieren; wir brauchen nach dem früheren nicht erst nachzuweisen, daß wir immer zwei reelle Geraden erhalten.

Zweiter Abschnitt.

Die einfachsten Berührungstransformationen, die Kreise in Kreise überführen.

§ I. Aufstellung der einfachsten Transformationen „𝔈“ der Ebenen des Raumes, die auf einer Kugel eine Berührungstransformation der Kreise erzeugen.

1. Da ein Punkt in der Theorie der Berührungstransformationen als Elementverein aufzufassen ist, wird man, wenn es sich um die Berührungstransformationen der Kreise handelt, jeden Punkt als einen Kreis ansehen müssen. Um recht einfache Verhältnisse zu erhalten, machen wir die

Voraussetzung: Auf einer Kugel Φ bestehe eine algebraische Berührungstransformation 𝔅, die jedem Punkt einen einzigen Kreis zuordnet, der nicht nebenbei auch noch zu einem anderen Punkte gehört, und die jeden Kreis in eine Kurve überführt, die sich aus lauter Kreisen zusammensetzt; dasselbe verlangen wir von der inversen Transformation $\mathfrak{B}^{-1}$.

Mit 𝔅 verbunden ist eine algebraische Verwandtschaft 𝔈 zwischen den Ebenen des Raumes, und wir können uns umgekehrt 𝔅 durch 𝔈 erzeugt denken. Da ein Punkt von Φ ein Kreis ist, dessen Ebene Φ berührt, sehen wir:

Die mit 𝔅 verbundene algebraische Ebenenverwandtschaft 𝔈 ordnet jeder Berührungsebene der Kugel Φ eindeutig eine Ebene zu, die nicht nebenbei noch einer anderen Berührungsebene entspricht.

Sie führt also Φ in eine von ihr verschiedene algebraische Fläche Φ' über, so daß zwischen den Berührungsebenen der beiden Flächen eine ein-eindeutige Zuordnung besteht. Welches ist nun die Klasse der Φ'? In welcher geometrischen Beziehung stehen Φ und Φ'? Kann die Zuordnung zwischen den Berührungsebenen von Φ und Φ' als Teil einer durchweg eindeutigen bekannten Transformation der Ebenen des Raumes dargestellt werden? Dies sind die Fragen, die sich hier sofort erheben und deren Beantwortung uns zugleich zu einer konstruktiven Definition der Transformation $\mathfrak{E}$ verhelfen wird.

2. Wir nehmen eine Ebene ε und betrachten den in ihr befindlichen Kreis (ε) von Φ als Enveloppe des Systems seiner Punkte; durch Anwendung von $\mathfrak{B}$ erhalten wir hieraus ein System von Kreisen, dessen Enveloppe sich aus lauter Kreisen (ε_1'), (ε_2'), (ε_3'), ... , zusammensetzen soll; die Ebenen der Kreise des Systems sind durch $\mathfrak{E}$ eindeutig den Ebenen zugeordnet, die Φ in den Punkten von (ε) berühren, und umhüllen eine der Φ' umschriebene abwickelbare Fläche; deren Schnittkurve mit der Kugel Φ ist nun die Enveloppe des obigen Kreissystems und setzt sich deshalb zusammen aus den Kreisen (ε_1'), (ε_2'), (ε_3'), ... , deren Ebenen ε_1', ε_2', ε_3' . . . . in der Verwandtschaft $\mathfrak{E}$ der Ebene ε entsprechen.

Besteht die Schnittkurve nur aus *einem* Kreise, so kann die abwickelbare Fläche nur ein Kegel II. Grades sein, der Φ längs dieses Kreises berührt; wenn das durchweg stattfindet, ordnet $\mathfrak{E}$ jeder Tangentialebene von Φ nur wieder Tangentialebenen von Φ zu und erzeugt deshalb auf Φ keine eigentliche Berührungstransformation, sondern eine Punkttransformation. — Setzt sich aber die Schnittkurve aus *zwei* Kreisen zusammen, so besteht die abwickelbare Fläche aus lauter Ebenen, die diese beiden Kreise gleichzeitig berühren, und kann infolgedessen nur der eine der beiden Kegel II. Grades sein, die durch die beiden Kreise hindurchgelegt werden können; auf diesen einfachsten Fall wollen wir uns hier beschränken und machen deshalb die weitere

Voraussetzung: Die Berührungstransformation $\mathfrak{B}$ ordne jedem Kreise zwei Kreise zu, (die eventuell zusammenfallen können).

Nach dem vorangegangenen folgt aus ihr:

Die Verwandtschaft $\mathfrak{E}$ ist zweideutig; einen Tangentialkegel der Kugel Φ führt sie in einen Kegel II. Grades über, der Φ in zwei Punkten berührt, und die Ebenen ε_1', ε_2' der Kreise, in denen der letztere die Kugel schneidet, sind gerade die durch $\mathfrak{E}$ der Ebene ε zugeordneten Ebenen, wenn ε die Ebene des Berührungskreises des Tangentialkegels ist.

3. Nehmen wir nun einen Kreis (ε) der Kugel Φ und auf ihm ein Linienelement l, dessen Punkt P sei, so ist l das den beiden Elementvereinen P und (ε) gemeinsame Linienelement; da P durch die Berührungstransformation $\mathfrak{B}$ in einen Kreis (π') verwandelt wird, sind die dem l entsprechenden Linienelemente diejenigen, die die zu (ε) gehörigen Kreise (ε_1') und (ε_2') mit dem Kreis (π') gemein haben, und das sind, da nach dem vorangegangenen die Ebene π' die Kreise (ε_1') und (ε_2') berührt, zwei, auf jedem der Kreise (ε_1') und (ε_2') eins. Demnach fließt aus unseren Voraussetzungen der Satz:

Durch $\mathfrak{B}$ wird jedes Linienelement l in zwei Linienelemente l_1' und l_2' übergeführt, die in derselben Ebene liegen. Wenn l einen Kreis (ε) durchläuft, so beschreiben l_1' und l_2' je einen der ihm zugeordneten Kreise (ε_1') und (ε_2'). Umgekehrt gehören l_1' und l_2' nur dann bzw. den Kreisen (ε_1') und (ε_2') an, wenn l ein Element des Kreises (ε) ist.

Hierbei kann der Fall eintreten, daß (ε_1') und (ε_2') ein Element l_0' gemeinsam haben; dann gibt es auf (ε) ein Element l_0, dessen beide entsprechenden in l_0' vereinigt sind. Solcher Elemente ist jedoch höchstens eine einfach unendliche Anzahl vorhanden, da durch $\mathfrak{B}$ dem Punkt von l_0 der Punkt von l_0' zugeordnet ist, während wir vorausgesetzt haben, daß i. A. ein Punkt in einen wirklichen Kreis übergehen soll. Diese Elemente l_0 und l_0' bilden zwei Elementvereine, die wir später finden werden.

Nehmen wir jetzt zwei Kreise (ε) und (η), die ein Element l gemeinsam haben, so wird jedes der ihm entsprechenden Elemente l_1' und l_2' einem der Kreise angehören, der dem (ε), und einem der Kreise, der dem (η) zugeordnet ist; das ist aber nicht anders möglich, als daß etwa (ε_1') und (η_1') sich in l_1', (ε_2') und (η_2') sich in l_2' berühren. Deshalb müssen, wenn wir alle Kreise ins Auge fassen, die sich in l berühren, die ihnen entsprechenden sich in zwei Büschel ordnen, nämlich in den Büschel der sich in l_1' und in den Büschel der sich in l_2' berührenden Kreise. Hiernach hat die Ebenentransformation $\mathfrak{E}$ die folgende charakteristische Eigenschaft:

Dreht sich eine Ebene ε um eine Tangente t der Kugel Φ, so beschreiben die beiden ihr durch $\mathfrak{E}$ zugeordneten Ebenen ε_1', ε_2' zwei Ebenenbüschel, deren Axen t_1' und t_2' ebenfalls Φ berühren. t_1' und t_2' schneiden sich und bestimmen die Ebene, die der durch t laufenden Berührungsebene von Φ entspricht.

Wegen der sich hierin ausdrückenden engen Beziehung der Kugel Φ zur Transformation $\mathfrak{E}$ wollen wir Φ als die *„Grundkugel“* von $\mathfrak{E}$ bezeichnen.

4. Wir haben soeben eine mit $\mathfrak{E}$ verbundene zweideutige Beziehung zwischen den Tangenten der Grundkugel aufgefunden; wir wissen von ihr nach den Erörterungen, die sich an den vorletzten Satz der vorigen Nummer schließen, daß es höchstens eine einfach unendliche Anzahl von Tangenten t_0 gibt, deren beide entsprechenden sich in eine, t_0', vereinigen, und daß nur dann, wenn eine Tangente t in einer Ebene ε liegt, auch die entsprechenden Tangenten t_1', t_2' bzw. den entsprechenden Ebenen ε_1, ε_2' angehören. Es tritt nun sofort die Frage auf nach dem Gebilde der Tangenten, die den durch einen Punkt R gehenden Tangenten entsprechen. Wir haben dabei drei Fälle zu unterscheiden:

a) *R ist ein Punkt der Grundkugel:* Dann liegen alle durch R gehenden Tangenten in der zu R gehörigen Berührungsebene ϱ von Φ, und die ihnen entsprechenden bilden

den Tangentenbüschel des Kreises von Φ, der in der Ebene ϱ' liegt, die der ϱ durch $\mathfrak{E}$ zugeordnet ist.

b) *R liegt nicht auf der Grundkugel, aber empfängt (mindestens) eine Tangente t_0, deren entsprechende sich in einer, t_0', vereinigt haben:* Es seien a eine weitere Tangente aus R und a_1', a_2' die ihr entsprechenden; der Ebene $(t_0\, a)$ sind dann durch $\mathfrak{E}$ die Ebenen $(t_0'\, a_1')$ und $(t_0'\, a_2')$ zugeordnet, und deshalb muß t_0' durch den Schnittpunkt R' von a_1' und a_2' gehen. Dasselbe gilt für alle Tangenten aus R; ist x eine von ihnen und x_1' die eine ihr entsprechende Tangente, so kann, da x nicht in der Ebene $(t_0\, a)$ liegt, x_1' weder der Ebene $(t_0'\, a_1')$ noch der Ebene $(t_0'\, a_2')$ angehören; da aber x und a in einer Ebene liegen, muß x_1' mindestens eine der beiden Geraden a_1' und a_2' treffen, und das ist nach dem vorigen nur möglich im Punkte R'. In diesem Fall also schicken die Tangenten des Punktes R ihre entsprechenden sämtlich durch denselben Punkt R'.

c) *R ist ein Punkt des Raumes in allgemeiner Lage:* Dann nehmen wir zunächst zwei Tangenten a und b, die durch R gehen und deren zugeordnete Tangenten a_1', a_2', b_1', b_2' von einander verschieden sind. a_1' und a_2' schneiden sich und ebenso b_1' und b_2'; ferner werden noch der Ebene (ab) etwa die Ebenen $(a_1'\, b_1')$ und $(a_2'\, b_2')$ entsprechen, so daß sich auch a_1' und b_1', sowie a_2' und b_2' schneiden. Da b nicht in der Berührungsebene von Φ liegt, die durch a läuft, gehören weder b_1' noch b_2' der jener entsprechenden Ebene $(a_1'\, a_2')$ an; ebensowenig auch a_1' und a_2' der Ebene $(b_1'\, b_2')$. Aus diesem Grunde müssen die vier Geraden a_1', a_2', b_1', b_2' *entweder* ein windschiefes Vierseit bilden *oder* alle durch denselben Punkt laufen; aber es ist nicht möglich, daß etwa b_1' durch den Schnittpunkt von a_1' und a_2' geht und b_2' nicht. — Laufen nun die vier Geraden durch denselben Punkt R', so nehmen wir eine beliebige weitere Tangente x aus R und die eine, x_1', der ihr entsprechenden Tangenten; da x nicht in der Ebene (ab) und deshalb x_1' nicht in den Ebenen $(a_1'\, b_1')$ und $(a_2'\, b_2')$ liegt, da ferner x_1'

mindestens eine der Geraden a_1', a_2' und eine der Geraden b_1', b_2' treffen muß, kann x_1', wenn es nicht auch durch R' läuft, nur eine Gerade einer der Ebenen $(a_1' b_2')$ und $(a_2' b_1')$ sein. Die betreffende Ebene aber müßte dann sowohl der Ebene $(a\, x)$ wie der Ebene $(b\, x)$ entsprechen, und zwar unabhängig von der Wahl von x; dies würde eine Ausartung der Transformation $\mathfrak{E}$ bedeuten, die wir ausschließen können. Mithin muß x_1' durch R' laufen, und wir kommen auf den vorigen Fall zurück; in der Tat gehen jetzt auch durch R Tangenten, die nur je eine einzige entsprechende haben, nämlich die Verzweigungselemente der Korrespondenz, die zwischen den Kanten der aus R und R' an Φ kommenden Tangentialkegel durch unsere Verwandtschaft erzeugt wird. — Wenn also R ein Punkt des Raumes in allgemeiner Lage ist, bilden a_1', a_2', b_1', b_2' *immer* ein windschiefes Vierseit; nehmen wir dann eine beliebige Tangente x aus R, so können, wie früher, die ihr entsprechenden Tangenten x_1' und x_2' keine Geraden der Ebenen $(a_1' a_2')$, $(b_1' b_2')$, $(a_1' b_1')$, $(a_2' b_2')$ dieses Vierseits sein. Da aber x_1' und x_2' je eine der vier Seiten des Vierseits schneiden müssen, so kann das nur so geschehen, daß etwa x_1' die Geraden a_1', b_2' und x_2' die Geraden a_2', b_1' trifft. Lassen wir daher x den aus R an Φ kommenden Tangentialkegel durchlaufen, so wird x_1' an den Geraden a_1', b_2' und x_2' an den Geraden a_2', b_1' entlang gleiten, dabei immer die Fläche Φ berührend. Hieraus aber ergibt sich mit Leichtigkeit, daß x_1' und x_2' zwei verbundene Regelscharen beschreiben, deren Trägerfläche P' die Grundkugel Φ in unendlich vielen Punkten, also längs eines Kreises berührt. — Indem wir die ersten beiden Fälle als Ausartungen des dritten Falles ansehen, fassen wir unser Ergebnis so zusammen:

Dreht sich eine Tangente der Grundkugel um einen Punkt R, so beschreiben die beiden ihr durch $\mathfrak{E}$ zugeordneten Tangenten ein Paar verbundener Regelscharen, deren Trägerfläche P' die Grundkugel längs eines Kreises berührt.

Aus diesem Satz folgt sofort:

Jeder Ebene ε aus R entsprechen vermöge $\mathfrak{C}$ zwei Berührungsebenen von P'.

Oder:

$\mathfrak{C}$ führt ein Ebenenbündel in eine Fläche II. Klasse über, die die Grundkugel längs eines Kreises berührt.

5. Genau dieselben Überlegungen können wir nach unseren Voraussetzungen mit den beiden inversen Transformationen $\mathfrak{B}^{-1}$ und $\mathfrak{C}^{-1}$ anstellen; wir wollen die Bezeichnung so einrichten, daß wir sagen: Durch $\mathfrak{C}^{-1}$ sind einer Ebene ε' die Ebenen ε_1 und ε_2 zugeordnet usw. Insbesondere geht die Grundkugel Φ, die wir auch mit Ψ' bezeichnen, durch $\mathfrak{C}^{-1}$ in eine Fläche Ψ über. Nach den vorangegangenen Erörterungen können wir jetzt die Art der Flächen Φ' und Ψ bestimmen. Um die Klasse von Φ' zu finden, sehen wir nach, was für ein Tangentialkegel aus irgend einem Punkte R' an Φ' geht: Dem Ebenenbündel (R') entspricht vermöge $\mathfrak{C}^{-1}$ eine Fläche II. Grades P, die, gleichviel ob sie allgemein ist oder ausartet, mit Φ einen und nur einen Tangentialkegel gemein hat; keine andere Ebene außer den Berührungsebenen von P schickt eine der ihr durch $\mathfrak{C}$ zugeordneten Ebenen durch R'. Also wird der aus R' an Φ' gehende Tangentialkegel durch die Ebenen gebildet, die den gemeinsamen Berührungsebenen von Φ und P (eindeutig) entsprechen; da diese einen Tangentialkegel von Φ umhüllen, ist er nach dem letzten Satz von No. 2 dieses Paragraphen ein Kegel II. Grades, der Φ in zwei Punkten berührt. Daraus folgt als Antwort auf die ersten beiden der anfangs aufgestellten Fragen:

Die Flächen Φ' und Ψ, in die die Grundkugel $\Phi \equiv \Psi'$ durch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^{-1}$ übergeht, sind Flächen II. Grades und berühren sie je längs eines Kreises. Die Ebenen dieser Kreise seien als die „Hauptebenen“ φ' und ψ bezeichnet.

6. Umgekehrt wird Ψ durch $\mathfrak{C}$ in eine Fläche verwandelt, von der $\Psi' \equiv \Phi$ ein Teil ist; und zwar ist immer eine der Ebenen ε_1' und ε_2', die einer Berührungsebene ε von Ψ entsprechen, Berührungsebene von Φ. Berührt also

ε zugleich Φ und Ψ, so fallen ε_1' und ε_2' in eine Ebene zusammen, die zugleich Φ' und $\Psi' \equiv \Phi$ berühren muß. Das heißt aber:

Den gemeinsamen Berührungsebenen von Ψ und Φ entsprechen in $\mathfrak{E}$ eindeutig diejenigen von Φ und Φ'; infolgedessen ist auch der Hauptebene ψ durch $\mathfrak{E}$ die Hauptebene φ' eindeutig zugeordnet und ebenso jeder in ψ befindlichen Tangente von Φ eine in φ' befindliche.

Nehmen wir daher einen Punkt P von ψ und die beiden durch ihn gehenden und in ψ liegenden Tangenten a, b von Φ, so sind diesen durch $\mathfrak{E}$ eindeutig zwei Tangenten a', b' in φ zugeordnet. Nun sei c eine dritte durch P laufende Tangente; dann entsprechen der Ebene $\alpha \equiv (bc)$ zwei Ebenen α_1', α_2' aus a' und der Ebene $\beta \equiv (ca)$ zwei Ebenen β_1', β_2' aus b'; da aber $c \equiv \overline{\alpha\beta}$, müssen die ihr zugeordneten Tangenten c_1', c_2' je die Schnittlinie einer der Ebenen α_1', α_2' mit einer der Ebenen β_1', β_2' sein und deshalb beide durch den Schnittpunkt P' von a' und b' gehen. Wir haben also den schon früher angedeuteten Fall:

Dreht sich eine Tangente der Grundkugel um einen Punkt der Hauptebene ψ, so bilden die ihr in $\mathfrak{E}$ entsprechenden einen Kegel, dessen Scheitel in der Hauptebene φ' liegt.

Oder:

Ein Ebenenbündel, dessen Scheitel ein Punkt der Hauptebene ψ ist, wird durch $\mathfrak{E}$ wieder in ein solches, aber mit dem Scheitel in φ', übergeführt.

Dasselbe gilt natürlich auch für $\mathfrak{E}^{-1}$ unter Vertauschung von ψ und φ'; mithin erhalten wir *zwischen den Punktfeldern von ψ und φ' eine umkehrbar eindeutige algebraische Zuordnung.*

Sind P und P' zwei in ihr zusammengeordnete Punkte, so gehen die Ebenen, die vermöge $\mathfrak{E}$ den Ebenen aus P entsprechen, sämtlich durch P', und die Ebenen, die vermöge $\mathfrak{E}^{-1}$ den Ebenen aus P' entsprechen, sämtlich durch P. Wenn Q und Q' ein zweites Paar zusammengehöriger Punkte von ψ und φ' sind, so folgt das analoge für die Ebenen, die durch $\overline{PQ}$ und die durch $\overline{P'Q'}$ gehen; wir haben also erstens den Satz:

Ein Ebenenbüschel, dessen Axe in der Hauptebene ψ liegt, wird durch $\mathfrak{E}$ wieder in einen solchen, mit der Axe in φ', übergeführt, und es besteht zwischen den beiden Büscheln eine Korrespondenz [2|2].

Zweitens erkennen wir, daß wir auch *zwischen den Geradenfeldern von ψ und φ' eine umkehrbar eindeutige algebraische Zuordnung haben.* Die beiden Verwandtschaften zwischen den Punktfeldern und zwischen den Geradenfeldern von ψ und φ' stehen offensichtlich in der Beziehung zu einander, daß in ihnen inzidenten Elementen wieder inzidente Elemente entsprechen; daraus folgt:

Durch $\mathfrak{E}$ wird zwischen den Feldern der beiden Hauptebenen ψ und φ' eine Kollineation erzeugt.

§ 2. Konstruktion der Transformation $\mathfrak{E}$.

1. Wir können jetzt an die Beantwortung der dritten im vorigen Paragraphen aufgestellten Frage gehen; und zwar werden wir eine räumliche Kollineation aufweisen, die ebenfalls die durch $\mathfrak{E}$ zwischen den Ebenen der Klassenflächen Φ und Φ' hervorgerufene eindeutige Beziehung erzeugt. Zu diesem Zweck erinnern wir uns, wie wir zu einer Ebene ε die beiden entsprechenden ε_1' und ε_2' gefunden haben: Der zu ε gehörige Tangentialkegel E von Φ ging durch $\mathfrak{E}$ über in einen Tangentialkegel E' von Φ' und dieser schnitt zwei Kreise in Φ ein, deren Ebenen ε_1' und ε_2' waren. E' nun berührt Φ in zwei Punkten, den Durchstoßpunkten der Geraden $\overline{\varepsilon_1' \varepsilon_2'}$ durch Φ, und diese liegen auf dem Hauptkreis (φ') der Grundkugel Φ; also haben wir das folgende Resultat, das allerdings schon im vorletzten Satze des vorigen Paragraphen enthalten ist:

Die beiden Ebenen, die durch $\mathfrak{E}$ irgend einer Ebene zugeordnet sind, schneiden sich stets in einer Geraden der Hauptebene φ'.