Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie

Ludwig, Walther

1904

§ 1. Die Kollineationen, die eine Kugel in sich selbst verwandeln

Erster Abschnitt.

Die einfachsten Punktverwandtschaften, die Kreise in Kreise überführen.

§ I. Die Kollineationen, die eine Kugel in sich selbst verwandeln.

1. Die einfachsten Kreisverwandtschaften der Ebene werden wir aus den einfachsten Kreisverwandtschaften der Kugel erhalten. *Deshalb setzen wir auf einer Kugel Φ eine umkehrbar eindeutige, algebraische Punktverwandtschaft $\mathfrak{P}$ voraus, die jedem Kreis wieder einen Kreis zuordnet*; sie führt die Kreise, die durch zwei feste Punkte gehen, über in die Kreise, die durch die entsprechenden beiden Punkte laufen. Fassen wir die Ebenen der Kreise ins Auge, so erhalten wir durch $\mathfrak{P}$ eine umkehrbar eindeutige Verwandtschaft der Ebenen des Raumes, die jeden Ebenenbüschel wieder in einen Ebenenbüschel überführt, also eine Kollineation; und zwar vertauscht sie die Berührungsebenen von Φ untereinander, da jeder Punkt von Φ als Kreis aufzufassen ist, dessen Ebene die Kugel Φ berührt. Mit dieser Kollineation der Ebenen des Raumes ist eine Kollineation der Punkte des Raumes verbunden, die die Punkte von Φ unter einander vertauscht, und eben diese so erzeugte Verwandtschaft zwischen den Punkten von Φ ist unsere $\mathfrak{P}$. Wir sehen hieraus:

Die umkehrbar eindeutigen Punktverwandtschaften auf einer Kugel, die Kreise in Kreise überführen, werden durch die Kollineationen des Raumes erzeugt, die die Kugel in sich selbst transformieren.

2. Die Kollineationen nun, die eine Fläche II. Grades in sich transformieren, zerfallen bekanntlich[1]) in zwei Arten; durch eine Kollineation der ersten Art wird jede Regelschar der Fläche projektiv auf sich selbst, durch eine Kollineation der zweiten Art projektiv auf die andere Regelschar bezogen; jede Kollineation der ersten Art läßt sich durch eine gerade, jede der zweiten Art durch eine ungerade Anzahl von involutorischen Homologien (Zentralkollineationen) zusammensetzen, bei deren jeder das Homologiezentrum und die Hauptebene in bezug auf die Fläche II. Grades polar sind. Diese Zusammensetzung, auf die es uns hier ankommt, läßt sich unabhängig von den Regelscharen der Fläche, die ja bei unserer Kugel imaginär werden, folgendermaßen ableiten:

Gegeben seien drei Paare entsprechender Punkte A, A'; B, B'; C, C' auf Φ. Dann gibt es zwischen den Feldern der Ebenen $\delta \equiv (ABC)$ und $\delta' \equiv (A'B'C')$ eine Kollineation, die die in ihnen befindlichen Kreise der Kugel so ineinander überführt, daß A und A', B und B', C und C' einander zugeordnet sind; sie ist bestimmt, wenn man zu diesen drei Punktepaaren als viertes noch etwa den Pol der Geraden $\overline{AB}$ i. Bez. auf den in δ gelegenen Kreis und den Pol der Geraden $\overline{A'B'}$ i. Bez. auf den in δ' gelegenen Kreis hinzunimmt. Sind nun in dieser Kollineation X, X' irgend zwei einander entsprechende Punkte und sind ferner D und D' die i. Bez. auf Φ genommenen Pole von δ und δ', so müssen in jeder Kollineation, die Φ so in sich selbst überführt, daß A und A', B und B', C und C' gepaart sind, auch X und X', D und D' Paare entsprechender Punkte sein. Von den unendlich vielen Kollineationen, die durch diese fünf — nicht in allgemeiner Lage befindlichen — Punktepaare be-

[1]) F. Klein, Math. Ann. Bd. 4, S. 412 u. 622. H. G. Zeuthen, Math. Ann. Bd. 18, S. 33 ff. R. Sturm, Math. Ann. Bd. 26, S. 464 ff.

stimmt sind, gibt es zwei, die Φ in sich transformieren; wir erhalten sie, wenn E der eine Schnittpunkt von $\overline{DX}$ mit Φ ist und wenn $\overline{D'X'}$ Φ in E_1' und E_2' schneidet, durch die fünf Punktpaare

$$A, A';\ B, B';\ C, C';\ D, D';\ E, E_1'$$
bezw.
$$A, A';\ B, B';\ C, C';\ D, D';\ E, E_2'$$

und erkennen, daß die eine aus der anderen durch Hinzufügung der involutorischen Homologie entsteht, die D' zum Zentrum und δ' zur Hauptebene hat. Wir finden also:

Sind auf einer Kugel drei Punktepaare gegeben, so gibt es zwei Kollineationen der Kugel in sich, in denen diese Punktepaare Paare entsprechender Punkte sind; jede dieser Kollineationen lässt sich aus der anderen durch Hinzufügung einer involutorischen Homologie ableiten.

3. Diese beiden Kollineationen nun bauen wir in folgender Weise aus involutorischen Homologien auf, deren Zentrum und Hauptebene reell und i. Bez. auf Φ polar sind: Zuerst nehmen wir eine der Homologien, deren Zentren die Scheitel der beiden Kegel des durch Φ und das Ebenenpaar δ, δ' bestimmten Büschels von Flächen II. Grades ist; diese Scheitel sind immer reell, weil Φ keine reellen Geraden trägt. Die Homologie führt δ in δ' und dabei die Punkte A, B, C in drei Punkte A_1, B_1, C_1 des in δ', befindlichen Kreises der Φ über. Zu zweit kommt die Homologie, deren Zentrum der Schnittpunkt der Geraden $\overline{A_1\,B'}$ und $\overline{B_1\,A'}$ ist; in ihr entspricht dem A_1 der B', dem B_1 der A' und dem C_1 ein Punkt C_2 desselben Kreises. Zu dritt nehmen wir die Homologie, deren Zentrum der Schnittpunkt der Geraden $\overline{A'B'}$ und $\overline{C_2C'}$ ist und die deshalb A' und B', sowie C_2 und C' einander zuordnet. Durch die Aufeinanderfolge dieser drei Homologien erhalten wir eine Kollineation der Kugel Φ in sich, bei der A, A'; B, B'; C, C' gepaart sind, also eine der beiden oben gefundenen; die andere folgt aus ihr, wenn wir noch als vierte die involutorische Homologie hinzufügen, die

D' zum Zentrum und δ' zur Hauptebene hat. — Die Anzahl der Homologien kann sich in besonderen Fällen vermindern: Erstens kann schon die erste Homologie A in A', B in B', C in C' überführen, nämlich wenn $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ durch einen Punkt laufen. Zweitens kann es möglich werden, die zweite Homologie so zu wählen, daß sie direkt A_1 mit A', B_1 mit B', C_1 mit C' vertauscht, wenn nämlich $\overline{A_1A'}$, $\overline{B_1B'}$, $\overline{C_1C'}$ durch einen Punkt gehen. — Wir haben hier den bekannten Satz gefunden:

Jede reelle Kollineation, die eine Fläche II. Grades in sich selbst überführt, läßt sich aus höchstens vier reellen involutorischen Homologien zusammensetzen.

§ 2. Die aus der involutorischen Homologie folgenden ebenen Kreisverwandtschaften.

1. Wir projizieren die Kugel Φ aus einem Punkte S auf eine Ebene σ, die wir uns der Einfachheit halber als Polarebene von S i. Bez. auf Φ oder, wenn S auf Φ liegt, als Parallelebene zu der in S berührenden Tangentialebene von Φ denken; in σ nehmen wir den Umriß von Φ zum absoluten Kegelschnitt der Maßgeometrie. Dann folgen aus den kollinearen Punktverwandtschaften der Kugel Φ in σ Punktverwandtschaften, die Kreise in Kreise verwandeln, und zwar lassen sie sich sämtlich aus denen unter ihnen zusammensetzen, die durch die Projektion aus den involutorischen Homologien der Kugel entstehen. Wir wollen uns deshalb nur mit diesen besonders einfachen Kreisverwandtschaften beschäftigen.

Es sei also eine involutorische Homologie gegeben, deren Zentrum C' und deren Hauptebene γ' reell und zu einander polar in bezug auf Φ sind. γ' wird entweder Φ reell schneiden oder nicht; dagegen können wir den Fall, daß γ' die Φ berührt, ausschließen, da er eine Ausartung ist, in der alle außerhalb von γ' befindlichen Punkte dem C' entsprechen. Das Projektionszentrum S ferner kann mit C' identisch sein oder in γ' oder an einer beliebigen Stelle des