

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Theorie des rotierenden Feldes mit Anwendung auf die Bestimmung des Stromdiagrammes der asynchronen Maschinen**

**Bragstad, O. S.**

**1902**

2. Einfluss der Formen der Pol- und Stromkurve auf das erzeugte Drehfeld

[urn:nbn:de:bsz:31-270228](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-270228)

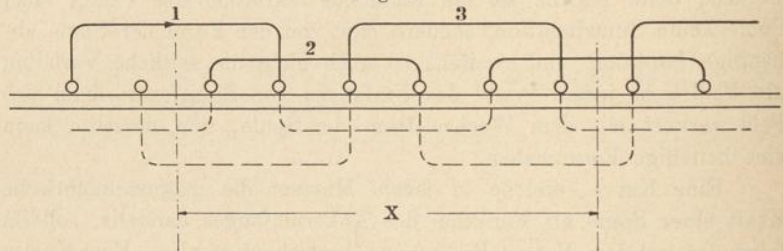
## 2. Einfluss der Formen der Pol- und Stromkurve auf das erzeugte Drehfeld.

Nach dem Fourierschen Satze kann eine beliebige periodische Polkurve als Funktion von dem Ankerumfang  $x$  in der folgenden Reihe entwickelt werden:

$$y_1 = Y_1 \cos \frac{2\pi}{X} (x - \chi_1) + Y_2 \cos 2 \frac{2\pi}{X} (x - \chi_2) + \dots \\ + Y_m \cos m \frac{2\pi}{X} x.$$

Hierbei sind  $Y_1, Y_2$  u. s. w. die für den betrachteten Zeitpunkt geltenden Maximalwerte der einzelnen Harmonischen der Polkurve;  $\chi_1, \chi_2$  u. s. w. sind die räumlichen Verschiebungen der einzelnen Harmonischen in Bezug auf den gewählten Anfangspunkt  $x = 0$ . Um

Fig. 1.



die Schreibweise der Gleichungen zu vereinfachen, wählen wir diesen Anfangspunkt so, dass  $\chi_m = 0$  wird. Ist die Zahl der Phasen gleich  $p$ , so haben wir für je eine Wellenlänge  $X$  auf dem Ankerumfang  $p$  solcher Polkurven, die um die Strecke  $\frac{X}{p}$  gegeneinander verschoben sind, und für jede Polkurve eine Spule, wie Fig. 1 für ein Dreiphasensystem zeigt.

Die Gleichungen der  $p$  Polkurven eines  $p$ -Phasensystems lauten nun:

$$y_1 = \sum Y_{m_1} \cos m \frac{2\pi}{X} x, \\ y_2 = \sum Y_{m_2} \cos m \frac{2\pi}{X} \left( x - \frac{1}{p} X \right), \\ \dots \dots \dots \\ y_p = \sum Y_{m_p} \cos m \frac{2\pi}{X} \left( x - \frac{p-1}{p} X \right).$$

Hierbei ist die Summation auszuführen über  $m$  von 1 bis  $\infty$ .  $Y_{m_1}$ ,  $Y_{m_2}$  u. s. w. sind die in dem betrachteten Momente vorhandenen Maximalwerte der  $m^{\text{ten}}$  Harmonischen der  $p$  Polkurven. Weil die  $p$  Polkurven von  $p$  Wechselströmen, die um  $\frac{2\pi}{p}$  verschoben sind, erzeugt werden, so können wir die Maximalwerte schreiben, indem wir die Gleichungen der  $p$  Wechselströme in Fouriersche Reihen auflösen:

$$\begin{aligned} Y_{m_1} &= C_m i_1 = \Sigma Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} t, \\ Y_{m_2} &= C_m i_2 = \Sigma Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{1}{p} T \right), \\ &\dots \dots \dots \\ Y_{m_p} &= C_m i_p = \Sigma Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{p-1}{p} T \right). \end{aligned}$$

Hierin bedeutet  $Y_{nm}$  die überhaupt vorkommende Amplitude derjenigen Welle des Feldes, welche durch Zusammenwirken der  $m^{\text{ten}}$  Harmonischen der Polkurve mit der  $n^{\text{ten}}$  Harmonischen der Stromkurve entsteht. Der Anfangspunkt der Zeit  $t$  ist so gewählt, dass die  $n^{\text{te}}$  Stromharmonische der Phase 1 zur Zeit Null durch Null geht. Führen wir die Werte von  $Y_{m_1}$ ,  $Y_{m_2}$  u. s. w. aus den letzten Gleichungen in die vorletzten ein, so bekommen wir die Ordinaten der  $p$  Polkurven als Funktion des Umfanges  $x$  und der Zeit  $t$  durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

$$\begin{aligned} y_1 &= \Sigma \Sigma Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{X} x, \\ y_2 &= \Sigma \Sigma Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{1}{p} T \right) \cos m \frac{2\pi}{X} \left( x - \frac{1}{p} X \right), \\ &\dots \dots \dots \\ y_p &= \Sigma \Sigma Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{p-1}{p} T \right) \cos m \frac{2\pi}{X} \left( x - \frac{p-1}{p} X \right). \end{aligned}$$

Die für jede Polkurve auftretende Doppelsumme ist zu bilden einmal nach den Harmonischen der Stromkurve ( $n$ ) und das andere Mal nach den Harmonischen der Polkurve ( $m$ ). Wir betrachten nun diejenigen höheren Wellen der Polkurven, welche durch das Zusammenwirken der  $n^{\text{ten}}$  Harmonischen der Stromkurven mit den  $m^{\text{ten}}$  Harmonischen der Polkurven entstehen. Diese sind:

$$y_{nm_1} = Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{X} x,$$

$$y_{nm_2} = Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{1}{p} T \right) \cos m \frac{2\pi}{X} \left( x - \frac{1}{p} X \right),$$

$$y_{nm_p} = Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{p-1}{p} T \right) \cos m \frac{2\pi}{X} \left( x - \frac{p-1}{p} X \right).$$

Unter Benutzung der früher angegebenen Umformung:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$$

können wir diese Gleichungen schreiben:

$$y_{nm_1} = \frac{1}{2} Y_{nm} \left[ \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} \right) + \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} \right) \right],$$

$$y_{nm_2} = \frac{1}{2} Y_{nm} \left[ \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} - \frac{1}{p} (n+m) \right) + \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} - \frac{1}{p} (n-m) \right) \right],$$

$$y_{nm_p} = \frac{1}{2} Y_{nm} \left[ \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} - \frac{p-1}{p} (n+m) \right) + \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} - \frac{p-1}{p} (n-m) \right) \right].$$

Um die entsprechende Harmonische der resultierenden Feldkurven zu erhalten, haben wir in jedem Punkt des Ankerumfanges diese  $p \cdot n$ ten Harmonischen der  $p$  Polkurven zu addieren. Bezeichnen wir also die Ordinaten dieser  $n \cdot m$ ten Harmonischen der resultierenden Feldkurve mit  $y_{nm}$ , so ist:

$$y_{nm} = y_{nm_1} + y_{nm_2} + \dots + y_{nm_p}.$$

Bei dieser Summation treten die folgenden Spezialfälle auf:

**Fall 1.**  $n + m$  und  $n - m$  seien beide nicht durch  $p$  teilbar; die Division ergebe in beiden Fällen eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 plus einen positiven oder negativen Rest. Der Rest sei bezw. durch  $r_1$  und  $r_2$  bezeichnet. Bilden wir nun in dem Gleichungssystem für  $y_{nm_1}$ ,  $y_{nm_2}$  u. s. w. die Summe der in der ersten Reihe stehenden Sinus, so bekommen wir:

$$\sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} \right) + \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} - \frac{r_1}{p} \right) + \dots$$

$$\dots + \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} - (p-1) \frac{r_1}{p} \right).$$

Wir multiplizieren diese Summe mit

$$\sin 2\pi \frac{r_1}{2p}$$

und schreiben sie:

$$\frac{1}{2} \left[ -\cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} + \frac{r_1}{2p} \right) + \cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} - \frac{r_1}{2p} \right) \right.$$

$$\left. - \cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} - \frac{r_1}{2p} \right) \pm \dots + \cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} - r_1 + \frac{r_1}{2p} \right) \right].$$

Diese Summe ist 0. Ebenso beweist man, dass die Summe der in der zweiten Reihe desselben Gleichungssystems stehenden Sinus gleich 0 wird. Wir bekommen hieraus den folgenden Satz:

In einem  $p$ -Phasensystem erzeugt die  $n^{\text{te}}$  Harmonische des Stromes mit der  $m^{\text{ten}}$  Harmonischen der Polkurve keine  $nm^{\text{te}}$  Harmonische in der resultierenden Feldkurve, wenn  $n+m$  und  $n-m$  beide nicht durch  $p$  teilbar sind.

**Fall 2.**  $n-m$  sei durch  $p$  teilbar, aber nicht  $n+m$ . Wie im Fall 1 ist dann die Summe der in der ersten Reihe stehenden Sinus gleich 0. Die Summe der Sinus in der zweiten Reihe ist aber:

$$p \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} \right).$$

Für diesen Fall ist also:

$$Y_{nm} = \frac{p}{2} Y_{nm} \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} \right).$$

Durch Vergleich mit der in der Einleitung gegebenen Gleichung sehen wir, dass dies ein reines Drehfeld darstellt von der Amplitude  $\frac{p}{2} Y_{nm}$ , der Periode  $\frac{T}{n}$  und von der Wellenlänge  $\frac{X}{m}$ .

Mit Ausnahme des Ein- und Zweiphasensystems ( $p=1$  und  $p=2$ ) kommt immer die erste Harmonische des resultierenden Drehfeldes unter diesen Fall; denn diese Harmonische wird gebildet durch das Zusammenwirken der ersten Harmonischen der Stromkurve mit der ersten Harmonischen der Polkurve, sie wird also erhalten, wenn man  $n=m=1$  setzt, so dass  $\frac{n-m}{p} = 0$  wird, was der obigen Bedingung

entspricht. Die Gleichung für diese Grundwelle des rotierenden Feldes ist somit:

$$y_{11} = \frac{p}{2} Y_{11} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{X} \right).$$

Hieraus finden wir den folgenden Satz:

In einem p-Phasensystem erzeugt die  $n^{\text{te}}$  Harmonische des Stromes mit der  $m^{\text{ten}}$  Harmonischen der Polkurve eine  $nm^{\text{te}}$  Harmonische in der resultierenden Feldkurve, sobald  $n - m$  durch  $p$  teilbar und  $n + m$  nicht durch  $p$  teilbar ist. Die Rotationsrichtung dieser Harmonischen ist dieselbe wie die des Grundfeldes; aber ihre Periodenzahl ist das  $n$ -fache und ihre Polzahl das  $m$ -fache von demjenigen des Grundfeldes.

**Fall 3.**  $n - m$  sei nicht durch  $p$  teilbar, sondern  $n + m$ . Wie im Fall 1 ist die Summe der in der zweiten Reihe der Gleichungen für  $y_{nm1}$ ,  $y_{nm2}$  u. s. w. stehenden Sinus gleich 0. Die Summe der Sinus in der ersten Reihe ist:

$$p \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} \right)$$

und

$$y_{nm} = \frac{p}{2} Y_{nm} \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} \right).$$

Hieraus sieht man, dass diese Harmonischen der resultierenden Feldkurve die umgekehrte Drehrichtung der im zweiten Falle behandelten Harmonischen haben. Diese Wellen bewegen sich also auch in der entgegengesetzten Richtung zu der Grundwelle des Feldes.

In einem p-Phasensystem erzeugt die  $n^{\text{te}}$  Harmonische des Stromes mit der  $m^{\text{ten}}$  Harmonischen der Polkurve eine  $nm^{\text{te}}$  Harmonische in der resultierenden Feldkurve, sobald  $n + m$  durch  $p$  teilbar und  $n - m$  nicht durch  $p$  teilbar ist. Die Rotationsrichtung dieser Harmonischen ist derjenigen des Grundfeldes entgegengesetzt; ihre Periodenzahl ist das  $n$ -fache und ihre Polzahl das  $m$ -fache von demjenigen des Grundfeldes.

**Fall 4.**  $n - m$  und  $n + m$  seien beide durch  $p$  teilbar. Damit dies der Fall sein soll, müssen bei ungerader Phasenzahl  $p$   $n$  und  $m$  für sich durch  $p$  teilbar sein. Für diesen Fall ist

$$y_{nm} = \frac{p}{2} Y_{nm} \left[ \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} \right) + \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} \right) \right].$$

Dies sind zwei harmonische Drehfelder von gleicher Amplitude, Periode und Wellenlänge, die in entgegengesetzter Richtung rotieren. Aus denselben resultiert ein stehendes oder pulsierendes Feld.

In einem p-Phasensystem erzeugt die  $n^{\text{te}}$  Harmonische des Stromes mit der  $m^{\text{ten}}$  Harmonischen der Polkurve zwei gleiche, aber entgegengesetzt rotierende Harmonische in der resultierenden Feldkurve, sobald  $n - m$  und  $n + m$  beide durch  $p$  teilbar sind. Diese beiden Felder sind in der Wirkung gleichwertig mit einem stehenden oder pulsierenden Feld von der doppelten Amplitude.

Beim Ein- und Zweiphasensystem ( $p = 1$  und  $p = 2$ ) ist diese Bedingung für die Grundschwingung des Stromes und der Polkurve erfüllt ( $n = 1$  und  $m = 1$ ). Bei diesen Systemen ist deshalb das Grundfeld ein pulsierendes Feld.

Hier sei noch an die folgende Regel erinnert:

In einem symmetrischen p-Phasensystem ohne neutralen Leiter können  $n^{\text{te}}$  Harmonische, für welche  $n$  durch  $p$  teilbar ist, in der Stromkurve nicht auftreten.

Für gewöhnlich können ferner aus Symmetriegründen weder in den Strom- noch in den Polkurven Harmonische  $n$  und  $m$  auftreten, für welche  $n$  resp.  $m$  durch 2 teilbar ist.

Wir können die Ergebnisse wie folgt zusammenfassen, indem wir die erste Harmonische der resultierenden Feldkurve als rechtsrotierend annehmen:

In einem p-Phasensystem entsteht

|                         |      |                                     |            |
|-------------------------|------|-------------------------------------|------------|
| kein Feld,              | wenn | $\frac{n+m}{p}$ und $\frac{n-m}{p}$ | unteilbar, |
| rechtsrotierendes Feld, | "    | $\frac{n-m}{p}$                     | teilbar,   |
| linksrotierendes Feld,  | "    | $\frac{n+m}{p}$                     | teilbar,   |
| pulsierendes Feld,      | "    | $\frac{n+m}{p}$ und $\frac{n-m}{p}$ | teilbar.   |

Hierin sind die vier möglichen Fälle enthalten.

Wir erkennen nun, dass ein Drehfeld, wie es in der Praxis vorkommt, aus einem sinusartigen Grundfeld mit einer unendlichen Anzahl von harmonischen Sinusfeldern höherer Ordnung besteht. Die Polzahlen dieser Felder sind 1-, 3-, 5- ...  $m$ -mal der Polzahl des Grundfeldes, und die Periodenzahlen derselben sind 1-, 3-, 5- ...  $n$ -mal

der Periodenzahl des Grundfeldes. Die hieraus sich ergebenden verschiedenen Rotationsgeschwindigkeiten der einzelnen Harmonischen können positiv, negativ oder Null sein; im letzteren Falle hat man stehende oder pulsierende höhere Harmonische.

Diese Vorstellung, die auf den ersten Blick als eine Komplikation erscheint, wird uns, wie später gezeigt werden soll, zu einem besseren Verständnis der Vorgänge in den asynchronen Maschinen verhelfen.

Betrachten wir nun von diesem Gesichtspunkte aus die gewöhnlichsten Mehrphasensysteme, indem wir mit dem Einphasensystem anfangen.

#### Einphasensystem, $p = 1$ .

Bei diesem System sind immer  $n + m$  und  $n - m$  durch  $p$  teilbar. In demselben können demnach alle höheren Harmonischen in der resultierenden Feldkurve auftreten, und zwar geben dieselben alle stehende und pulsierende Felder. Die Regel, dass durch  $p$  teilbare höhere Harmonische der Stromkurve nicht ohne Neutralleitung auftreten können, ergibt, dass in einem Einphasensystem ohne Neutralleitung keine Harmonische, also überhaupt kein Strom, auftreten kann. Ein solches System wäre deshalb undenkbar. Bei dem gewöhnlichen Einphasensystem muss man sich deswegen den einen Aussenleiter von dem einen Endpunkte der Phase als die „neutrale“ Leitung vorstellen. In einem solchen System können auch gerade Harmonische in der Stromkurve auftreten und ebenfalls pulsierende Felder erzeugen.

#### Zweiphasensystem, $p = 2$ .

$n + m$  und  $n - m$  ( $m$  ungerade) sind entweder beide durch 2 teilbar oder beide durch 2 unteilbar. Die Harmonischen der Stromkurve erzeugen also entweder pulsierende oder gar keine Harmonischen im resultierenden Feld; die pulsierenden Feldharmonischen werden von den ungeraden Stromharmonischen erzeugt, während die geraden Stromharmonischen kein Feld hervorbringen. Die letzteren Stromharmonischen können nur bei Vorhandensein eines neutralen Leiters auftreten.

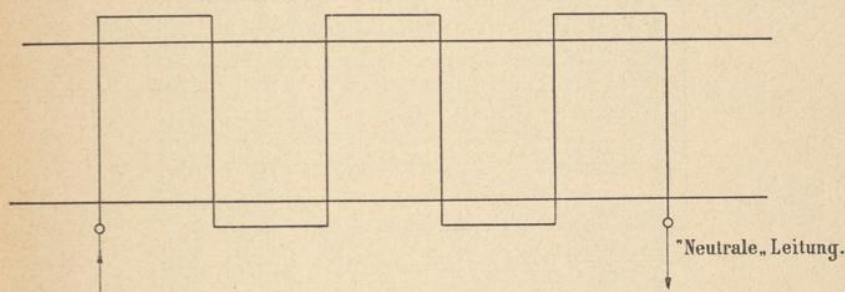
Der Unterschied zwischen einer einphasigen und einer zweiphasigen Wicklung geht deutlich aus den Fig. 2 und 3 hervor. In Fig. 3 ist Phase 1 voll und Phase 2 punktiert gezeichnet.

#### Dreiphasensystem, $p = 3$ .

Die Verhältnisse bei diesem System sind in der nachstehenden Tabelle schematisch dargestellt. In der Horizontalreihe stehen die

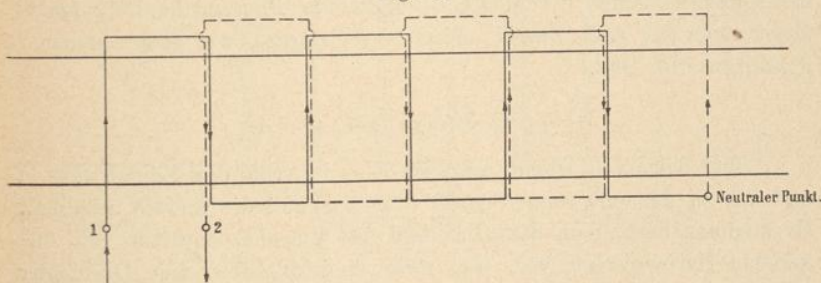
Perioden- und Schwingungszahlen der einzelnen Stromharmonischen und in der Vertikalreihe die Wellenlängen und die Polzahlen der Harmonischen der Polkurven. Die entstehenden Harmonischen des resultierenden Feldes sind durch Kreise und ihre Rotationsrichtung durch Pfeile angedeutet. Doppelfelder oder pulsierende Felder werden

Fig. 2.



nur von den durch 3 teilbaren höheren Harmonischen des Stromes und der Polkurve erzeugt. Ohne Neutralleitung können diese Felder deswegen im Dreiphasensystem nicht vorkommen. Schliesst man noch die geraden Harmonischen aus, so treten nur Drehfelder von 1-, 5-, 7-, 11-, 13-, 17- u. s. w. -facher Periodenzahl und 1-, 5-, 7-, 11-, 13-,

Fig. 3.



17- u. s. w. -facher Polzahl auf. Die Drehrichtung dieser Felder ist abwechselnd nach rechts und nach links. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines  $n$  m<sup>ten</sup> Feldes im Verhältnis zum Hauptfeld ist  $\frac{n}{m}$ ; sie ist also gleich derjenigen des Hauptfeldes für  $n = m$ , und grösser oder kleiner als diejenige des Hauptfeldes, je nachdem  $n$  grösser oder kleiner als  $m$  ist.

Uebersicht über die Harmonischen in dem Drehfelde eines Dreiphasensystems.

| Periode.                         | T  | $\frac{T}{2}$ | $\frac{T}{3}$ | $\frac{T}{4}$ | $\frac{T}{5}$ | $\frac{T}{6}$ | $\frac{T}{7}$ | $\frac{T}{8}$ | $\frac{T}{9}$ | $\frac{T}{10}$ | $\frac{T}{11}$ | $\frac{T}{12}$ | $\frac{T}{13}$ |
|----------------------------------|----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Wellenlänge. $\frac{\lambda}{n}$ | 1  | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             | 7             | 8             | 9             | 10             | 11             | 12             | 13             |
| $\frac{\lambda}{1}$              | 1  | ○             | ○             |               | ○             | ○             |               | ○             | ○             |                | ○              | ○              | ○              |
| $\frac{\lambda}{3}$              | 3  |               |               | ○             |               | ○             |               |               | ○             |                |                | ○              |                |
| $\frac{\lambda}{5}$              | 5  | ○             | ○             |               | ○             | ○             |               | ○             | ○             |                | ○              | ○              | ○              |
| $\frac{\lambda}{7}$              | 7  | ○             | ○             |               | ○             | ○             |               | ○             | ○             |                | ○              | ○              | ○              |
| $\frac{\lambda}{9}$              | 9  |               |               | ○             |               | ○             |               |               | ○             |                |                | ○              |                |
| $\frac{\lambda}{11}$             | 11 | ○             | ○             |               | ○             | ○             |               | ○             | ○             |                | ○              | ○              | ○              |
| $\frac{\lambda}{13}$             | 13 | ○             | ○             |               | ○             | ○             |               | ○             | ○             |                | ○              | ○              | ○              |
| $\frac{\lambda}{15}$             | 15 |               |               | ○             |               | ○             |               |               | ○             |                |                | ○              |                |
| $\frac{\lambda}{17}$             | 17 | ○             | ○             |               | ○             | ○             |               | ○             | ○             |                | ○              | ○              | ○              |
| $\frac{\lambda}{19}$             | 19 | ○             | ○             |               | ○             | ○             |               | ○             | ○             |                | ○              | ○              | ○              |
| $\frac{\lambda}{21}$             | 21 |               |               | ○             |               | ○             |               |               | ○             |                |                | ○              |                |
| $\frac{\lambda}{23}$             | 23 | ○             | ○             |               | ○             | ○             |               | ○             | ○             |                | ○              | ○              | ○              |

Bei dem Dreiphasensystem fallen verhältnismässig viele von den höheren Harmonischen der resultierenden Feldkurve weg, nämlich zunächst die geraden und dann die durch 3 teilbaren. Diese Eigenschaft, welche dem Dreiphasensystem zukommt, weil es unter den Mehrphasensystemen die niedrigste ungerade Phasenzahl hat, macht dies System für viele Zwecke besonders geeignet, wie später genauer gezeigt werden soll.

Vierphasensystem,  $p = 4$ .

Sind sowohl  $n$  wie  $m$  ungerade, so ist von den Zahlen  $n + m$  und  $n - m$  die eine immer durch 4 teilbar und die andere unteilbar. Es kommen deshalb in dem Drehfeld des Vierphasensystems alle ungeraden Harmonischen vor, und zwar sind dieselben alle Drehfelder mit Drehungssinn abwechselnd positiv und negativ. Gerade Harmonische der Stromkurve mit ungeraden Harmonischen der Polkurve erzeugen keine Harmonische in der resultierenden Feldkurve.

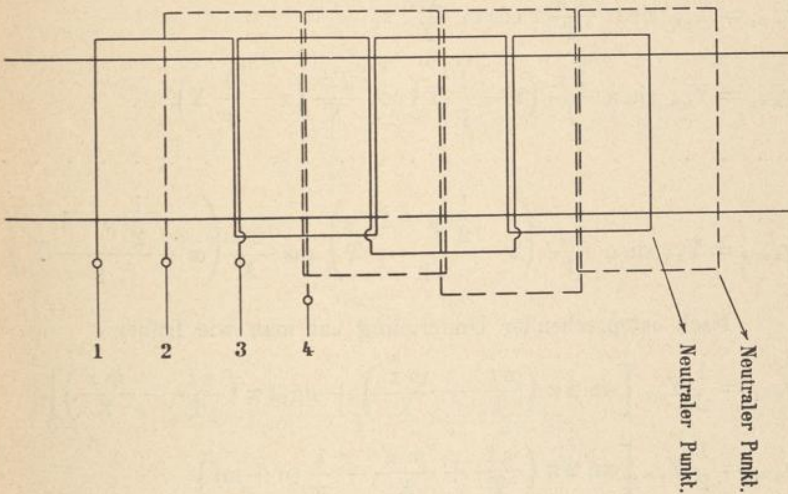
Für die Ableitung der Bedingungsgleichung am Anfang dieses Abschnittes haben wir festgesetzt, dass die räumliche Verschiebung der Spulen in einem  $p$ -Phasensystem gleich  $\frac{2\pi}{p}$  sein soll. In einem Vierphasensystem muss dieselbe also  $90^\circ$  betragen. Bezeichnen wir

Uebersicht über die Harmonischen in dem Drehfelde eines symmetrischen Vierphasensystems.

| Periode.       | T              | $\frac{T}{2}$ | $\frac{T}{3}$ | $\frac{T}{4}$ | $\frac{T}{5}$ | $\frac{T}{6}$ | $\frac{T}{7}$ | $\frac{T}{8}$ | $\frac{T}{9}$ | $\frac{T}{10}$ | $\frac{T}{11}$ | $\frac{T}{12}$ | $\frac{T}{13}$ |    |
|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----|
| Wellenlänge    | $\frac{T}{n}$  | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             | 7             | 8             | 9              | 10             | 11             | 12             | 13 |
| X              | $\frac{T}{1}$  | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○              |                | ○              |                | ○  |
| $\frac{X}{3}$  | $\frac{T}{3}$  | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○              |                | ○              |                | ○  |
| $\frac{X}{5}$  | $\frac{T}{5}$  | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○              |                | ○              |                | ○  |
| $\frac{X}{7}$  | $\frac{T}{7}$  | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○              |                | ○              |                | ○  |
| $\frac{X}{9}$  | $\frac{T}{9}$  | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○              |                | ○              |                | ○  |
| $\frac{X}{11}$ | $\frac{T}{11}$ | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○              |                | ○              |                | ○  |
| $\frac{X}{13}$ | $\frac{T}{13}$ | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○              |                | ○              |                | ○  |
| $\frac{X}{15}$ | $\frac{T}{15}$ | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○              |                | ○              |                | ○  |
| $\frac{X}{17}$ | $\frac{T}{17}$ | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○              |                | ○              |                | ○  |
| $\frac{X}{19}$ | $\frac{T}{19}$ | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○              |                | ○              |                | ○  |
| $\frac{X}{21}$ | $\frac{T}{21}$ | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○              |                | ○              |                | ○  |
| $\frac{X}{23}$ | $\frac{T}{23}$ | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○             |               | ○              |                | ○              |                | ○  |

die vier Phasen der Reihe nach mit 1, 2, 3 und 4, so ist die Verschiebung zwischen 1 und 3  $180^\circ$ , ebenso diejenige zwischen 2 und 4.

Fig. 4.



Wir bekommen somit das in Fig. 4 dargestellte abgewickelte Wicklungsschema. Dasselbe ist für eine vierpolige Anordnung gezeichnet.

Bei den Mehrphasensystemen mit einer geraden Anzahl von Phasen  $p$  kann oft eine Modifikation eintreten, welche darin besteht, dass die Phasenzahl von  $p$  zu  $\frac{p}{2}$  reduziert wird, während die räumliche Anordnung der Spulen der verbleibenden  $\frac{p}{2}$  Phasen bestehen bleibt, so dass die Verschiebung derselben nach wie vor  $\frac{2\pi}{p}$  beträgt.

Ein derartiges System tritt z. B. auf, wenn man in einem Vierphasensystem, wie es in Fig. 4 dargestellt ist, die zu Phase 1 und 2 jeweils um  $180^\circ$  verschobenen Phasen 3 und 4 wegnimmt, während die in Fig. 4 markierten Neutralpunkte verbunden oder getrennt bleiben. Im ersteren Falle bekommt man das in der Praxis gebräuchliche sogenannte „verkettete Zweiphasensystem“, im letzteren Falle dagegen das „unverkettete Zweiphasensystem“.

Bei einem solchen System bekommen wir die  $n$  m<sup>ten</sup> Harmonischen der  $\frac{p}{2}$ , um  $\frac{2\pi}{p}$  verschobenen Polkurven als Funktion von Zeit und Raum ähnlich, wie früher, durch die folgenden  $\frac{p}{2}$  Gleichungen ausgedrückt.

$$y_{nm_1} = Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{X} x,$$

$$y_{nm_2} = Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{1}{p} T \right) \cos \frac{2\pi}{X} \left( x - \frac{1}{p} X \right),$$

.....

$$y_{nm \frac{p}{2}} = Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{\frac{1}{2} p - 1}{p} T \right) \cos \frac{2\pi}{X} \left( x - \frac{\frac{1}{2} p - 1}{p} X \right).$$

Nach entsprechender Umformung hat man wie früher

$$y_{nm_1} = \frac{1}{2} Y_{nm} \left[ \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} \right) + \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} \right) \right],$$

$$y_{nm_2} = \frac{1}{2} Y_{nm} \left[ \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} - \frac{1}{p} (n+m) \right) + \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} - \frac{1}{p} (n-m) \right) \right],$$

$$y_{nm \frac{p}{2}} = \frac{1}{2} Y_{nm} \left[ \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} - \frac{\frac{1}{2}p-1}{p} (n+m) \right) + \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} - \frac{\frac{1}{2}p-1}{p} (n-m) \right) \right].$$

Die Ordinate der entsprechenden Harmonischen in der resultierenden Feldkurve ist:

$$y_{nm} = y_{nm_1} + y_{nm_2} + \dots + y_{nm \frac{p}{2}}.$$

**Fall 1.**  $n+m$  und  $n-m$  seien beide durch  $p$  nicht teilbar. Der Rest sei bezw.  $r_1$  und  $r_2$ . Die Summe ist dann:

$$\begin{aligned} y_{nm} = \frac{1}{2} Y_{nm} & \left\{ \frac{1}{2 \sin 2\pi \frac{r_1}{2p}} \left[ -\cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} + \frac{r_1}{2p} \right) \right. \right. \\ & + \cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} - \frac{r_1}{2p} \right) - \cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} - \frac{r_1}{2p} \right) \\ & + \dots + \cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} - \frac{r_1}{2} + \frac{r_1}{2p} \right) \Big] \\ & + \frac{1}{2 \sin 2\pi \frac{r_1}{2p}} \left[ -\cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} + \frac{r_2}{2p} \right) \right. \\ & + \cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} - \frac{r_2}{2p} \right) \\ & - \cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} - \frac{r_2}{2p} \right) + \dots \\ & \left. \left. + \cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} - \frac{r_2}{2} + \frac{r_2}{2p} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Hier treten die folgenden Unterfälle auf:

**Fall 1a.** Die Reste  $r_1$  und  $r_2$  seien beide durch 2 teilbar. Die ganze Summe ist Null.

**Fall 1b.**  $r_1$  teilbar durch 2,  $r_2$  unteilbar durch 2.

$$y_{nm} = -\frac{1}{2} Y_{nm} \frac{1}{\sin 2\pi \frac{r_2}{2p}} \cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} + \frac{r_2}{2p} \right).$$

Also ein Drehfeld in der Richtung des Hauptfeldes.

**Fall 1c.**  $r_1$  unteilbar durch 2,  $r_2$  teilbar durch 2.

$$y_{nm} = -\frac{1}{2} Y_{nm} \frac{1}{\sin 2\pi \frac{r_1}{2p}} \cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} + \frac{r_1}{2p} \right).$$

Das bedeutet ein Drehfeld in entgegengesetzter Richtung des Hauptfeldes.

**Fall 1d.**  $r_1$  und  $r_2$  unteilbar durch 2.

$$y_{nm} = -\frac{1}{2} Y_{nm} \left[ \frac{1}{\sin 2\pi \frac{r_1}{2p}} \cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} + \frac{r_1}{2p} \right) + \frac{1}{\sin 2\pi \frac{r_2}{2p}} \cos 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} + \frac{r_2}{2p} \right) \right].$$

Das bedeutet nach dem Vorherigen zwei in entgegengesetzter Richtung mit gleicher Geschwindigkeit rotierende Felder. Sie können zu einem pulsierenden Feld von einer Amplitude gleich der Summe der Amplituden der beiden Drehfelder zusammengefasst werden. Also von der Amplitude

$$-\frac{1}{2} Y_{nm} \left[ \frac{1}{\sin 2\pi \frac{r_1}{2p}} + \frac{1}{\sin 2\pi \frac{r_2}{2p}} \right].$$

**Fall 2.**  $n - m$  sei durch  $p$  teilbar, aber nicht  $n + m$ . Wir haben dann wie unter Fall 2 in dem vorhergehenden Abschnitt unter Berücksichtigung, dass nur  $\frac{p}{2}$  Phasen vorhanden sind,

$$y_{nm} = \frac{p}{4} Y_{nm} \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} \right).$$

Die zweite Summe verschwindet aber hier nicht immer; sondern sie ist nach einem der Unterfälle im Hauptfalle 1 zu behandeln.

Fall 3.  $n + m$  sei durch  $p$  teilbar, aber nicht  $n - m$ .

$$y_{nm} = \frac{p}{4} Y_m \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} \right).$$

Die zweite Summe wird erhalten je nach der Grösse des Restes  $r_2$  nach einem der unter Fall 1 behandelten Unterfälle.

Fall 4.  $n + m$  und  $n - m$  seien beide durch  $p$  teilbar; man bekommt das Doppelfeld:

$$y_{nm} = \frac{p}{4} Y_{nm} \left[ \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} \right) + \sin 2\pi \left( \frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} \right) \right].$$

Beispielsweise ist in dem beistehenden Schema eine Zusammenstellung der möglichen Harmonischen in dem Drehfelde eines unsymmetrischen, halbierten Vierphasensystems, also für  $p = 4$ , gegeben.

Uebersicht über die Harmonischen in dem Drehfelde eines unsymmetrischen, halbierten Vierphasensystems (Zwei-phasensystem).

| Periode.       | T             | $\frac{T}{2}$ | $\frac{T}{3}$ | $\frac{T}{4}$ | $\frac{T}{5}$ | $\frac{T}{6}$ | $\frac{T}{7}$ | $\frac{T}{8}$ | $\frac{T}{9}$ | $\frac{T}{10}$ | $\frac{T}{11}$ | $\frac{T}{12}$ | $\frac{T}{13}$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Wellenlänge.   | $\frac{X}{1}$ | $\frac{X}{2}$ | $\frac{X}{3}$ | $\frac{X}{4}$ | $\frac{X}{5}$ | $\frac{X}{6}$ | $\frac{X}{7}$ | $\frac{X}{8}$ | $\frac{X}{9}$ | $\frac{X}{10}$ | $\frac{X}{11}$ | $\frac{X}{12}$ | $\frac{X}{13}$ |
| X              | 1             | ○             | ○             | ○             | ○             | ○             | ○             | ○             | ○             | ○              | ○              | ○              | ○              |
| $\frac{X}{3}$  | 3             | ○             | ○             | ○             | ○             | ○             | ○             |               |               |                |                |                |                |
| $\frac{X}{5}$  | 5             | ○             | ○             | ○             | ○             | ○             | ○             |               |               |                |                |                |                |
| $\frac{X}{7}$  | 7             | ○             | ○             | ○             | ○             | ○             | ○             |               |               |                |                |                |                |
| $\frac{X}{9}$  | 9             | ○             | ○             | ○             | ○             | ○             | ○             |               |               |                |                |                |                |
| $\frac{X}{11}$ | 11            | ○             | ○             | ○             | ○             |               |               |               |               |                |                |                |                |
| $\frac{X}{13}$ | 13            | ○             |               |               |               |               |               |               |               |                |                |                |                |
| $\frac{X}{15}$ | 15            | ○             |               |               |               |               |               |               |               |                |                |                |                |
| $\frac{X}{17}$ | 17            | ○             |               |               |               |               |               |               |               |                |                |                |                |
| $\frac{X}{19}$ | 19            | ○             |               |               |               |               |               |               |               |                |                |                |                |
| $\frac{X}{21}$ | 21            | ○             |               |               |               |               |               |               |               |                |                |                |                |
| $\frac{X}{23}$ | 23            | ○             |               |               |               |               |               |               |               |                |                |                |                |

Nehmen wir z. B. die Grundschwingung von Feld und Strom, so ist  $n = m = 1$  zu setzen.  $n - m = 0$ , also durch 4 teilbar, ergibt ein rechtsdrehendes Feld nach Fall 2:

$$y_{11} = Y_{11} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{X} \right).$$

Die Amplitude der Grundharmonischen des resultierenden Drehfeldes ist somit gleich der Amplitude der betreffenden Harmonischen

in der Polkurve.  $n + m$  ist hier durch 2 teilbar, wodurch dies Glied verschwindet nach Fall 1 b.

Man findet für dies System immer, wenn  $n$  und  $m$  ungerade sind, dass von den Zahlen  $n + m$  und  $n - m$  die eine durch 4 teilbar ist, und dass die andere bei der Division einen Rest gibt, der durch 2 teilbar ist. Somit erhalten wir immer ein rotierendes Feld, während das zweite Glied nach Fall 1 b oder 1 c verschwindet. Hieraus ergeben sich die abwechselnd nach rechts und links rotierenden Felder in der schematischen Zusammenstellung.

Für alle diese Felder gilt, dass die Amplitude einer Harmonischen in der resultierenden Feldkurve gleich der Amplitude der entsprechenden Harmonischen in der Polkurve ist.

Betrachten wir zweitens die geraden Stromharmonischen, z. B.  $n = 2$  und  $m = 1$ .  $n + m$  und  $n - m$  geben bei der Division die Reste  $r_1 = 3$  und  $r_2 = 1$ , welche beide nicht durch 2 teilbar sind. Wir haben also den Fall 1 d.

$$\sin 2\pi \frac{r_1}{2p} = \sin 2\pi \frac{3}{8} = + \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

$$\sin 2\pi \frac{r_2}{2p} = \sin 2\pi \frac{1}{8} = + \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Hieraus ergeben sich die beiden gegeneinander rotierenden Felder

$$- \frac{1}{2} \sqrt{2} Y_{nm} \cos 2\pi \left( \frac{2t}{T} + \frac{x}{X} + \frac{3}{8} \right)$$

und

$$- \frac{1}{2} \sqrt{2} Y_{nm} \cos 2\pi \left( \frac{2t}{T} - \frac{x}{X} + \frac{1}{8} \right),$$

welche ersetzt werden können durch ein pulsierendes Feld mit der Amplitude

$$\sqrt{2} Y_{nm}.$$

Dies Feld kann man sich wieder ersetzt denken durch zwei räumlich um  $90^\circ$  verschobene pulsierende Felder, welche zeitlich in Phase sind. Die Amplitude dieser pulsierenden Felder ist  $Y_m$ . Das ist also die entsprechende Harmonische der Polkurven.

Für die höheren geraden Harmonischen bekommt man analog dem Falle  $n = 2$  pulsierende Felder, deren Amplituden im Verhältnis zu denjenigen der entsprechenden Harmonischen der Polkurve dieselben bleiben wie in dem eben betrachteten Falle  $n = 2$ .

Wir können uns nun den Vorgang im Drehfelde eines unsymmetrischen halbierten Vierphasensystems wie folgt klar machen: Jede Polkurve enthält eine unendliche Reihe von ungeraden Harmonischen m, deren Grössen im wesentlichen durch die Art der Wicklung bestimmt sind, und welche jeweils mit den entsprechenden Harmonischen der benachbarten Polkurve räumlich um  $90^\circ$  verschoben sind. Werden die Pole mittelst eines Zweiphasenstromes erregt, so bringen die ungeraden Harmonischen desselben, welche zeitlich um  $90^\circ$  verschoben sind, die einzelnen Harmonischen der Polkurven zur Rotation, dabei ändern sich ihre Amplituden nicht; die Drehrichtungen und Drehgeschwindigkeiten sind für die verschiedenen Harmonischen verschieden. für die  $nm^{\text{te}}$  Harmonische ist die Drehgeschwindigkeit  $\frac{n}{m}$  mal derjenigen des Grundfeldes. Die geraden Stromharmonischen sind gleichphasig und wirken daher gleichzeitig auf die Harmonischen aller Polkurven. Hieraus ergeben sich die pulsierenden um  $90^\circ$  verschobenen Felder, wie erläutert.

Ein Unterschied dieses Systems gegenüber dem früher behandelten symmetrischen Vierphasensystem in Bezug auf die Beschaffenheit des Feldes besteht nur darin, dass hier die geraden Stromharmonischen zur Wirkung kommen können. Eine Zwangsläufigkeit zwischen den ungeraden Harmonischen wie beim Dreiphasensystem, welche dort bewirkt, dass dreifache Harmonische nicht auftreten können, besteht bei diesen Systemen nicht.

## II. Einfluss der Formen des Drehfeldes auf den Gang der asynchronen Maschinen.

### 1. Wicklungsfaktoren von Phasenankern.

Durch die im vorhergehenden eingeführte Betrachtungsweise haben wir einen Ausgangspunkt erhalten, von dem aus wir die Vorgänge in einem noch so komplizierten Drehfelde eines beliebigen Mehrphasensystems einheitlich betrachten und rechnerisch verfolgen können; wir haben nämlich im wesentlichen nur die Rechnungen für ein Sinusfeld durchzuführen, und diese lassen sich dann mit den Modifikationen, die durch die verschiedenen Pol- und Periodenzahlen entstehen, auch auf sämtliche höhere Harmonische des Feldes anwenden.

Wir betrachten nun zunächst den Fall, dass die sekundäre Wicklung der Maschine offen ist. Die Polkurve kann eine beliebige Zahl