Allgemeine Maschinenlehre

Redtenbacher, Ferdinand

[s.l.], [ca. 1842]

urn:nbn:de:bsz:31-282889

Allgemeine Maschinenlehre

[Ferdinand]
vorgetragen von Prof. Redtenbacher
im Schuljahr $18\frac{41}{42}$.

[Casimir]
Lasler

Einleitung.

Die Maschinen dienen im allgemeinen dazu, mit Körpern eine Ortsveränderung vorzunehmen, oder an ihnen eine Formveränderung zu bewerkstelligen. Hierauf lassen sich alle Verrichtungen der Maschinen zurückführen.

Es kommt bei der Anwendung von Maschinen immer dreierlei in Betracht.

1.) der Motor (z.B. Wasser, Dampf, Pferde, etc.)

2.) der Stoff, mit dem entweder eine Ortsveränderung oder eine Formveränderung vorgenommen werden soll.

3.) die Maschine, die die Thätigkeit hervorbringt.

An der Maschine selbst unterscheiden wir folgende Haupttheile:

1.) der Receptor, auf den der Motor unmittelbar einwirkt.

2. das Werkzeug, das unmittelbar mit dem Stoff in Verbindung steht, z.B. der Mühlstein; der Kolben von der Pumpe etc.

3.) der Mechanismus, der den Receptor mit dem Werkzeug in Verbindung setzt.

Gegeben ist nur der Motor, der Stoff u. was daraus werden soll.
Gesucht der Mechanismus.

Als wichtigste Grundlagen der Maschinenlehre können wir das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten u. das der Erhaltung der lebendigen Kräfte nennen.

Ein Inbegriff von Punkten, welche in einer wechselseitigen Beziehung zu einander stehen, nennt man ein System von Punkten.

Betrifft diese Beziehung blos das beharrliche Nebeneinandersein der Pkte, so ist es ein <u>geometr. System</u>, wie z.B. bei den Linien u. Flächen.

Wenn die Punkte in einem solchen Zusammenhange stehen, daß, wenn wir einen derselben veranlassen, eine gewisse Bewegung zu machen, auch alle übrigen Punkte auf eine gewisse Weise in Bewegung geraten, so geben diese Punkte ein <u>geometr. mechanisches System.</u>

Bei einer Maschine ist der geometr. mechanische Zusammenhang aller Bestandtheile von der Art, daß die Bahnen, welche die einzelnen Punkte beschreiben, <u>geschlossene</u>

Linien sind u. ihre Gestalt von den auf die Maschine wirkenden Kräften ganz unabhängig sind

Die Ausmittlung dieser Linien ist nur eine geometr. Aufgabe.

Sind f. u. F die Punkte, welche zwei Theile einer Masch. beschreiben, a u. A die Orte, an w. sich die beiden Theile in einem gewissen Augenblicke befinden; b u. B die Orte, wo w. sich dieselben Punkte in einem andern Augenblick befinden u. bezeichnen wir ab mit s, u. AB mit S, ferner mit a, b, c, d,, die constanten Abmessungen der Maschtheile, so ist

$$S = f(s, a, b, c, d \ldots)$$

differentiren wir diese Gleichg:

$$d.S = \frac{d.f(s, a, b, c, d \ldots)}{ds}\, ds$$

dividiren wir diese Gl. durch dt, d. h. das Differential der Zeit, in welcher die Wege s u. S zurückgelegt worden sind, so erhalten wir:

$$\frac{d.S}{dt} = \frac{d.f(s, a, b, c, d \ldots)}{ds}\,\frac{ds}{dt}$$

bezeichnen wir nun durch V u. v die Geschw., mit w. die Wege AB u. ab zurückgelegt worden sind, so ist $V = \frac{dS}{dt}$ u. $v = \frac{ds}{dt}$

$$V = v\,\frac{d.\,f(s,a,b,c\ldots)}{ds}$$

u. wir setzen $\frac{d.\,f(s,a,b,c\ldots)}{ds} = F(s,a,b\ldots)$

so ist $V = v\,F(s,a,b,c\ldots)$

$$\frac{V}{v} = \frac{dS}{ds} = F(s,a,b,c\ldots)$$

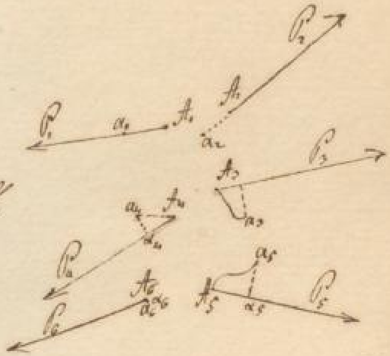
Hieraus ersieht man, daß das Verhältniß zweier der gleichzeitigen Geschwindigkeit zweier Punkte blos abhängig ist von den constanten Abmessungen der Maschine u. von einer veränderlichen Größe, durch welche der Ort eines bestimmten Punktes der Maschine u. seine Lage angegeben wird.

Das Princip der virt. Geschwindigkeit.

Damit die Kräfte, welche auf ein System von Punkten wirken, sich das Gleichgewicht halten, müssen zwischen den Intensitäten ihrer Richtungen und den Bestimmungselementen ihres geometr. Zusammenhanges gewisse Bedingungen Statt finden, welche bekanntlich vermittels des Princ. der v. Geschw. aufgefunden werden können.

Es seien $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \ldots$ die Angriffspunkte der Kräfte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, die sich das Gleichgewicht halten. Wenn verschiebt man das System um unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtsposition oder

Störung des Zusammenhanges. Man projicirt die Wege A_1a_1, A_2a_2 ..., welche die Angriffsp. wirklich zurück gelegt haben, auf die Richtungen der Kräfte; multiplicirt die Kräfte mit jenen Projectionen A_1a_1, $A_2\alpha_2$, $A_3\alpha_3$ etc u. vereinigt diese Producte zu einer algebr. Summe, indem man die Glieder mit dem Zeichen (+) versieht, welche sich auf Kräfte beziehen, deren Angriffspunkte vorwärts geschritten sind, u. das Zeichen (−) den übrigen Gliedern gibt. Diese Summe = 0 gesetzt, liefert eine Gl., aus welcher jederzeit die Bedingungen des Gleichgewichts entwickelt werden können.



Ist das System von Punkten eine Maschine, so kann nur ein Punkt willkürlich verschoben werden, die Verschiebungen der übrigen Punkte hängen von der Versch. dieses einen ab. Bezeichnen wir durch Sp_1 die Projection des Weges, welchen der Angriffsp. der Kraft P_1 zurückgelegt hat; Sp_2 Sp_3, Sp_4 etc die Proj. ihrer Punkte, so müssen Gleichungen von folgender Form bestimmt werden:

6

$$Sp_2 = a\, Sp_1$$
$$Sp_3 = b\, Sp_1$$
$$Sp_4 = c\, Sp_1$$
$$Sp_5 = d\, Sp_1$$
$$Sp_6 = f\, Sp_1$$

wobei die Größen a, b, c, etc. von den wechselnden Anordnungen der Maschine des Systems u. von dem Ort abhängen, in welchem sich der Angriffsp. von P_1 befindet u. die Bedingung des Gleichgewichts

$$P_1 Sp_1 + P_2 Sp_2 + P_3 Sp_3 + P_4 Sp_4 + \ldots = 0$$

wird in diesem Falle sein:

$$Sp_1 (P_1 + a P_2 + b P_3 + c P_4 + \ldots) = 0$$

Da nun Sp_1 nach der Voraussetzung nicht $= 0$ ist, so bekommen wir:

$$P_1 + a P_2 + b P_3 + c P_4 + \ldots = 0.$$

Wenn das System von Punkten keine Maschine ist, sondern ein beliebiges geometr. System, so würden einige von den Größen $Sp_1\, Sp_2\, Sp_3$ etc willkürlich genommen werden können, u. die übrigen müßten dann von diesen letztern abhängen.

Nehmen wir an ihr Zusammenhang habe es gestattet $Sp_1\, Sp_2\, Sp_3$ willkürlich anzunehmen, so werden die übrigen Größen /

$\delta p_4, \delta p_5, \delta p_6$ Funktionen sein von den ersteren u. gewissen Größen a, b, c . also

$$\delta p_4 = a\,\delta p_1 + b\,\delta p_2 + c\,\delta p_3$$
$$\delta p_5 = a_1\,\delta p_1 + b_1\,\delta p_2 + c_1\,\delta p_3$$
$$\delta p_6 = a_2\,\delta p_1 + b_2\,\delta p_2 + c_2\,\delta p_3$$

führt man diese Werthe in die allgemeine Gleichung ein, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + P_3\delta p_3 &+ P_4(a\,\delta p_1 + b\,\delta p_2 + c\,\delta p_3) \\ &+ P_5(a_1\,\delta p_1 + b_1\,\delta p_2 + c_1\,\delta p_3) \\ &+ P_6(a_2\,\delta p_1 + b_2\,\delta p_2 + c_2\,\delta p_3) \end{aligned}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta p_1(P_1 + aP_4 + a_1P_5 + a_2P_6 \ldots) \\ &\delta p_2(P_2 + bP_4 + b_1P_5 + b_2P_6 \ldots) \\ &\delta p_3(P_3 + cP_4 + c_1P_5 + c_2P_6 \ldots) \end{aligned}\right\} = 0$$

da nun vorausgesetzt ist, daß $\delta p_1\, \delta p_2, \delta p_3$ nicht $=0$, so kann dieser Gleichung nur Genüge geleistet werden, wenn die in den Klammern enthaltenen Ausdrücke verschwinden. Wir erhalten daher folgende 3 Bedingungsgleichungen:

$$A\left\{\begin{aligned} P_1 + aP_4 + a_1P_5 + a_2P_6 + \ldots &= 0 \\ P_2 + bP_4 + b_1P_5 + b_2P_6 + \ldots &= 0 \\ P_3 + cP_4 + c_1P_5 + c_2P_6 + \ldots &= 0 \end{aligned}\right.$$

Hieraus sieht man, daß zum Bestehen des Gleichgewichts 3 Bedingungen erfüllt werden müssten, weil wir angenommen haben, daß 3 Stücke willkürlich verschoben werden können. Hätten wir angenommen, daß von den Größen $\delta p_1, \delta p_2 \ldots$ n willkürlich

wären, so würden wir n Bedingungsgleichungen erhalten. Wenn man nun den Angriffspkt. von P_1 verschiebt, die Angriffspkte von P_2, P_3 aber nicht, u. man wendet auf diese Verschiebung das Princip der virt. Geschw. an, so erhält man die erste von den Bedingungsgleichungen (A).
Verschiebt m. nur den Angriffspkt von P_2, u. den von P_1 u. P_3 nicht, so erhält m. die 2te der Bedingungsgl. (A).
Verschiebt man blos den Angrfspk. von P_3, den von P_1 u. P_2 aber nicht, so erh. m. die 3te der Bedggl.

Man sieht also, daß die einzelnen Bedinggl. nur durch specielle Verschiebungen gefunden werden können, was die Aufstellung der Gleichungen sehr erleichtert.

Wenn das System von Punkten aus festen aber gegeneinander beweglichen Körpern besteht, wie bei einer Maschine, u. man will die Pressungen bestimmen, welche an den Berührungspunkten der Körper vorkommen, so geschieht dies dadurch, indem man die Verbindung der Körper, deren wechselseitige Pressungen bestimmt werden sollen, aufhebt u. dafür Kräfte anbringt, welche dieselbe Richtung u. Intensität haben, wie jene Pressungen. Dadurch wird das ganze

11. System getheilt, u. wenn man auf jeden derselben Theile das princ. der v. G. anwendet, ergeben sich zwei oder mehrere Bedingungsgleichungen, aus welchen die Pressungen berechnet werden können.

Besteht das System aus elastischen Körpern, u. will man hiebei die Spannungen u. Pressungen bestimmen, welche im Innern der Körper vorhanden sind, so muß man die Elasticitätskräfte berücksichtigen u. Verschiebungen im Innern der Körper vornehmen.

Da die Größen $\delta p_1, \delta p_2 \ldots$ Wege sind, die in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, nämlich in der Zeit t, während welcher die Verschiebung aller Punkte geschieht, so drücken die Verhältnisse $\frac{\delta p_1}{t}, \frac{\delta p_2}{t} \ldots$ die Geschwindigkeit aus, mit welcher sich die Angriffspunkte der Kräfte, nach ihren Richtungen geschätzt, bewegen, wenn eine Verschiebung vorgenommen wird. Bezeichnen wir mit $v_1, v_2, v_3 \ldots$, diese Geschwindigkeiten u. führen diese Werthe in die allgemeine Gleich. des Gleichgewichts ein, nachdem wir dieselbe durch t dividirt haben, so erhalten wir:

$$P_1 v_1 + P_2 v_2 + P_3 v_3 + \ldots = 0.$$

6.

Die Gleich. spricht also aus, daß wenn Kräfte im Gleichgewicht sind, u. man einem mit dem System von Punkten eine Verschiebung vor, so muß die algebraische Summe der Produkte einer jeden Kraft u. die Geschwindigkeit, mit welcher sich ihr Angriffsp. nach der Richtung der Kraft bewegt, = 0 sein.

Man nennt das Produkt einer Kraft u. die Geschwindigkeit ihres Angriffsp. den Effect der Kraft. Wenn also Kräfte im Gleichgewicht sind u. es wird eine Verschiebung vorgenommen, bei welcher die einzelnen Kräfte Effecte entwickeln, so muß die algebraische Summe dieser Effecte = 0 sein.

Über die Bedeutung des Princips.

Wenn Kräfte, welche auf ein System von Punkten wirken, der Bedingungsgleichung der virt. Geschw. entsprechen, so ist damit keineswegs ausgesprochen, daß das System ruhen müsse; sondern nur, daß diese Kräfte nicht im Stande sind eine Bewegung einzuleiten, od. ein schon vorhandenen Bewegungszustand zu verändern.

Die Wirkung, die eine constante Kraft hervorbringt, wird der Größe nach gemessen

j.

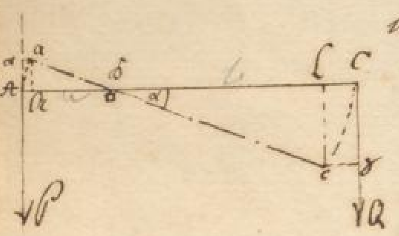
durch das Product aus der Kraft in den Weg, welchen der Angriffsp., nach der Richtung der Kraft geschätzt, zurücklegt.

Ist dieser Weg unendlich klein, so nennt man das Product das <u>Element</u> der Wirkung der Kraft. Die einzelnen Glieder des Princips der virt. G. drücken demnach die Elemente der Wirkung aus, welche die verschiedenen Kräfte hervorbringen, die das System um unendlich wenig aus der Gleichgewichts-position verschieben, u. die ganze Gleichung drückt aus, daß die Summe sämmtlicher Elementar-wirkungen = 0 sein müssen. Kräfte, deren Angriffsp. bei irg. einer Bewegung zurück-schreiten sind hinsichtlich dieser Bewegung als Widerstände anzusehen, u. ihre Ele-mentarwirkungen, welche in der Rechnung als negative Größen erscheinen, können wir im Gegensatz mit der Wirkung der Kräfte, deren Angriffsp. vorwärts schreiten <u>Gegenwirkungen</u> oder <u>Wider-stände</u> nennen. Die Gleich. des Princ. d. v. G. spricht mithin aus: daß die Summe der Elemente der Wirkungen der Kräfte gleich jeder Summe der Elemente der Wirkungen der Widerstände, od. daß die totale Wirkg sämtlicher Kräfte = 0 ist, wenn sich die Kräfte das Gleichgewicht halten u. eine Bewegung od. Verschiebung vorgenommen wird.

Beispiele zur Erläuterung.

Nehmen wir einen Hebel an. Die Bedingungen des geometr. Zusammenhanges sind, daß AC eine starre Linie sei u. in B ein fester Stützpunkt sich befinde.

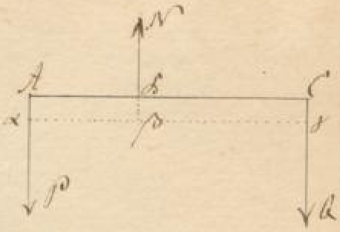
Das System sei im Gleichgewicht. Wir verschieben es um unendlich wenig, daß A nach α, u. C nach c kommt, so hat man: AB = a, u. BC = b gesetzt.



$$-P(A\alpha) + Q(C\gamma) = 0$$
$$-P(\mathfrak{a}a) + Q(Lc) = 0$$
$$-P(a \sin\alpha) + Q(b \sin\alpha) = 0$$
$$-Pa + Qb = 0$$
$$Pa = Qb$$

Beispiel 2.

Es soll vermittelst des Princ. der v. G. der Druck, den der Unterstützungspunkt B erleidet, bestimmt werden. Wir müssen statt dem festen Punkt eine Kraft N anbringen, um das ganze System um unendlich wenig bewegen zu können; denn nur



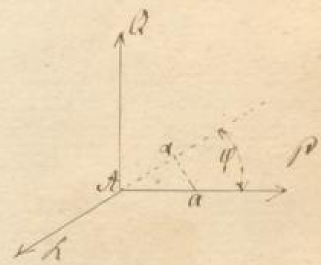
man nur eine Bewegung vornehmen, für und das Princ. zu einem vernünftigen Resultate. Die Verschiebung ist ganz beliebig; wir können das System z. B. in horizontaler Richtung rechts od. links verschieben, aber dann erhalten wir zufällig $0 = 0$, woraus wir nichts sehen. – Aber verschieben wir es aufwärts nach $\alpha\beta\gamma$, so gibt das Princ.:

$$P(A\alpha) + Q(C\gamma) - N(B\beta) = 0$$

da aber $(A\alpha) = (C\gamma) = (B\beta)$, so ist

$$P + Q = N.$$

wie wir das schon aus der Statik kennen.



Beisp. 3.

Man hat ein System v. Kräften, wobei auf den frei beweglichen Punkt A die beiden Kräfte P u. Q senkr. auf einander u. eine (beliebige) Kraft R wirken. Das ganze ist im Gleichgew. u. man will hierauf das Princ. der v. G. anwenden.

Die Verschiebungen die wir hier vornehmen können sind vierlei Art; 1.) nach der Richtung der Kraft P, 2.) nach d. R. der K. Q u. 3.) nach der Richtg der Kraft R u. 4) endlich nach jeder beliebigen Richtung hin.

Betrachten wir diese Fälle nach einander, so finden wir:

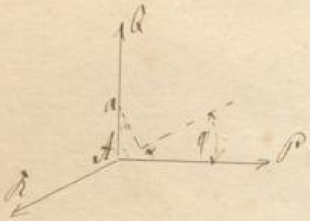
1.

Es komme der Pkt A nach a, u. Aa sei = s.
so hat man: Wirkg der P = Ps
Wirkg v. Q = 0
Wi. v. R = Rs cos φ daher

$$Ps - Rs\cos\varphi = 0$$
$$Ps = Rs\cos\varphi \text{ od. } P = R\cos\varphi$$

2.

Es gehe der P. A nach a, u. Aa = s, so ist:



Wirkg der Kraft P = 0
Wi. d. K. Q = Q(Aa)
Wi. d. K. R = R(Aα)
Aα = s sin φ folglich:

$$Qs - Rs\sin\varphi = 0$$
$$Q = R\sin\varphi.$$

3.

Verschieben wir den P. A nach der Richtg der Kraft R nach a, u. setzen Aa = s, so ist:
Wirkg v. R = R(Aa)
Wi. v. Q = Q(Aq)
Wi. v. P = P(Ap)
Aa = s, Aq = s sin φ, Ap = s. cos φ u. daher

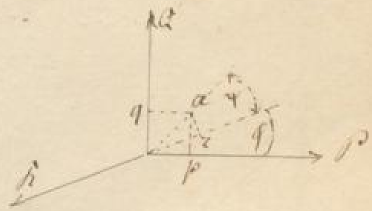
$$-Rs + Ps\cos\varphi + Qs\sin\varphi = 0$$
$$R = P\cos\varphi + Q\sin\varphi.$$

durch Zusammensetzung v. (1, u. 2) hätte man dasselbe Resultat erhalten; es ist nämlich

$$P\cos\varphi = R\cos^2\varphi$$
$$\underline{Q\sin\varphi = R\sin^2\varphi}$$
$$P\cos\varphi + Q\sin\varphi = R.$$

3.

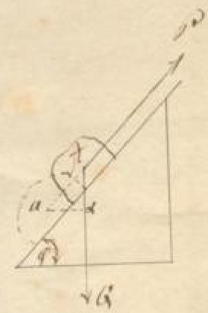
Verschieben wir endlich das System so, daß A nach a kommt u. $PAa = \psi$ einem beliebigen Winkel ist, u. setzen $Aa = s$, so ergibt sich:



$$P(Ap) + Q(Aq) = R(Ar)$$
$$Ap = s\cos\psi,\quad Aq = s.\sin\psi,\quad Ar = s\cos(\psi-\varphi)$$
$$P s\cos\psi + Q s.\sin\psi = R s.\cos(\psi-\varphi)$$
$$P\cos\psi + Q\sin\psi = R\cos(\psi-\varphi)$$
$$= R(\cos\psi\cos\varphi + \sin\varphi\sin\psi)$$
$$\sin\psi(Q - R\sin\varphi) + \cos\psi(P - R\cos\varphi) = 0$$

Ist dieses nun ψ für einen Werth haben, wird es für einen andern, so muß

$Q - R\sin\varphi = 0$ u. $P - R\cos\varphi = 0$ sein oder $Q = R\sin\varphi$, $P = R\cos\varphi$ werden.



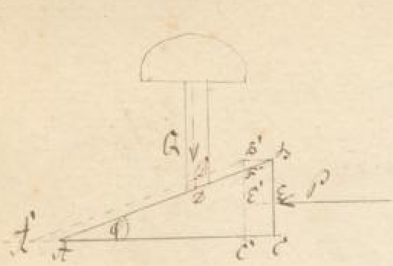
Beispiel 4.

An einer schiefen Ebene befindet sich ein Körper, der die Kräfte P u. Q im Gleichgewichte halten, man soll hierauf das Princip anwenden.

Man verschiebe die Last, so daß der Punkt A nach a kommt, so ist: $P(Aa) = Q(A\alpha)$,

$A\alpha = Aa\sin\varphi;\quad P(Aa) = Q\,Aa\sin\varphi,$

$P = Q\sin\varphi$, welches die Bedingung für's Gleichgewicht ist.



Beispiel 5.

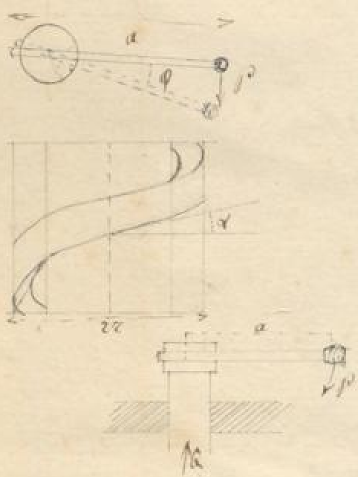
Das Princip angewandt auf ein System mit einem Keile.

$$P(EE') = Q(DD')$$

$$P(BH) = Q(B'F)$$

$$B'F = BB' \operatorname{tg}\varphi$$

$$P = Q \operatorname{tg}\varphi$$, die Gleichung fürs Gleichgewicht.



Beispiel 6.

Man soll vermittelst des Princips die Gleich. fürs Gleichgewicht finden für die Schraube. Die constanten Abmessungen sind a, $2r$.

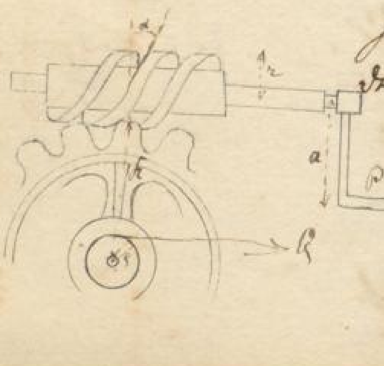
Weg, welchen der Angriffsp. v. P durchläuft $= a\varphi$

" eines Punktes am äußeren Umfange eines Schraubenganges ...... $= r\varphi$

" den der Angriffsp. v. Q zurücklegt .. $= r\varphi \operatorname{tg}\alpha$.

Daher $P a\varphi = Q r\varphi \operatorname{tg}\alpha$

$Pa = Qr \operatorname{tg}\alpha$, welches die verlangte Gleichung ist.



Beispiel 7.

Für nebenstehendes System vermöge des Princips die Gleichgewichtsgleichung zu finden.

Weg, den der Angriffsp. v. P zurücklegt .... $= a\varphi$

" eines P. am Umfange der Schraube ..... $= r\varphi$

" " " " " des Rades .... $= r\varphi \operatorname{tg}\alpha$

" " " " " der Radwelle ..... $= r\varphi \operatorname{tg}\alpha \frac{\rho}{r}$

" welchen d. Angriffsp. v. Q zurücklegt ..... $= r\varphi \operatorname{tg}\alpha \frac{\rho}{R}$

daher: $P a \varphi = Q r \varphi \, tg\alpha \, \frac{\rho}{r}$

$P = \frac{r}{a} \, \frac{\rho}{R} \, tg\alpha \, Q.$

Beispiel 8.

Für ein System, wie nebenstehendes, soll die Gleichung fürs Gleichgewicht aufgestellt werden. Es sei $AB = l$, $\angle ABC = \varphi$. so ist

$BC = l \cos\varphi$, $AC = l \sin\varphi$

Allein verschieben wir B nach b. u. A nach a, so ist $P(Bb) = Q(Aa)$. Nun ist:

$d.\, BC = d.\, l\cos\varphi = -\, l\sin\varphi \, d\varphi$

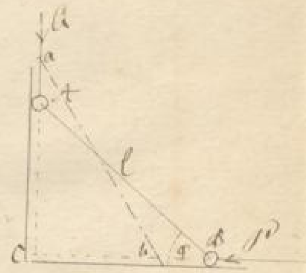
$d.\, AC = d.\, l\sin\varphi = \; l\cos\varphi \, d\varphi$

$Bb = l\sin\varphi\, d\varphi$; $Aa = l\cos\varphi\, d\varphi$ als unendlich kleine Theile von BC u. AC;

folglich $\quad Pl\sin\varphi\, d\varphi = Q\, l\cos\varphi\, d\varphi$

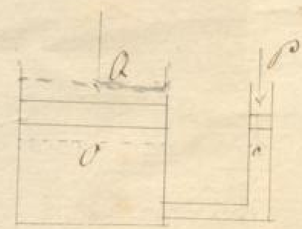
$P\sin\varphi = Q\cos\varphi$

$\frac{P}{Q} = cotg\,\varphi$; $\frac{Q}{P} = tg\,\varphi$.



Beispiel 9.

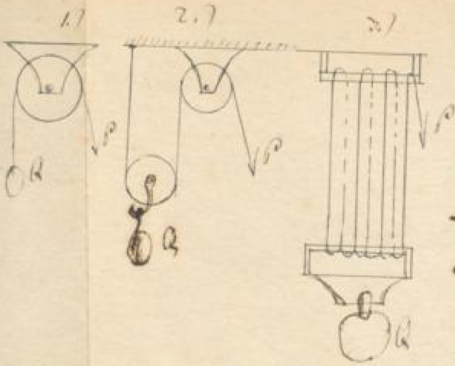
In dem System, das etwa eine hydraulische Presse vorstellen mag, die Bedingungen fürs Gleichgewicht zu finden.



Wegen der kleine Kolben gehoben ... $= s$

.. .. .. große .. .. .. $= s\frac{o}{O}$

also $Ps = Q s \frac{o}{O}$, od. $Q = \frac{PO}{o}$



Beispiele vom Rollenzuge.

bei 1.) ist $P = Q$.

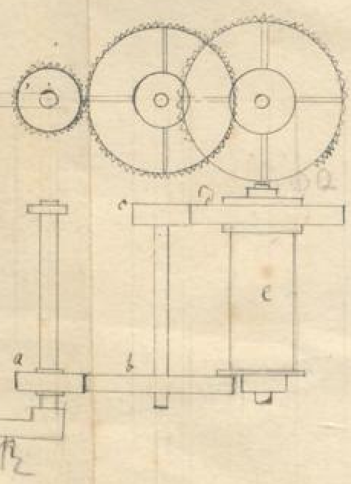
bei 2.) ist $P(Ra) = Q(Ra)$ od. $Q = 2P$, $P = \frac{Q}{2}$

bei 3.) hat man $P = \frac{Q}{n}$

Beispiele v. Räderwerken.

1.)

Man soll für nebenstehendes System vermöge des Princips d. v. G. die Gleichung fürs Gleichgewicht finden.



Die constanten Abmessungen sind:

Halbmesser der Kurbel ---- $= R$

" des Rades a ---- $= r$

" " " b ---- $= R_1$

" " " c ---- $= r_1$

" " " d ---- $= R_2$

" des Cylinders e .... $= r_2$

der Wendungswinkel der Kurbel $= \varphi$

Nun ist:

Weg, den der Angriffsp. v. P zurücklegt .... $= R\varphi$

" " " Umfang des Rades a .. .... $= r\varphi$

" " " .... b .. .... $= r\varphi$

.. .. c .... $= r\varphi\frac{r_1}{R_1}$

.. .. d .... $= r\varphi\frac{r_1}{R_1}$

.. .. der Welle e .... $= r\varphi\frac{r_1}{R_1}\frac{r_2}{R_2}$

" " " Angriffsp. v. Q .. .. $= r\varphi\frac{r_1}{R_1}\frac{r_2}{R_2}$

folglich:

$$P R \varphi = Q r \varphi \frac{r_1}{R_1} \frac{r_2}{R_2} \quad \text{u.}$$

$$P = \frac{r}{R} \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} Q.$$

Da in der Gleichg nur verhält. Größen vorkommen, so hätte man auch eine endliche Verschiebung annehmen können.

Man soll nun auch die Pressungen bestimmen, welche zwischen den Zähnen von je zwei Rädern statt finden. z.B. zwischen c u. d. Zu dem Ende denke man sich das Rad d weg u. durch eine der Gegenwirkung gleiche Kraft N ersetzt, u. bewege nun das System um unendlich wenig, so hat man:

2.

Die wesentl. Abmess. des Systemes seien:

Halbm. der Kurbel a - - - - - - - $= R$

" des Rades b - - - - - - - $= r$

" der Schraube d - - - - - - $= r_1$

" des Rades c - - - - - - - $= R_1$

Steigungswkl. der Schraube d - - - - $= \alpha$

Halbmesser des Rades e - - - - - $= R_2$

" " " f - - - - - $= r_2$

Neigungswkl. der L. - - - - - $= \varphi$

Nun ist:

Weg, d. d. Angriffsp. v. P zurücklegt .... $= h\varphi$

" " ein P. am Umf. des Rades b .. $= r\varphi$

" " ... c .. $= r\varphi$

" " ... der Schraube d .. $= r\varphi\frac{r_1}{R_1}$

" " ... des Rades e ... $= r\varphi\frac{r_1}{R_1}\,tg\alpha$

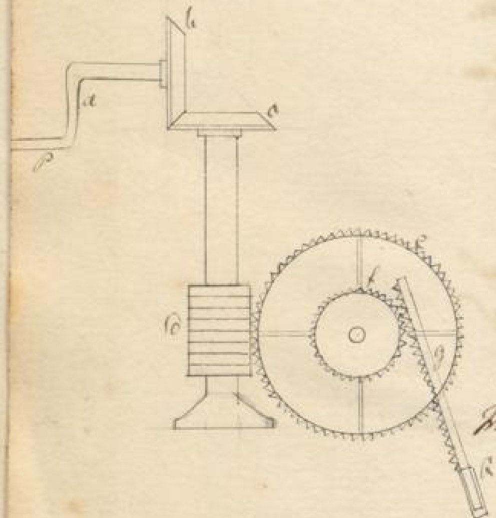
" " ... f ... $= r\varphi\frac{r_1}{R_1}\,tg\alpha\,\frac{r_2}{R_2}$

" " die Zahnstange od. der Angriffsp. v. Q .. $= r\varphi\frac{r_1}{R_1}\frac{r_2}{R_2}\,tg\alpha$

folglich:

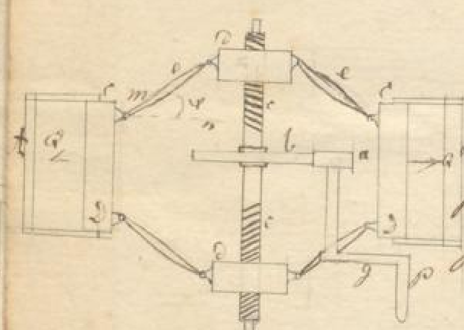
$$Ph\varphi = Q\, r\varphi\, \frac{r_1}{R_1}\, \frac{r_2}{R_2}\, tg\alpha$$

$$P = \frac{r}{h}\cdot\frac{r_1}{R_1}\cdot\frac{r_2}{R_2}\cdot tg\alpha\, Q.$$



Auch hier hätte man eine endliche Umdrehung annehmen können.

3.



Es seien A u. B zwei fest miteinander verbundene Platten, zwischen welchen sich das mech. System befindet u. zum Zwecke hat die Platten CD von der erstern wegzudrücken, ähnlich wie bei einer Münzpresse.

Die wesentl. Abmessungen sind:

Halbmesser der Kurbel g .... $= h$

" des Rades a ..... $= r$

" " b ..... $= r_1$

" der Schraube c .... $= r_2$

Neigungswinkel der " c ..... $= \alpha$

" " , Dmn ...... $= \varphi$.

Drehungsw. der Kurbel . . . . . . = ψ

Weg. des d. Angriffsp. v. P zurückgelegt = $R\psi$

.. .. ein Pt. am Umfg. d. Rades ... = $r\psi$

.. . . b .. = $r\psi$

.. . . Schraube c .. = $r\psi\frac{r_1}{R_1}$

.. .. .. einen Pt. der Schraubenmutter nach Richtg. B. .. = $r\psi\frac{r_1}{R_1}\,tg\alpha$

.. .. der Angriffsp. v. Q . . . . . = $r\psi\frac{r_1}{R_1}\,tg\alpha\,tg\varphi$

daher fürs Gleichgewicht:

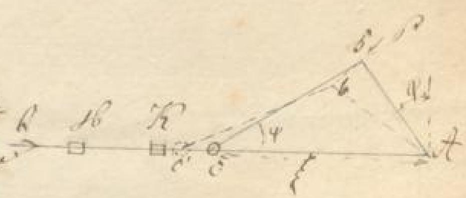
$$PR\psi = 2\,Qr\psi\frac{r_1}{R_1}\,tg\alpha\,tg\varphi$$

$$P = \frac{r}{R}\frac{r_1}{R_1}\,tg\alpha\,tg\varphi\cdot Q$$

Beispiele mit verschiebbaren Stangen u. dgl.

1.

Das System ist von der Art, daß, wenn an B eine Kraft P thätig ist, der Pkt B, der mit dem festen Pkte A verbunden ist, in einem Kreisbogen sich nach b bewegen kann, u. dadurch die horizontale Stange HK in ihrer Lage verschoben u. der Widerstand Q überwunden wird. Der Pkt C kommt nach c.



Es sei der Winkel, den BA mit einer auf AC senkr. bildet = φ, $\angle BCA = \psi$, u. $AC = \xi$, ferner $AB = r$, $CB = l$.

Dann ist $l\sin\psi = r\cos\varphi$ u.

$l\cos\psi + r\sin\varphi = \xi$; ferner

$$l^2 = r^2\cos^2\varphi + (\xi - r\sin\varphi)^2$$

$$\xi - r\sin\varphi = \sqrt{l^2 - r^2\cos^2\varphi}$$

$$\xi = r\sin\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\cos^2\varphi}$$

der Weg, den der Angriffsp. v. P zurücklegt ist $r\,d\varphi$; u. der Weg der Last Q ist nichts anderes als die unendlich kleine Änderung der Größe AC, $d\xi$ also haben wir für den gesuchten Weg $d.\xi$.

$$d\xi = r\cos\varphi\,d\varphi + \frac{-2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\cos^2\varphi}};$$

$$= r\,d\varphi\left(\cos\varphi + \frac{r\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\cos^2\varphi}}\right)$$

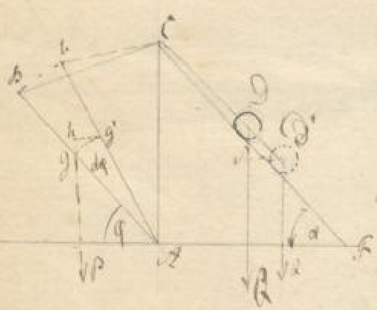
daher $P r\,d\varphi = Q\,d.\xi$

$$= Q\,r\,d\varphi\left(\cos\varphi + \frac{r\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\cos^2\varphi}}\right)$$

$$P = Q\left(\cos\varphi + \frac{r\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\cos^2\varphi}}\right)$$

Im Falle, daß l sehr groß ist gegen r, hätte man näherungsweise $P = Q\cos\varphi$.

2.



Es stelle AB eine Fallthüre vor, deren Schwerp. in G sich befindet. Vermöge einer Last Q, die auf einer schiefen Ebene herabgleiten kann u. durch ein Seil an die Thür befestigt ist, kann die Thüre aufgezogen werden. Man soll die Bedingung des Gleichgew. angeben. Wir verschieben also das System um unendlich wenig, daß B nach b, u. D nach d kommt. Der Winkel, den die Fallth. mit der horizontalen Linie macht, sei φ. der const. $\angle CBA = \alpha$. Nun ist:

$$P(gh) = Q(Dd);$$

Es sei $AG=a$, so ist $Gg = a\,d\varphi$;

$$Gh = Gg \cos\varphi = a \cos\varphi \, d\varphi$$

Um Dd zu bestimmen sei:

$$BC + CD = l, \quad AB = AC = b.$$

Es ist Dd nichts anderes als die Änderung von BC. Es sei $BC = y = 2b \sin\frac{1}{2}(90-\varphi)$

$$dy = -2b \cos\tfrac{1}{2}(90-\varphi)\frac{d\varphi}{2}, \text{ also}$$

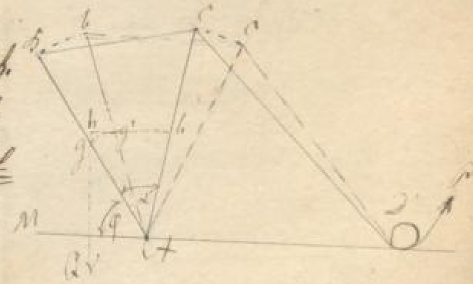
$$Dd = b \cos\tfrac{1}{2}(90-\varphi)\,d\varphi \text{ (blos numerisch).}$$

u. $$P a \cos\varphi\, d\varphi = Q b \cos\tfrac{1}{2}(90-\varphi)\,d\varphi \sin\alpha$$

$$P = Q\frac{b}{a}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(90-\varphi)\sin\alpha}{\cos\varphi}$$

3.

Ein mechanisches System ähnlich wie ein entgegenstehendes brauchte man in Paris um einen Obelisken aufzurichten. Es sei AB eine Stellung desselben, während des Aufziehens; AC sei ein Balken, der sich in einer vertikalen Ebene um den Punkt A drehen kann. Die Seile gehen von B nach C u. werden bei D aufgewunden mit der Kraft P, so daß der $\angle\alpha$ const. bleibt während der Drehung.



Man verschiebe die Punkte, so daß B nach b, u. C nach c kommt, so ist

$$Q(Gh) = P\,d.\,CD.$$

Es sei $AG=a$, $AB = AC = b$, $AD = c$, $\angle BAM = \varphi$.

Es ist $CD^2 = b^2+c^2 - 2bc\cos(180-(\alpha+\varphi))$

$$CD = \sqrt{b^2+c^2+2bc\cos(\alpha+\varphi)}$$

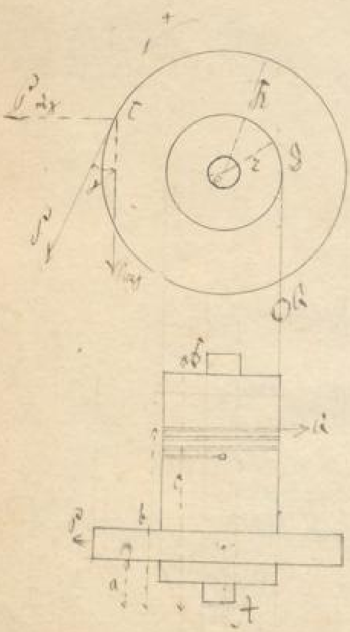
$$d.CD = -\frac{bc\sin(\alpha+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos(\alpha+\varphi)}}$$

$$gh = a\cos\varphi\,d\varphi;\ \text{daher}$$

$$\frac{P\,bc\sin(\alpha+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos(\alpha+\varphi)}} = Q\,a\cos\varphi\,d\varphi$$

$$P = \frac{Qa}{bc}\,\frac{\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos(\alpha+\varphi)}$$

als Gleichung fürs Gleichgewicht.



<u>Beispiel</u> mit Rücksicht auf Reibung.

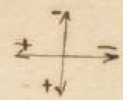
Man soll bestimmen, welche Kraft P nöthig ist, um die Last Q aufzuziehen, vermittelst des Rad. der mit. Gestell. aber mit Bezug auf Reibung. Es sei f der Reibungscoefficient.

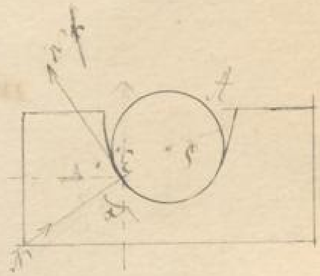
Zu dem Zwecke denken wir uns die Lager weg u. entsprechende Kräfte dafür angebracht. An A wirke N, an B dieselbe N_1. Es sei ferner R der Rad. des Rades; r der Welle, u. ρ des Zapfens.

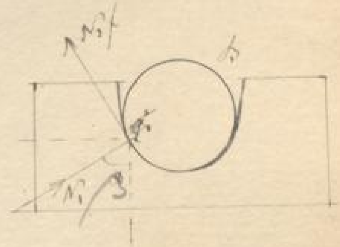
Als Unbekannte haben wir 1) $\frac{P}{Q}$, 2) den $\angle\alpha$, welchen N mit der Verticalen macht, 3.) den $\angle\beta$, welchen N_1 mit d. V. bildet; 4.) N, u. 5) N_1; Um diese fünf Unbekannten zu ermitteln, sind auch fünf Gleichungen nothwendig, die wir folgendermaßen erhalten:

26.27.

Wir nehmen 1) eine vertikale Verschiebung u. 2.) eine horizontale an; u. nachdem wir die Kräfte rechtw. zerlegt haben, sehen wir nach für Kräfte Wege zurückgelegt haben.







	Horizontale Proj.	Vertikale Proj.
P liefert	$P \sin\gamma$	$P \cos\gamma$
N	$-N \sin\alpha$	$-N \cos\alpha$
Nf	$N f \cos\alpha$	$-N f \sin\alpha$
N_1	$-N_1 \sin\delta$	$-N_1 \cos\delta$
$N_1 f$	$N_1 f \cos\delta$	$-N_1 f \sin\delta$
Q	0	Q

Bewegen wir also das Syst. senkr. aufwärts, so sind die Projekt. der Wege der horizont. Kräfte auf ihre Richtungslinie $= 0$ u. folglich die algebraische Summe $= 0$;

$$0 = P\sin\gamma - N\sin\alpha + Nf\cos\alpha - N_1\sin\delta + N_1 f\cos\delta \quad \text{I.}$$

Bewegen wir das Syst. horiz., so sind die Proj. der Wege der vertik. Kräfte $= 0$ u. daher

$$0 = P\cos\gamma - N\cos\alpha - Nf\sin\alpha - N_1\cos\delta - N_1 f\sin\delta + Q \quad \text{II.}$$

Denken wir uns eine Axe durch den Zapfen B u. senkrecht durch A gelegt, lassen wir das System sich um diese Axe etwas aufwärts drehen, so erhalten wir zwei fernere Gleichungen u. zwar:

wenn wir die Entfernungen der Angriffspunkte von P, Q u. N von dieser Axe = a, b, c setzen, so sind die statischen Momente:

III. $0 = a P\cos\gamma + Qb - (N\cos\alpha + Nf\sin\alpha)c$

u. für eine Drehung um die Axe durch B:

IV. $0 = Q(c-b) + P\cos\gamma(c-a) - (N\cos\alpha + Nf\sin\alpha)c$

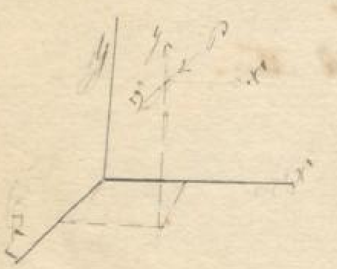
Und endlich durch eine Drehung um die Axe AD erhält man die 5te Gl. wie folgt:

V. $0 = Ph - Qr - Nf\rho - N_1 f\rho_1$.

Mit Hülfe dieser 5 Gleichungen lassen sich auch die 5 genannten Unbekannten finden.

Die bisherigen Beispiele mögen hinreichen, die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeit auf Systeme, welche fest sind, zu zeigen.

Man hat noch eine andere allgemeine Formel aufgestellt, u. zwar für die analytischen Untersuchungen.



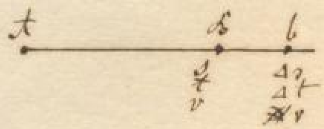
Nämlich: Es wirke auf den Pkt A eine Kraft P; man projic. den Pkt auf 3 rechtw. Coordinatenaxen; zerlege die Kraft P in drei mit Axen parallele Kräfte. Wenn der Weg von P in der unendlich kleinen Zeit $= \delta p$, der von X, Y u. Z $= \delta x$, δy u. δz ist,

29. so hat man $P\delta p = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$;
allgemein ist aber $\Sigma\, P\delta p = 0$ folglich
$$\Sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$
welches die allgemeine Gleichung ist.

Von der Aufsuchung der Geschwindigkeit, der Wege etc. der sich bewegenden Körper.

Wenn eine Masse sich gleichförmig bewegt, so bewegt sie sich in Folge der Trägheit od. die Kräfte, die auf sie wirken, sind vollkommen den Widerständen gleich, die der Bewegung entgegen streben.

Es bewege sich nun eine Masse gleichförmig von A gegen B; der Weg AB sei $= s$, die Zeit $= t$ u. die Geschwindigkt $= v$. Nun beachte man die Bewegung noch einen Augenblick länger bis er noch b kommt, der unendlich kl. Weg sei $= \Delta s$, die Zeit Δt, u. die Geschwi. $= \Delta v$.



Wir haben $s = vt$ u.
$$s + \Delta s = v(t + \Delta t),$$ ~~mit ...~~ weggezogen
gibt $\Delta s = v\Delta t$ d.h. $\frac{\Delta s}{\Delta t} = i =$ einer constanten Größe; da aber $\frac{s}{t} = v$, so ist auch $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ od. die Grenze $\frac{ds}{dt} = v$.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Wenn sich ein Körper von A nach B bewegt mit gleichförmig beschleun. Geschwindigkeit, so ist bei der weitern Bewegung während den gleichen Zeitabschnitten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nicht mehr eine constante, sondern eine zunehmende od. abnehmende Größe. Je kleiner aber Δs od. Δt ist, desto mehr nähert sich $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ der constanten v, d. h. je kleiner Δt ist, desto mehr kann man annehmen, daß die Bewegung die in B erreichte Geschwindigkeit während der Längenstrecke von Δs als constant beibehalte; also wird für die Grenze $\frac{ds}{dt} = v$. Ferner ist $\frac{ds}{dt} = f(t)$; $ds = f(t).dt$ u.

$$s = \int f(t)dt.$$

Wenn s bekannt ist als $f(t)$, so ist auch v bekannt, da $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d.f(t)}{dt}$.

Wenn auf einen Körper, dessen Last Q ist, eine Kraft F wirkt eine Zeit t hindurch mit der Anfangsgeschwindigkeit $= 0$, so ist $v = g\frac{F}{Q}t$, für nach einer Zeit Δt ist:

$v+\Delta v = g\frac{F}{Q}(t+\Delta t)$ v. einander abgezogen:

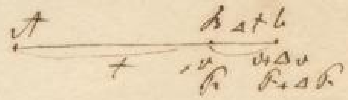
$\Delta v = g\frac{F}{Q}\Delta t$. u. $\frac{\Delta v}{\Delta t} = g\frac{F}{Q}$, die Grenze

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d.\frac{ds}{dt}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = g\frac{F}{Q}.$$

30. 31. Ungleichförmig beschleun. Bewegung,

wenn nämlich sich auch die Kraft ändert, die dem Körper eine Bewegung mittheilt.

Der Körper bewege sich von A nach b u. erreiche dort bei einer Kraft F die Geschw.=v. Bei einer wachsenden Bewegung während der Zeit Δt erlange er in b bei einer Kraft $F+\Delta F$ eine Geschwindigk. $v+\Delta v$.



Wir haben aber:

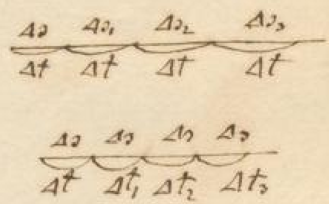
$\Delta v > g \frac{F}{Q} \Delta t$, wenn näml. die Kraft wachsend;

$\Delta v < g \frac{F+\Delta F}{Q} \Delta t$, wie schon die Kraft $F+\Delta F$ auf den Körper gewirkt hätte.

Oder $\frac{\Delta v}{\Delta t} \frac{Q}{g} > F$ u. $< F+\Delta F$

u. für die Grenze ist $\frac{dv}{dt} = g \frac{F}{Q}$ oder wie oben, weil $v = \frac{ds}{dt}$ ist,

$\frac{d^2 s}{dt^2} = g \frac{F}{Q}$, wenn wir die Zeitabschnitte gleichgroß annehmen.



Wir hätten auch die Wege gleichgroß annehmen können u. die Zeitabschnitte veränderlich, aber das erstere ist das Gewöhnlichere.

die Masseneinheit werden wir annehmen, wo der Körper ein Gewicht hat von $19^{K},616$; nämlich ein Körper von diesem Gewicht legt in der ersten Secunde einen Weg von $9^{m},808$ zurück beim freien Fall. Hieraus folgt

$$\frac{Q}{2g} = M = 1 \text{ od. } Q = 2gM;\; g\frac{F}{2gM} = g\frac{F}{Q}.$$

Beispiele

zur Übung in der Anwendung der differential gleichungen.

Wir haben nämlich die Gleichungen:

$$\frac{ds}{dt} = v;\; \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = g\frac{F}{Q} = \frac{1}{2}\frac{F}{M}.$$

1.

Für eine constante Kraft F ist:

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{F}{Q};\; dv = g\frac{F}{Q}dt.$$

$$v = \int g.\frac{F}{Q}dt = g\frac{F}{Q}t + C$$

es sei für $t=0$, $v=c$ gewesen, so ist

$$v = 0 + C$$

$$v - c = g\frac{F}{Q}.t;$$

$$v = c + g\frac{F}{Q}.t;$$

$$\frac{ds}{dt} = c + g\frac{F}{Q}.t;\; ds = c\,dt + g\frac{F}{Q}t.dt$$

$$s = ct + \frac{1}{2}t^2 g.\frac{F}{Q} + b$$

wobei b der Weg bis zum Anfangspunkt der Zeit t ist.

Im Falle gar keine Kraft wirkt, also $F=0$ ist, so hat man:

$$\frac{dv}{dt} = 0;\quad v = A,\ \frac{dz}{dt} = A;$$
$$z = At + B$$

wobei A u. B zwei constante Größen sind.

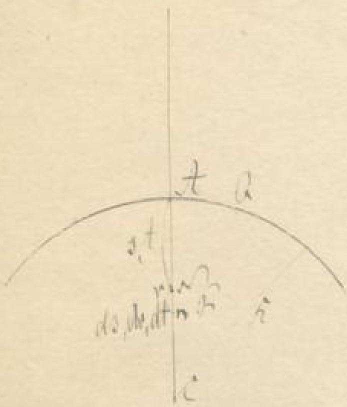
Beispiel 2.

Ein frei fallender Körper habe nach der Zeit t den Weg $AN = z$ zurückgelegt. Es sei Q die Kraft in Kilogr. ausgedrückt, welche in B auf ihn einwirkt vermöge der Attraktion. Diese Kraft sei in $N = F$, so ist, wenn $AB = h$ u. $BC = R$:

$$F : Q = R^2 : (R+h-z)^2$$
$$F = \frac{QR^2}{(R+h-z)^2}$$
$$\frac{dv}{dt} = g\frac{QR^2}{Q(R+h-z)^2} = g\frac{R^2}{(R+h-z)^2};$$ ferner ist:
$$\frac{dz}{dt} = v$$ u. die beiden Gl. miteinander multipl.
$$v\,dv = g\frac{R^2}{(R+h-z)^2}dz,$$ mithin
$$\frac{v^2}{2} = gR^2\int\frac{dz}{(R+h-z)^2} = gR^2\frac{1}{R+h-z} + C$$
da aber für $v=0$, $z=0$ ist, so erhält man:
$$0 = gR^2\frac{1}{R+h} + C;\quad C = -gR^2\frac{1}{R+h}$$
mithin $$\frac{v^2}{2} = gR^2\left(\frac{1}{R+h-z} - \frac{1}{R+h}\right)$$
$$v = \pm R\sqrt{2g\left\{\frac{1}{R+h-z} - \frac{1}{R+h}\right\}}$$
ferner $$dt = \frac{dz}{v} = \frac{dz}{R\sqrt{2g\left(\frac{1}{R+h-z} - \frac{1}{R+h}\right)}}$$
$$t = \frac{1}{R\sqrt{2g}}\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{R+h-z} - \frac{1}{R+h}}}$$

Beispiel 3.

Denken wir uns ein Körper falle von einem [illegible] Oberfläche der Erde nach dem Mittelpunkt C. Nachdem er eine Zeit t gefallen, soll er eine Geschwindigkeit v besitzen u. einen Weg s zurückgelegt haben. Im Innern der Erde ist die Attraction der Entfernung vom Mittelpunkt direct proportional. Daher, wenn der Körper in A ein Gewicht Q hat u. in N = F, so hat man



$$Q : F = \frac{R^3}{R^2} : \frac{(R-s)^3}{(R-s)^2}\,;\quad F = \frac{Q}{R}(R-s)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{Q}\,\frac{Q}{R}(R-s) = \frac{g}{R}(R-s)\,;$$ es ist aber

$v\,dt = ds$, mithin $v\,dv = \frac{g}{R}(R-s)\,ds$ u.

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g}{R}\left(Rs - \frac{s^2}{2}\right) + C$$

oder $v^2 = \frac{g}{R}(2Rs - s^2) + C$

für $s = 0$, ist $v = 0$, also $C = 0$, daher

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}} \cdot \sqrt{(2Rs - s^2)}$$

für $s = R$ erhält man:

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{(2R^2 - R^2)} = \sqrt{gR}.$$

Welche Geschwindigkeit aber besitzt der Körper wenn er an dem entgegengesetzten Ende der Erde anlangt? also für $s = 2R$?

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{(4R^2 - 4R^2)} = 0.$$

Also würde der Körper dadurch die Erde verlieren.

35. Man hat $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{r}} \cdot \sqrt{(2rs - s^2)}$

$$\frac{ds}{\sqrt{(2rs-s^2)}} = \sqrt{\frac{g}{r}}\,dt$$

$$\int\frac{ds}{\sqrt{(2rs-s^2)}} = t\sqrt{\frac{g}{r}} = -\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{2r-2s}{\sqrt{4r^2-0 r^2}} + C$$

$$= -\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{r-s}{r} + C$$

für $t=0$, ist $s=0$, also $C = \mathrm{arc\,sin}\,\frac{r}{r} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

also $t.\sqrt{\frac{g}{r}} = (4n+1)\frac{\pi}{2} - \mathrm{arc}(\sin = \frac{r-s}{r})$;

$$\mathrm{arc}(\sin = \frac{r-s}{r}) = (4n+1)\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{g}{r}}\,.\,t$$

$$\frac{r-s}{r} = \sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2} - t.\sqrt{\frac{g}{r}}\right)$$

$$\frac{r-s}{r} = \cos(t\sqrt{\frac{g}{r}})$$

$$r-s = \cos(t\sqrt{\frac{g}{r}})\,r$$

$$s = r(1 - \cos(t\sqrt{\frac{g}{r}}))$$

Für ein u. dasselbe s hat man unendlich viele t, folglich eine oscillirende Bewegung.

Eine ähnliche Bewegung kann man erhalten, dadurch, daß man einen Draht in A befestigt u. daran eine Last Q hängt. Seine natürliche Länge sei $AB = l$; vermöge des Gewichtes dehne er sich um $Ab = \lambda$ aus. Es sei a der Querschnitt u. ε der Elasticitätscoeff. Die Kraft der Ausdehnung $f = a.\varepsilon\,\frac{\lambda - s}{l}$

$$G = f - Q = a\varepsilon\,\frac{\lambda-s}{l} - Q$$

$\frac{dv}{dt} = g\,\frac{a\varepsilon(\lambda - s - l)}{Q\,l}$, u. $\frac{a\varepsilon g}{Ql} = \alpha$ gesetzt:

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(\lambda - s) - g$$

$$v\,dt = ds$$

$$v\,dv = \alpha(\lambda - s)\,ds - g\,ds = (\alpha\lambda - g)\,ds - \alpha s\,ds$$

$$\frac{v^2}{2} = (\alpha\lambda - g)s - \tfrac{1}{2}\alpha s^2 + C, \quad C = 0.$$

$$v = \sqrt{2(\alpha\lambda - g)s - \alpha s^2} = \frac{ds}{dt}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2(\alpha\lambda - g)s - \alpha s^2}}$$

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2(\alpha\lambda - g)s - \alpha s^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \frac{2(\alpha\lambda - g) - 2\alpha s}{2(\alpha\lambda - g)} + C$$

$$0 = -\sqrt{\alpha} \cdot \frac{\pi}{2} + C$$

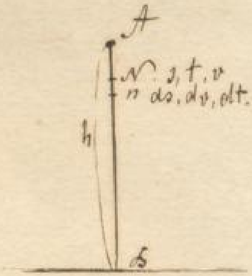
$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arccos \frac{\alpha\lambda - g - \alpha s}{\alpha\lambda - g}$$

$$\cos t\sqrt{\alpha} = \frac{\alpha\lambda - g - \alpha s}{\alpha\lambda - g}$$

$$= 1 - \frac{\alpha s}{\alpha\lambda - g}$$

$$s = \frac{\alpha\lambda - g}{\alpha}\left(1 - \cos(t\sqrt{\alpha})\right).$$

Beispiel 4.



Wenn bei einem frei fallenden Körper Rücksicht genommen wird auf den Widerstand der Luft, u. die Schwere als gleich angesehen wird, so erhalten wir folgende Resultate.

Es sei mv^2 der Widerstand der Luft.
Q sei das Gewicht des Körpers, P die Kraft welche ihn abwärts treibt.

$$P = Q - mv^2$$

$$\frac{ds}{dt} = v \quad , \frac{dv}{dt} = g\frac{P}{Q}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{Q - mv^2}{Q} = g - \frac{gmv^2}{Q} = g - \beta v^2$$

$$dt = \frac{dv}{g - \beta v^2} \; ; \; t = \int \frac{dv}{g - \beta v^2} \; ; \; \frac{1}{g - \beta v^2} = \frac{A}{\sqrt{g} + v\sqrt{\beta}} + \frac{B}{\sqrt{g} - v\sqrt{\beta}}$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{g}} = B$$

$$t = \int \frac{dv}{2\sqrt{g}(\sqrt{g} + v\sqrt{\beta})} + \int \frac{dv}{2\sqrt{g}(\sqrt{g} - v\sqrt{\beta})}$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g\beta}}\, \lg n(\sqrt{g} + v\sqrt{\beta}) - \frac{1}{2\sqrt{g\beta}}\, \lg n(\sqrt{g} - v\sqrt{\beta}) + C$$
$$C = 0.$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g\beta}}\, \lg n \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{\beta}}{\sqrt{g} - v\sqrt{\beta}}.$$

$$e^{2t\sqrt{g\beta}} = \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{\beta}}{\sqrt{g} - v\sqrt{\beta}};$$

$$v = \frac{\sqrt{g}\, e^{2t\sqrt{g\beta}} - \sqrt{g}}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}\, e^{2t\sqrt{g\beta}}}.$$

Wenn t sehr groß wird, wird der Ausdruck immer mehr constant;

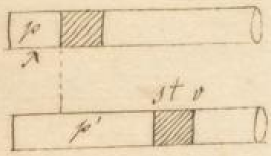
d. i. $v = \sqrt{\frac{g}{\beta}}$.

$$v\,dt = ds$$
$$v\,dv = ds\,(g - \beta v^2)$$
$$ds = -\frac{1}{2\beta}\, \frac{-2\beta v\,dv}{g - \beta v^2}.$$
$$0 = -\frac{1}{2\beta}\, \lg n\, g + C$$
$$C = \frac{1}{2\beta}\, \lg n\, g$$
$$s = \frac{1}{2\beta}\, \ln \frac{g}{g - \beta v^2}$$

Beispiel 5.

Es soll die Geschwindigkeit berechnet werden, mit welcher der kleine Cylinder sich aus dem größeren herausschiebt, wenn auf ihn die Spannkraft des sich im Moment in Gas verwandelnden Pulvers wirkt.

1) Wir setzen voraus der größere Cyl. sei fest.
3.) die Spannung ändere sich nach dem Mariotteschen Gesetz.
2.) die Pulvermasse verwandle sich momentan in Gas.



4.) Wir abstrahiren von dem Luftwiderstand. Der Druck des Gases vor der Bewegung sei $= p$, u. nachdem der Weg s zurückgelegt worden $= p'$; Ω der Querschnitt des Rohres; l die Länge; λ die Länge der Pulverfüllung; P der Druck auf den bl. Cylinder nach der Zeit t od. dem zurückgelegten Weg s.

Wir haben zunächst:

$$p : p' = \Omega(\lambda+s) : \lambda\Omega$$

$$p' = \frac{p\lambda}{\lambda+s}$$

$$P = \Omega p' = \frac{\Omega p\lambda}{\lambda+s}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{Q}\frac{\Omega p\lambda}{\lambda+s} \text{ ; setzen wir } \frac{g\Omega p\lambda}{Q} = \beta$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = \frac{\beta}{\lambda+s} \\ v\,dt = ds \end{array}\right\} v\,dv = \frac{\beta\, ds}{\lambda+s}$$

$$\frac{v^2}{2} = \beta \operatorname{lgn.}(\lambda+s) + C$$

für $s=0$ ist $v=0$

$$0 = \beta \operatorname{lgn}\lambda + C,\quad C = -\beta\operatorname{lgn}\lambda$$

daher $\frac{v^2}{2} = \beta \operatorname{lgn}\left(\frac{\lambda+s}{\lambda}\right)$.

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2\beta \operatorname{lgn}\frac{\lambda+s}{\lambda}}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2\beta\operatorname{lgn}\frac{\lambda+s}{\lambda}}} \text{ u. } t = \int\frac{ds}{\sqrt{2\beta\operatorname{lgn}\frac{\lambda+s}{\lambda}}}.$$

Setzen wir $\operatorname{lgn}\frac{\lambda+s}{\lambda} = y$, so ist

$$\frac{\lambda+s}{\lambda} = e^y,\ \lambda+s = \lambda e^y,\ s = \lambda(e^y-1),$$

$$ds = \lambda e^y\,dy, \text{ daher } t = \int\frac{\lambda e^y\,dy}{\sqrt{2\beta y}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2\beta}}\int y^{-\frac{1}{2}}e^y\,dy.$$

was noch zu integriren erübrigt.

9. Beispiel 6.

Die Daten der vorigen Aufgaben bleiben, nur soll Rücksicht genommen werden auf das Zurücktreten des Rohres.

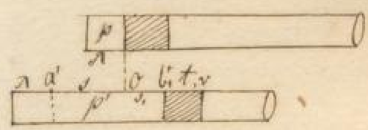
Es sei Q das Gewicht des Rohres.

q . . . des kleinen Cylinders

$Ob_1 = s$, u. $Oa' = s_1$.

Geschwindigkeit der Kugel (d. h. C.) nach Zeit $t = v$;

. . . . des Rohres . . . . . . $= v_1$;



p die Spannung der Gase am Anfang

p' . . . . nach der Zeit t

Ω der Querschnitt des Rohres.

Es ergibt sich:

$$p : p' = \Omega(s+s_1+\lambda) : \Omega\lambda$$

$$p' = \frac{p\lambda}{s+s_1+\lambda}\,;\quad P = \Omega p' = \frac{\Omega p\lambda}{s+s_1+\lambda}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\cdot\frac{\Omega p\lambda}{q(s+s_1+\lambda)}\,;\quad \frac{dv_1}{dt} = g\frac{\Omega p\lambda}{Q(s+s_1+\lambda)}$$

Bei der Betrachtung dieser beiden Gleichungen finden wir, daß $\frac{dv}{dt}q = \frac{dv_1}{dt}Q$ od. $Q\,dv_1 = q\,dv$ u. $qv = Qv_1 + C$; weil für $v=0$, auch $v_1=0$ ist $C=0$ u. $qv = Qv_1$; u. $q\frac{ds}{dt} = Q\frac{ds_1}{dt}$; $q\,ds = Q\,ds_1$; $qs = Qs_1 + C$, für $s=0$, $s_1=0$, also $C=0$, u. $qs = Qs_1$; $s_1 = \frac{q}{Q}s$;

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{\Omega p\lambda}{q}\cdot\frac{1}{s+\frac{q}{Q}s+\lambda} = g\frac{\Omega p\lambda}{q}\cdot\frac{1}{\lambda+(1+\frac{q}{Q})s}$$

Setzen wir $g\frac{\Omega p\lambda}{q} = \beta$ u. $1+\frac{q}{Q} = \gamma$, so erhält man $\frac{dv}{dt} = \frac{\mathfrak{P}}{\lambda+\gamma s}$

$$\frac{v\,dt = ds}{v\,dv = \frac{\mathfrak{P}\,ds}{\lambda+\gamma s}}$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\mathfrak{P}}{\gamma}\,\mathrm{lgn}(\lambda+\gamma s) + C$$

$$0 = \frac{\mathfrak{P}}{\gamma}\,\mathrm{lgn}\,\lambda + C$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\mathfrak{P}}{\gamma}\,\mathrm{lgn}\left(\frac{\lambda+\gamma s}{\lambda}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2\mathfrak{P}}{\gamma}\,\mathrm{lgn}\left(1+\frac{\gamma}{\lambda}s\right)}*$$

$$v_1 = \frac{q}{Q}\sqrt{2\frac{\mathfrak{P}}{\gamma}\,\mathrm{lgn}\left(1+\frac{\gamma}{\lambda}s\right)}* \;;\; s = \frac{Q}{q}s'$$

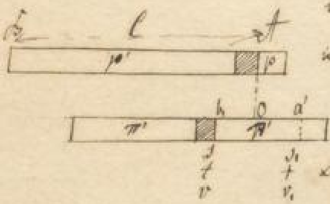
$$= \frac{q}{Q}\sqrt{2\frac{\mathfrak{P}}{\gamma}\,\mathrm{lgn}\left(1+\frac{\gamma}{\lambda}\frac{Q}{q}s_1\right)}$$

Ferner ist $\frac{ds}{dt} = v$, $dt = \frac{ds}{v}$; $\int$ u.

$t = \int\frac{ds}{v}$; was aber bei dem jetzigen Fall auf eine eigenthümliche Funktion führt, für die man erst allgemeine Berechnungen aufstellen müßte.

Beispiel 7.

Das vorige System beibehalten, nur daß das Rohr zwar beiderseits aber auf beiden Seiten geschlossen ist, so daß man die Kugel (d.h. der luftdicht schließende Cylinder) durch die Spannkraft des Gases eine Strecke s getrieben wird, daß nun der comprimirte Luft zurückgetreten u. also eine oscilirende Bewegung zu machen genöthigt wird. Endlich wird aber ein Moment eintreten,



wo die Kugel u. das Rohr keine Bewegung mehr haben. Man soll diesen Moment durch eine Gleichung ausdrücken.

Es sei q das Gewicht des kl. Cyl. u. Q das des großen, p u. p', π u. π' die Spannungen in den begrenzten Räumen; λ_1 die Länge des klein. Cylinders.

Man hat nun:

$$\frac{ds}{dt} = v; \quad \frac{ds_1}{dt} = v_1;$$

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{F}{q}, \quad \frac{dv_1}{dt} = g\frac{F'}{Q}$$

ferner verhält sich:

$$\pi : p = \Omega\lambda : (s+s_1+\lambda)\Omega$$

$$\pi = \frac{p\lambda}{s+s_1+\lambda};$$

$$\pi_1 : p_1 = \Omega(l-\lambda_1) : \Omega(l-\lambda_1-s-s_1)$$

$$\pi_1 = \frac{p_1(l-\lambda_1)}{l-\lambda_1-s-s_1}, \text{ daher}$$

$$F = \Omega\pi - \Omega\pi_1 = \Omega(\pi-\pi_1)$$

$$F' = \Omega\pi - \Omega\pi_1 = \Omega(\pi-\pi_1) = F$$

$$F = \Omega\left(\frac{p\lambda}{s+s_1+\lambda} - \frac{p_1(l-\lambda)}{l-\lambda_1-s-s_1}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{q}\Omega\left(\frac{p\lambda}{s+s_1+\lambda} - \frac{p_1(l-\lambda)}{l-\lambda_1-s-s_1}\right)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{g}{Q}\Omega\left(\frac{p\lambda}{s+s_1+\lambda} - \frac{p_1(l-\lambda)}{l-\lambda_1-s-s_1}\right)$$

Es ist aber $\frac{dv}{dt}q = \frac{dv_1}{dt}Q$;

$vq = Qv_1$ oder $q\frac{ds}{dt} = Q\frac{ds_1}{dt}$, daher

$$qs = Qs_1 + (C=0); \quad s_1 = \frac{q}{Q}s.$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{q}\Omega\left(\frac{p\lambda}{s+\frac{q}{Q}s+\lambda} - \frac{p_1(l-\lambda)}{l-\lambda_1-s-\frac{q}{Q}s}\right)$$

Setzen wir $\frac{g\Omega p\lambda}{q} = P$ u. $\frac{g\Omega p_1(l-\lambda)}{q} = P'$

So erhalten wir, wenn $1+\frac{q}{Q}=\gamma$:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\beta}{s\gamma+\lambda}-\frac{\beta'}{l-\lambda_1-\gamma s}.$$

$$v\,dt=ds$$

$$v\,dv=\frac{\beta\,ds}{s\gamma+\lambda}-\frac{\beta'\,ds}{l-\lambda_1-\gamma s}$$

$$\frac{v^2}{2}=\frac{\beta}{\gamma}\lg nat(\lambda+\gamma s)+\frac{\beta'}{\gamma}\lg nat(l-\lambda_1-\gamma s)+C$$

$$0=\frac{\beta}{\gamma}\lg nat\,\lambda+\frac{\beta'}{\gamma}\lg nat(l-\lambda_1)+C$$

$$C=-\frac{\beta}{\gamma}\lg nat\,\lambda-\frac{\beta'}{\gamma}\lg nat(l-\lambda_1)$$

$$\frac{v^2}{2}=\frac{\beta}{\gamma}\lg nat\left(\frac{\lambda+\gamma s}{\lambda}\right)+\frac{\beta'}{\gamma}\lg nat\left(\frac{l-\lambda_1-\gamma s}{l-\lambda_1}\right)$$

$$v=\sqrt{2\frac{\beta}{\gamma}\lg nat\left(\frac{\lambda+\gamma s}{\lambda}\right)+2\frac{\beta'}{\gamma}\lg nat\left(\frac{l-\lambda_1-\gamma s}{l-\lambda_1}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\gamma}\left[\beta\lg n.\left(1+\frac{\gamma}{\lambda}s\right)+\beta'\lg n.\left(1-\frac{\gamma}{l-\lambda_1}s\right)\right]}$$

$$v_1=\frac{q}{Q}\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\sqrt{\beta\ln\left(1+\frac{\gamma}{\lambda}s\right)+\beta'\ln\left(1-\frac{\gamma}{l-\lambda_1}s\right)}$$

$$=\frac{q}{Q}\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\sqrt{\beta\ln\left(1+\frac{\gamma}{\lambda}\frac{Q}{q}s_1\right)+\beta'\ln\left(1-\frac{\gamma}{l-\lambda_1}\frac{Q}{q}s_1\right)}$$

Nun ist $\frac{ds}{dt}=v$; $dt=\frac{ds}{v}$, $t=\int\frac{ds}{v}$, welches Integral auch hier auf [illegible] [illegible] Funktion führt.

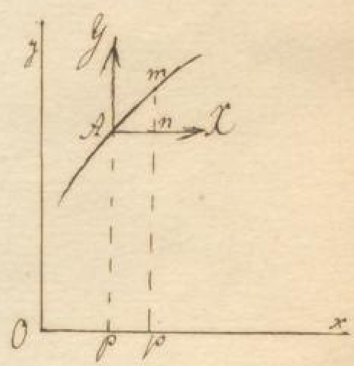
43.

Von der freien krummlinigen Bewegung.

Unter der freien krumml. Bewegung verstehen wir dies. Bewegung eines Punktes, der von Kräften verschiedener Richtung afficirt wird.

1.) Die Bahn des Punktes soll in einer Ebene liegen. Die verschiedenen Kräfte, die auf ihn wirken, haben eine Resultante R. Diese wollen wir in zwei rechtwinkliche Kräfte zerlegen.

Ferner setzen wir voraus, daß alle Massenpunkte parallele u. congruente Bahnen zurücklegen. Dann nehmen wir an, daß wenn der Punkt eine horizontale Bewegung annimmt, solche geschehe, als wenn keine vertik. Kraft da wäre; u. wenn er sich vertikal bewegt, als ob keine horizontale Kraft da wäre.



Es seien X u. Y die rechtwinkl. Seitenkräfte, die auf den Punkt A wirken; Q das Gewicht des Körp.

$OP = x$; $AP = y$

$Pp = dx$, $mn = dy$

Für die horizontale Bewegung ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{X}{Q} = \frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}$$

für die vertikale

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g\,\frac{Y}{Q} = \frac{d.\frac{dy}{dt}}{dt}.$$

die Größen X u. Y sind zuweilen constant, zuweilen Functionen von den Coordinaten.

Wir betrachten sie jetzt als Functionen von den Coordinaten.

Multipliciren wir obige Gleichungen mit 2dx u. 2dy, so erhalten wir $2dx \frac{d^2x}{dt^2} = 2g\frac{X}{Q}dx$

$$2dy\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{g}{Q}Y\,dy,$$ durch Addition

$$\frac{2dx\cdot d^2x + 2dy\,d^2y}{dt^2} = 2\frac{g}{Q}(Xdx+Ydy).$$

$$d.\frac{(dx^2+dy^2)}{dt^2} = 2\frac{g}{Q}(Xdx+Ydy)$$

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = 2\frac{g}{Q}\int(Xdx+Ydy)+C$$

dx^2+dy^2 ist aber der unendlich kleine Weg Am u. da Am = ds ist, so hat man:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{Q}\int(Xdx+Ydy)+C$$

$$\frac{ds}{dt}=v\,;\quad v^2 = 2\frac{g}{Q}\int(Xdx+Ydy)+C$$

$$\frac{Qv^2}{2g} = \int(Xdx+Ydy)+C$$

u. da $\frac{Q}{2g}$ die Masseneinheit ist:

$$Mv^2 = \int(Xdx+Ydy)$$

welches die lebendige Kraft ist.

Beispiel 1.

Es soll die Curve eines geworfenen Körpers bestimmt werden, ferner die Geschwindigkeit in jedem einzelnen Punkte der Curve.

Die Geschwindigkeit nach der ersten Ax. sei = c.

Es sei $OP = x$ u. $PM = y$.

Für diesen Fall haben wir $X = 0$

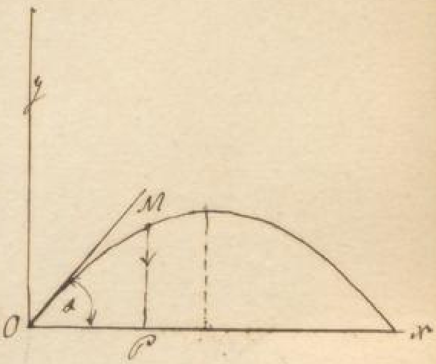
$Y = -g$, nämlich das Gewicht der Körper zieht abw.

daher $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, od. $d.\frac{dx}{dt} = 0$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g = \frac{d.\frac{dy}{dt}}{dt}.$$

$$d.\frac{dy}{dt} = -g\,dt, \quad \frac{dy}{dt} = B - gt$$

u. $\frac{dx}{dt} = A$.



$\frac{dx}{dt}$ drückt die horizontale Geschwindigkeit aus. Für $t=0$ oder für den Pkt O ist die horizontale Geschw. $= C\cos\alpha = A$ u. die vertikale $= C\sin\alpha = B$; also hat man

$$\frac{dx}{dt} = C\cos\alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = C\sin\alpha - gt$$

$$dx = C\cos\alpha\,dt$$

$$dy = C\sin\alpha\,dt - gt\,dt$$

$$x = D + C\cos\alpha\,t$$

$$y = E + C\sin\alpha\,t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

für $t=0$ ist aber $x=0$ u. $y=0$, daher die Constanten $=0$. u.

I $x = C\cos\alpha\,t$

II $y = C\sin\alpha\,t - \tfrac{1}{2}gt^2$.

Substituirt man t aus I in II:

$t = \frac{x}{C\cos\alpha}$ also

$$y = \frac{C\sin\alpha\,x}{C\cos\alpha} - \frac{1}{2}\,g\frac{x^2}{C^2\cos^2\alpha}$$

$$= \operatorname{tg}\alpha . x - \frac{1}{2}\frac{g}{C^2\cos^2\alpha}x^2$$

Dies ist aber wie man leicht sieht die Gleichung einer Kegelschnittlinie. Sucht man vermittelst der allgemeinen Gleichung des 2ten Grades diese Curve, so findet man, daß $4AC - B^2 = 0$, folglich ist die gesuchte Curve eine Parabel.

Auf einfache Weise läßt sich der höchste Punkt der Curve bestimmen, weil für diesen $\frac{dy}{dx} = 0$ ist; also

$tg\alpha - \frac{g}{c^2\cos^2\alpha} x_1 = 0$, wenn x_1 die Abscisse für den Punkt ist.

$$x_1 = \frac{tg\alpha \, c^2\cos^2\alpha}{g} = \frac{c^2}{2g}\sin 2\alpha$$

Und um die Wurfweite zu finden, setzt man (die Absc. gesucht $= 2x_1$) x. $y = 0$.

$$0 = x\,tg\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{c^2\cos^2\alpha}x^2$$

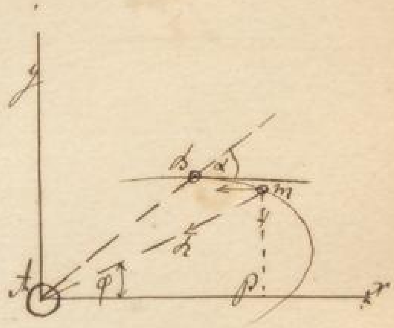
$$x^2 = 2x\,tg\alpha \cdot \frac{c^2\cos^2\alpha}{g}; \quad 0 = tg\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{c^2\cos^2\alpha}x$$

$$x = 2tg\alpha\,\frac{c^2\cos^2\alpha}{g} = \frac{c^2\sin 2\alpha}{g} = 2x_1.$$

also ist die Curve symmetrisch.

Beispiel 2.

Betrachtung der Bewegung einer geworfenen Masse um einen attractiven Punkt. z.B. in A befinde sich die Sonne u. in B die Erde.



Es sei y A x ein rechtw. Coordinatensystem.

$AP = x$, $mP = y$; t die Zeit, nach welcher der Pkt B nach m kommt.

Die Anziehungskraft K sei der Masse u. umgekehrt dem Quadrate der Entfernung proportional.

Setzen wir $Am = r$, $\angle mAP = \varphi$.

So ergeben $K = f\frac{mM}{r^2}$; ferner

f ist die Kraft, mit welcher sich zwei Masseneinheiten in der Entfernung $= 1$ anziehen.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{2m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{2m}$$

(da nämlich $g\frac{P}{Q} = g\frac{X}{Q}$, $\frac{Q}{2g} = m$, $\frac{Q}{g} = 2m$)

K wurde zerlegt in:

$$X = -K\frac{x}{r}, \quad Y = -K\frac{y}{r}$$

$$X = -f\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{x}{r}, \quad Y = -f\frac{mM}{r^2}\frac{y}{r}$$

$$= -fmM\frac{x}{r^3}; \quad Y = -fm.M\frac{y}{r^3}$$

daher
$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{1}{2} fM\frac{x}{r^3}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{1}{2} fM\frac{y}{r^3}\end{aligned}\right\} \mathrm{I}$$

Hieraus erhält man, durch Multip. mit $2dx$:

$$\frac{2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{2} fM\frac{2dx.x + 2y\,dy}{r^3}$$

$$d.\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -\frac{1}{2} fM\, d.\frac{(x^2+y^2)}{r^3}$$

$$= -\frac{1}{2} fM . \frac{d.\,r^2}{r^3}$$

$$= -\frac{1}{2} fM\frac{r\,dr}{r^2}$$

$$= -fM\frac{dr}{r^2}.$$

daher $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = f\frac{M}{r} - A$.

Nun ist aber $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2}$$

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= f\frac{M}{r} - A \\ \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2} &= f\frac{M}{r} - A \end{aligned}\right\} \text{II}.$$

Aus I erhält m. durch Mult. u. Subtr.:

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$d.\left(\frac{ydx - xdy}{dt^2}\right) = 0$$

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = -h$$

$$ydx - xdy = -h\,dt$$

Nun haben wir:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$$

$$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$ydx = r\cos\varphi\sin\varphi\, dr - r^2\sin\varphi^2\, d\varphi$$

$$\underline{xdy = r\sin\varphi\cos\varphi\, dr + r^2\cos^2\varphi\, d\varphi}$$

$$ydx - xdy = -r^2 d\varphi$$

also $r^2 d\varphi = h\,dt \ldots$ III

$dt = \frac{r^2 d\varphi}{h}$ dies in die 2te der II substit. gibt:

$$h^2\frac{(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{r^4 d\varphi^2} = f\frac{M}{r} - A.$$

$$h^2(dr^2 + r^2 d\varphi^2) = r^4 d\varphi^2\left(f\frac{M}{r} - A\right)$$

$$h^2 dr^2 = d\varphi^2\left(r^4\left(f\frac{M}{r} - A\right) - r^2 h^2\right)$$

$$h\,dr = r\,d\varphi\sqrt{r^2\left(f\frac{M}{r} - A\right) - h^2}$$

$$d\varphi = h\frac{dr}{r\sqrt{-h^2 + fMr - Ar^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{fMr - 2h^2}{r\sqrt{-4h^2A + f^2M^2}}\right) + C$$

449. u. also $\sin(\varphi-c) = \dfrac{fMr - 2h^2}{r\sqrt{f^2M^2 - 4Ah^2}}$

$$r\sin(\varphi-c)\sqrt{\ldots}\,) - fMr = -2h^2$$

$$r = \frac{2h^2}{fM - \sin(\varphi\pm c)\sqrt{\ldots}\,)}$$ oder

$$r = \frac{(2h^2 : fM)}{1 - \sqrt{1-\frac{4Ah^2}{f^2M^2}})\sin(\varphi\pm c)}$$

Dies ist die Polargleichung einer Kegelschnitts-linie, die allgemein heißt:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi-k)}$$

Setzen wir $\frac{2h^2}{fM} = p$; $\sqrt{1-\frac{4Ah^2}{f^2M^2}} = e$

u. bestimmen wir die Constante k, daß $\cos(\varphi-k) = \sin(\varphi-c)$ ist,

also $c-k = \frac{\pi}{2}$, $c = k+\frac{\pi}{2}$

so erhalten wir auch vorgenommener Transformation die allgem. Gleichg.

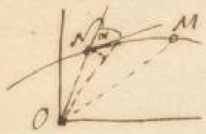
Wenn A positiv ist, so wird $e<1$ u. die Curve ist eine Ellipse.

Wenn A negativ, so wird $e>1$ u. die Curve eine Hyperbel.

Und wenn $A=0$ wäre, was jedoch nicht leicht vorkommen möchte, so würde $e=1$ u. die Curve eine Parabel sein.

Um zu untersuchen, wann A diese Werthe annimmt, so bestimmen wir die Constanten, wie folgt:

Es sei $ON = h$, C die Geschw. nach der Tgt. in N.
also für $r = h$, ist $v = C$ u.



$$C^2 = f\frac{M}{h} - A$$

$$A = f\frac{M}{h} - C^2$$ allerdings für den Anfang der Bewegung.

Nun ist $C\,dt \sin\alpha = h\,d\varphi$

$$hC\,dt\sin\alpha = h^2 d\varphi$$

$$h^2 d\varphi = b\,dt$$

$$b\,dt = hC\sin\alpha\,dt$$

$$b = hC\sin\alpha$$

Ferner wollen wir einen Ausdruck für die Axe finden.

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$ allgemein.

$$1-e^2 = \frac{4Ab^2}{f^2M^2}, \quad p = \frac{2b^2}{fM}$$

$$a = \frac{2b^2}{fM}\cdot\frac{f^2M^2}{4Ab^2} = \frac{fM}{2A}.$$

Nun schließen wir:

A ist positiv, wenn $C < \sqrt{f\frac{M}{h}}$

" " negat. " $C > \sqrt{f\frac{M}{h}}$

" $= 0$ wenn $C = \sqrt{f\frac{M}{h}}$

Wenn wir annehmen, daß die Curve eine Ellipse sei, so wollen wir die ganze Umlaufszeit bestimmen.

Wir betrachten t als $f(r.)$

$$d\varphi = \frac{b\,dt}{r^2}$$

$$\frac{dr^2 + r^2\frac{b^2dt^2}{r^4}}{dt^2} = f\frac{M}{r} - A$$

$$dr^2 + r^2 \frac{b^2 dt^2}{r^4} = \frac{fM}{r} dt^2 - A dt^2$$

$$dr^2 = dt^2 \left(\frac{fM}{r} - A - \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$= \frac{dt^2}{r^2} \left(fMr - Ar^2 - b^2 \right)$$

$$dr = \frac{dt}{r} \sqrt{-b^2 + fMr - Ar^2}$$

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{-b^2 + fMr - Ar^2}}$$

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{-b^2 + fMr - Ar^2}}$$

$$= -\frac{1}{2A} \frac{-2Ar\,dr + fM\,dr - fM\,dr}{\sqrt{\cdots\cdots}}$$

$$= -\frac{1}{2A} \frac{-2Ar\,dr + fM\,dr}{\sqrt{\cdots\cdots}} + \frac{fM}{2A} \frac{dr}{\sqrt{\cdots}}$$

$$t = -\frac{1}{A} \sqrt{-b^2 + fMr - Ar^2} + \frac{fM}{2A} \frac{dr}{\sqrt{\cdots}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A}} \arcsin \left(\frac{2Ar - fM}{\sqrt{f^2M^2 - 4Ab^2}} \right) + \vartheta$$

$$\sin \left(t + \frac{\sqrt{\cdots}}{A} - \vartheta \right) \frac{2A\sqrt{A}}{fM} = \frac{2Ar - fM}{\sqrt{f^2M^2 - 4Ab^2}}$$

Die Änderung von t nach einem ganzen Umlauf sei T, daher:

$$\sin \left(t + \frac{\sqrt{\cdots}}{A} - \vartheta \right) \frac{2A\sqrt{A}}{fM} = \sin \left(t + T + \frac{\sqrt{\cdots}}{A} - \vartheta \right) \frac{2A\sqrt{A}}{fM}$$

die Winkel müssen um 2π verschieden sein.

$$\left(t + T + \frac{\sqrt{\cdots}}{A} - \vartheta \right) \frac{2A\sqrt{A}}{fM} = \left(t + \frac{\sqrt{\cdots}}{A} - \vartheta \right) \frac{2A\sqrt{A}}{fM} + 2\pi$$

$$t + T + \frac{\sqrt{\cdots}}{A} - \vartheta = t - \frac{\sqrt{\cdots}}{A} - \vartheta + 2\pi \frac{fM}{2A\sqrt{A}}$$

$$T = \frac{\pi fM}{A^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad T^2 = \frac{\pi^2 f^2 M^2}{A^3} = (\pi fM)^2 \frac{8a^3}{f^3M^3}$$

$$T^2 = \frac{8\pi^2 a^3}{fM} \quad \text{daher}$$

$$T^2 : T'^2 = a'^3 : a^3$$

Einige Bemerkungen aus der Geschichte der Mechanik des Himmels.

Keppler stellte die drei Hauptsätze auf:
1.) daß die Bahnen der Planeten Ellipsen seien.
2.) daß die von den Fahrstrahlen beschriebenen Flächen, d.h. die Sectoren, den Zeiten proport. seien, die der Planet braucht, um den Bogen des Sectors zu durchlaufen.
3.) daß die Quadrate der Umlaufszeiten den 3ten Potenzen der großen Axen der beschrieb. Ellipsen proportional seien.

Spätere Beobachtungen zeigten, daß die Bahnen keine reinen Ellipsen seien, sondern durch die Störungen, die die Planeten selbst auf einander ausüben, Bahnen beschrieben werden, die aus lauter kleinen Bogenstückchen von Ellipsen zusammengesetzt sind.

Keppler konnte auch blos angeben, daß die Bewegung so od. so statt finde, ohne jedoch den Grund davon angeben zu können. Nun bemerkte Newton, daß je weiter ein Körper vom Mittelp. der Erde entfernt werde, desto leichter werde er, aber dennoch immer noch ein Gewicht habe,

52/53. d. h. von der Erde angezogen werde.
Er schloß weiter, daß diese Anziehung sich auch noch auf den Mond erstrecke, daß ebenso die Erde von der Sonne angezogen werde u. endlich daß jeder Körper ein Vermögen besitze den andern anzuziehen.
Er hat also das Verdienst das wichtige Princ. der Trägheit der Massen entdeckt zu haben.
Von ihm ist denn das Gesetz aufgestellt worden, daß sich die Anziehung zweier Körper verhalte, wie die Massen, u. umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen.
An der Untersuchung der gleichsam zusammengesetzten Bahnen arbeiteten zuerst Euler u. später mit dem schönsten Erfolge Lagrange u. Laplace.
Bei diesen Berechnungen kamen ihnen gut zu Statten:
1.) daß die Excentricitäten der Bahnen sehr klein sind, so daß sie Kreisen nahe kommen.
2. daß die Flächen der Bahnen nur geringe Neigung gegen einander haben.
3.) daß die große Axe bei allen Ellipsen eine constante Größe ist.

Laplace fand, daß

$$m_1\sqrt{a_1}\, e_1^2 + m_2\sqrt{a_2}\, e_2^2 + m_3\sqrt{a_3}\, e_3^2 + \ldots = \text{Constant}.$$

d. h. die Summe der Producte aus den Massen in Quadratwurzel aus der großen Axe u. in das Quadrat der Excentricität gleich einer Constanten.

Auch die Frage suchten diese beiden Männer, ob nicht durch diese Störungen nach Jahrhunderten od. Jahrtausenden auf die jetzt vorhandene organische Welt auf den Planeten ein zerstörender Einfluß geübt werde? Sie fanden, daß die Unregelmäßigkeiten der Planeten nicht in einfachen Verhältnissen, sondern in sehr verwickelten zu einander stehen, und also jene Frage verneint. Es müßte denn ein unerwarteter Weltkörper in das Planetensystem treten, der gewaltsame Störungen verursachen könnte.

Betrachtung der Bewegung einer Masse im Raume.

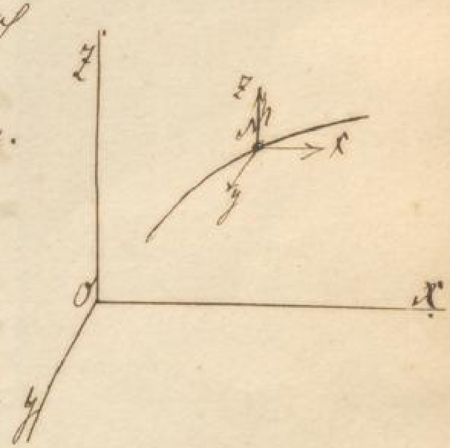
Es sei X O Y Z ein rechtwinkl. Coordinatensystem. Wir zerlegen die Resultante der Kräfte, die auf den Punkt M wirken in 3 rechtw. Componenten nach den x, y u. z, sie seien X, Y u. Z.
Wir nehmen wieder an die Bewegung nach einer Richtung geschähe, als ob die beiden anderen Kräfte gar nicht vorhanden wären.

Wir haben: da $Q = 2gm$

$$\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = g\frac{P}{Q} = g\frac{X}{2gm} = \frac{X}{2m}$$

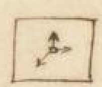
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{2m}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{2m}$$



Beispiel.

Wenn ein Massentheilchen etwa in einem Krystall verschoben wird, so wirken dieser Verschiebung nach verschiedenen Richtungen verschiedene Widerstände entgegen.



Wir wollen daher diese entgegen wirkenden Kräfte $X = -\alpha x$, $Y = -\beta y$, u. $Z = -\gamma z$ setzen, so werden wir durch Substitution in obige Gleichungen erhalten:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{2m}x = 0.$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\beta}{2m}y = 0$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\gamma}{2m}z = 0$$

Setzen wir $\frac{\alpha}{2m} = a$, $\frac{\beta}{2m} = b$, $\frac{\gamma}{2m} = c$
so ergibt sich

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + by = 0$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + cz = 0$$

Da wir jede Gleichung für sich integriren können, so folgt, was wir voraussetzten, daß die Bewegung nach der einen Richtung von den beiden andern unabhängig ist.

Durch Integration obiger Gleichungen erhält man:

$$x = A \sin at + B \cos at$$
$$y = A_1 \sin bt + B_1 \cos bt$$
$$z = A_2 \sin ct + B_2 \cos ct.$$

Wir sehen, daß die Grenzen der Kräfte, da die Sin. u. Cos. zur Grenze 1 haben, eine gewisse Grenze nicht überschreiten können, also eine mehr od. weniger oscillirende Bewegung zur Folge haben.

Unter der Voraussetzung, daß der Punkt blos verrückt würde, ohne ihm eine anfängliche Geschwindigkeit mitzutheilen, $\frac{dx}{dt} = 0$ für $t = 0$.

56. 57. $\frac{dz}{dt} = a(A\cos at + L\sin at)$
$0 = A.1$, also müssen $A, A_1, A_2 = 0$ sein.

Für den Fall, daß der Punkt einen Stoß erlitten, also eine anfängliche Geschwindigkeit gehabt hätte, ist für $t=0$,

$x = B\cos at$, $0 = B_{1,2}.1$ also müssen $B, B_1, B_2 = 0$ sein.
$y = B_1 \cos bt$
$z = B_2 \cos ct$

Hierher gehört z.B. die schwingende Bewegung des Äthers.

Überhaupt wären wir jetzt auf dem Standpunkte angelangt, wo wir die Probleme der mathem. Physik lösen könnten. Unser Ziel aber ist die Mechanik des Maschinenbau.
In der Physik handelt es sich um Auffindung der Gesetze der Bewegung bei gewissen (speciellen) wirkenden Naturkräften. Dagegen in der Mechanik sind die Wege u. die Geschwindigkeiten gegeben, man soll das System von Kräften ermitteln, welche nothwendig sind, die verlangte Bewegung zu erzielen. In der Mechanik handelt es sich nur um Gleichungen fürs Gleichgewicht zwischen den activen Kräften u. den passiven Massen.

Aus obigen allgemeinen Gleichungen erhält man:

$$\frac{2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y + 2dz\,d^2z}{dt^2} =$$

$$= \frac{1}{m}(Xdx + Ydy + Zdz)$$

$$d.\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} = \frac{1}{m}(Xdx + Ydy + Zdz)$$

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{1}{m}\int(Xdx + Ydy + Zdz) + C$$

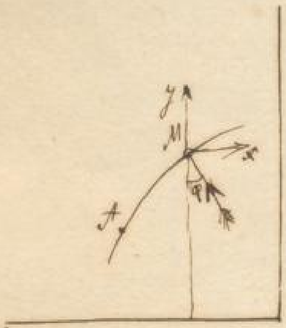
$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = \frac{1}{m}\int(Xdx + Ydy + Zdz) + C$$

Wenn wir für unsern speciellen Fall substituiren, so erhalten wir:

$$Xdx + Ydy + Zdz = -(\alpha x dx + \beta y dy + \gamma z dz)$$

$$= -\frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)$$

$$v^2 = C - \frac{1}{2m}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)$$



Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn.

Die Bahn sei z. B. ein Draht od. eine Röhre, an od. in dem sich der Körper bewegen muß, man soll die Geschwindigkeit des Körpers in verschiedenen Punkten bestimmen, wenn gegebene Kräfte auf ihn wirken.

Zur Lösung dieser Aufgabe verwandeln wir die Bewegung in eine freie. Dabei haben wir zu erwägen, daß in jedem Punkt der Bahn ein Widerstand gegen den Körper von der Bahn selbst ausgeübt wird, wir betrachten ihn, die

59. Der normal auf die Curve wirkt, mit N. Die übrigen Kräfte seien durch die Richtgn. X u. Y dargestellt.

Es sei $OP = x$, $MP = y$, $AM = s$.

Nach horizontaler Richtg wirkt:

$X + N\sin\varphi$ u. nach vertikal.

$Y - N\cos\varphi$

daher setzen wir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2m}(X + N\sin\varphi)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2m}(Y - N\cos\varphi)$$

Um die Geschwindigkeit zu finden, elim. man N. weg, indem man die 1te Gl. mit $\cos\varphi$ u. die 2te mit $\sin\varphi$ multip. u. sie addirt.

$$\cos\varphi\frac{d^2x}{dt^2} + \sin\varphi\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2m}(X\cos\varphi + Y\sin\varphi) \quad \text{I}$$

u. wenn man die erste mit $\sin\varphi$, die 2te $\cos\varphi$ u. von einander abzieht, erhält man.

$$\sin\varphi\frac{d^2x}{dt^2} - \cos\varphi\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2m}(N + X\sin\varphi - Y\cos\varphi) \quad \text{II.}$$

Nun ist aber $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$, $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$, daher

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2m}(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)$$

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{ds\,dt^2} = \frac{1}{2m}(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds}\right)$$

$$d.\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{2}{2m}(X\,dx + Y\,dy)$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = \frac{1}{2m}\int(X\,dx + Y\,dy) + C$$

Dies wäre also die Geschwindigkeit in dem Punkte M. — Wir suchen nun N.

vermittelst der Gleichg. II auf ähnliche Art wie v bestimmt wurde. 60. 61.

Es ist $dy\frac{d^2x}{ds\,dt^2} - dx\frac{d^2y}{ds\,dt^2} = \frac{1}{2m}\left(N + X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds}\right)$

$$\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds\,dt^2} = \frac{1}{2m}\left(N + \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}\right)$$

Es ist aber der Krümmungshalbmesser für den Punkt M: $\rho = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$

$$dy\,d^2x - dx\,d^2y = \frac{ds^3}{\rho};$$

$$\frac{ds^3}{\rho}\cdot\frac{1}{ds\,dt^2} = \frac{N}{2m} + \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}$$

$$\frac{ds^2}{\rho\,dt^2} = \frac{N}{2m} + \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}$$

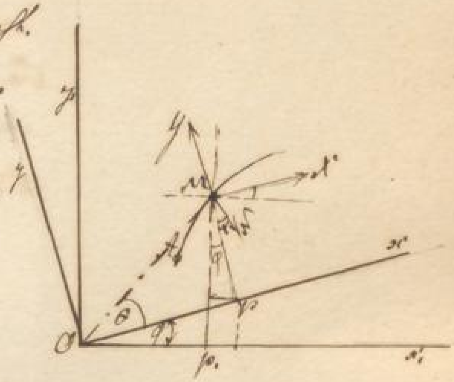
$$N = \frac{Y\,dx}{ds} - \frac{X\,dy}{ds} + \frac{2m}{\rho}\left(\frac{ds^2}{dt^2}\right)$$

$$= Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds} + \frac{2mv^2}{\rho}.$$

Beispiel 1.

Man soll die Gesetze der Bewegung finden, wenn etwa bei einer Turbine die Wassermasse mit einer gewissen Geschw. in das kreisend gehende Rad tritt, u. indem sie dadurch auf die krummen Schaufelflächen stößt, die Bewegung des Rades verursacht, welche Bewegung also auch das Wasser mitmachen muß. Wir betrachten wieder die Bewegung als freie u. bringen nur auf den Schaufelfläche normale Kraft N an.

60. 61. Um unseren Zweck zu erreichen, bedienen wir uns eines zweiten Coordinatensystems, das fest ist u. eines das die drehende Bewegung mitmacht. yx beweglich; $y_1 x_1$ fest. $Op_1 = x_1$, $Mp_1 = y_1$. $AM = l$, $Op_2 = x_2$, $Mp_2 = y$.



Die Kräfte $\parallel Ox_1$ sind:

$$-Y\sin\varphi + X\cos\varphi + N\sin(\varphi+\psi)$$

die Kräfte $\parallel Oy_1$ sind:

$$Y\cos\varphi + X\sin\varphi - N\cos(\varphi+\psi)$$

Es sei Q das Gewicht des bewegten Massentheils. Es ist:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{g}{Q}\left(X\cos\varphi - Y\sin\varphi + N\sin(\varphi+\psi)\right)$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{g}{Q}\left(X\sin\varphi + Y\cos\varphi - N\cos(\varphi+\psi)\right)$$

$$\cos(\varphi+\psi)\frac{d^2x_1}{dt^2} + \sin(\varphi+\psi)\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{g}{Q}(X\cos\psi + Y\sin\psi)$$

Wir setzen nämlich voraus, die drehende Bewegung sei uns bekannt, u. wir haben es demnach nur mit der einfachen Bewegung zu thun, die die genannten Kräfte hervorrufen.

Wir nehmen nun eine Transformation der Gleichung für das andere Axensystem vor. Es ist, wenn $OM = \rho$, $\angle MOx = \theta$ gesetzt wird:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta$$

$$x_1 = \rho\cos(\theta+\varphi), \quad y_1 = \rho\sin(\theta+\varphi)$$

Nun ist

$$x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$

$$y_1 = y\cos\varphi + x\sin\varphi$$

Um $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ zu finden, müssen wir 2mal diff.

$$dx_1 = \cos\varphi\, dx - x \sin\varphi\, d\varphi - dy \sin\varphi - y\cos\varphi\, d\varphi$$

$$dy_1 = \sin\varphi\, dx + x\cos\varphi\, d\varphi + \cos\varphi\, dy - y \sin\varphi\, d\varphi$$

Da wir voraussetzten, daß die drehende Bewegung gleichförmig sei, welche φ aber $= \alpha t$ daher $\frac{d\varphi}{dt} = \alpha$, so ist $d^2\varphi = 0$; also daher:

$$d^2x_1 = \begin{cases} \cos\varphi\, d^2x - \sin\varphi\, dx\, d\varphi - \sin\varphi\, d\varphi\, dx - x\cos\varphi\, d\varphi^2 - \\ - d^2y \sin\varphi - dy \cos\varphi\, d\varphi - dy\, d\varphi \cos\varphi + y \sin\varphi\, d\varphi^2. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cos\varphi\, d^2x - 2\sin\varphi\, dx\, d\varphi - 2\cos\varphi\, d\varphi\, dy - \\ - (x\cos\varphi - y\sin\varphi)\, d\varphi^2 - \sin\varphi\, d^2y. \end{cases}$$

$$d^2y_1 = \begin{cases} \sin\varphi\, d^2x + \cos\varphi\, d\varphi\, dx + \cos\varphi\, dx\, d\varphi - x\sin\varphi\, d\varphi^2 + \\ + \cos\varphi\, d^2y - \sin\varphi\, d\varphi\, dy - \sin\varphi\, dy\, d\varphi - y\cos\varphi\, d\varphi^2. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sin\varphi\, d^2x + 2\cos\varphi\, dx\, d\varphi - 2\sin\varphi\, dy\, d\varphi - (x\sin\varphi + y\cos\varphi)\, d\varphi^2 \\ + \cos\varphi\, d^2y. \end{cases}$$

durch Multipl. u. Addit. erhält man:

$$\cos(\varphi+\psi)\frac{d^2x_1}{dt^2} + \sin(\varphi+\psi)\frac{d^2y_1}{dt^2} = \cos\psi \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2\, dx\, d\varphi \sin\psi}{dt^2} - \frac{2\, dy\, d\varphi \cos\psi}{dt^2} - (x\cos\psi + y\sin\psi)\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{d^2y \sin\psi}{dt^2}.$$

Es ist aber $\cos\psi = \frac{dx}{ds}$ u. $\sin\psi = \frac{dy}{ds}$, daher:

$$\cos(\varphi+\psi)\frac{d^2x_1}{dt^2} + \sin(\varphi+\psi)\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{dx\, d^2x}{ds\, dt^2} + 2\frac{dx\, dy\, d\varphi}{ds\, dt^2} - 2\frac{dy\, d\varphi\, dx}{ds\, dt^2} - \left(\frac{x\,dx + y\,dy}{ds}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{d^2y\, dy}{ds\, dt^2}.$$

also haben wir auch:

$$\frac{dx\, d^2x + dy\, d^2y}{ds\, dt^2} - \frac{x\,dx + y\,dy}{ds}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 =$$

$$= \frac{g}{a}\left(\frac{X dx + Y dy}{ds}\right).$$

$$\frac{1}{2} d.\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2} d.(x^2+y^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a}(X dx + Y dy)$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - (x^2+y^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a}\int (X dx + Y dy) + C$$

63. Nun ist aber $\frac{ds}{dt} = v$ die relative Geschw., d. h. diej. Geschw. der Masse, welche der Beobachter, der sich mit dem Rad herumbewegt, bemerkt. Ferner drückt $\frac{d\varphi}{dt} = \gamma$ die Winkelgeschwind. des Rades aus. Wir erhalten daher:

$$v^2 - r^2\gamma^2 = \frac{2g}{Q}\int(Xdx + Ydy) + C$$

$$v^2 = \frac{2g}{Q}\int(Xdx + Ydy) + r^2\gamma^2 + C$$

Zur Bestimmung der Constanten, haben wir, wenn die relative Geschw. in $A = v_0$ benannt ist u. $OA = r_0$ gesetzt wird:

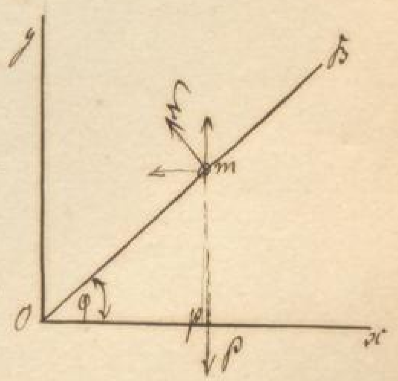
$$v_0^2 = -0 + r_0^2\gamma^2 + C$$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2g}{Q}\int(Xdx + Ydy) + \gamma^2(r^2 - r_0^2)$$

Den ersten Theil würden wir erhalten haben, wenn wir blos die Bewegung an der Curve ohne Drehung des Rades betrachtet haben würden.
Dies ist auch die Gleichg. für die Erhaltung der lebendigen Kräfte.

Beispiel 2.

Es sei der Stab OB in O fest, daß so daß er sich in einer vertikalen Ebene um den Punkt O drehen kann. An ihm gleite eine Masse auf u. ab, deren Gewicht = P ist; die Geschw. des Stabes sei gleichförmig; es soll also blos die Bewegung der Masse m untersucht werden.



Wir verwandeln wieder die Bewegung in eine freie, so dass eine Kraft N die Bahn ersetzt.

Es ist $op = x$, $mp = y$, $mo = r$.

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{p} N \sin\varphi$

$\frac{d^2y}{dt^2} = g\frac{(N\cos\varphi - P)}{p} = g\frac{N}{p}\cos\varphi - g$

durch Multipl. u. Add. erhält man:

I $\cos\varphi \frac{d^2x}{dt^2} + \sin\varphi \frac{d^2y}{dt^2} = -g\sin\varphi$

Nun ist $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$

$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$

Da die Bewegung gleichförmig, so ist $d\varphi$ constant.

also $d^2x = \cos\varphi\, d^2r - \sin\varphi\, d\varphi\, dr - \sin\varphi\, d\varphi\, dr - r\cos\varphi\, d\varphi^2$

$d^2y = \sin\varphi\, d^2r + \cos\varphi\, d\varphi\, dr + \cos\varphi\, d\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi^2$

Wieder durch Multip. u. Add. erhält m.:

$\cos\varphi \frac{d^2x}{dt^2} + \sin\varphi \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r\,d\varphi^2}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} - r\alpha^2$

nämlich $\frac{d\varphi}{dt} = \alpha$ = der Winkelgeschwindigkeit.

Durch Substitution in I erhält m.:

II $\frac{d^2r}{dt^2} = r\alpha^2 - g\sin\varphi$.

Nun ist $d\varphi = \alpha dt$, u. $\varphi = \alpha t + \beta$,

wir können aber auch $\beta = 0$ setzen, d.h. dass für $t = 0$, $\varphi = 0$, die Bewegung geschieht in diesem Augenblick in der Horizontalebene.

Die Gleichung II erscheint daher unter der neuen Form $\frac{d^2r}{dt^2} = r\alpha^2 - g\sin\alpha t$.

diese Gleichung aber läßt sich nicht auf gewöhnliche Weise integriren; versuchen wir es daher durch die Methode der __Variation der Constanten.__

Integriren wir zuerst, als ob alles sich in einer horizontalen Ebene bewegte.

$\frac{d^2z}{dt^2} = z\alpha^2$. u. es sei nun

$z = \mathfrak{A} e^{\alpha t} + \mathfrak{B} e^{-\alpha t}$

denn setzen wir $z = e^{mt}$, so ist

$dz = m e^{mt} dt$

$d^2z = m^2 e^{mt} dt^2$, $\frac{d^2z}{dt^2} = m^2 e^{mt}$

für unseren Fall ist aber $m = \alpha$, daher

$z = \mathfrak{A} e^{\alpha t}$ u. $\mathfrak{B} e^{-\alpha t}$ kann auch sein;

Betrachten wir $\mathfrak{A}$ u. $\mathfrak{B}$ als veränderlich, so ist:

$$\frac{dz}{dt} = \alpha(\mathfrak{A} e^{\alpha t} - \mathfrak{B} e^{-\alpha t})$$

$$0 = e^{\alpha t}\frac{d\mathfrak{A}}{dt} + e^{-\alpha t}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \alpha^2(\mathfrak{A} e^{\alpha t} + \mathfrak{B} e^{-\alpha t}) + \alpha\left(e^{\alpha t}\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - e^{-\alpha t}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right)$$

$$= \alpha^2 z + \alpha\left(e^{\alpha t}\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - e^{-\alpha t}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right)$$

$$-\frac{g}{\alpha}\sin\alpha t = e^{\alpha t}\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - e^{-\alpha t}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$$

$$2 e^{\alpha t}\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = -\frac{g}{\alpha}\sin\alpha t$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = -\frac{g}{2\alpha} e^{-\alpha t}\sin\alpha t$$

$$\mathfrak{A} = -\frac{g}{2\alpha}\int(e^{-\alpha t}\sin\alpha t . dt)$$

$$\frac{g}{2\alpha}\sin\alpha t\, e^{\alpha t} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{g}{2\alpha}\int(e^{\alpha t}\sin\alpha t . dt)$$

Setzen wir $J = \int e^{\alpha t}\sin\alpha t.dt$ u. integriren durch theilweise Integration, d.h. setzen wir $e^{\alpha t}dt = dv$, u. $\sin\alpha t = u$

$$v = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}, \quad du = \cos\alpha t\,dt, \text{ daher}$$

$$J = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}\sin\alpha t - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha t}\cos\alpha t\,dt$$

u. wiederholt durch theilw. Integr. erhält man, wenn $\cos\alpha t = u$, $du = -\sin\alpha t.dt$;

$$e^{\alpha t}dt = dv, \quad v = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$$

$$J = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin\alpha t - \left\{\frac{1}{\alpha}\cos\alpha t\, e^{\alpha t} + J\right\}$$

$$J = \frac{1}{2\alpha}e^{\alpha t}(\sin\alpha t - \cos\alpha t)$$

$$C = \frac{g}{2\alpha}\cdot\frac{1}{2\alpha}e^{\alpha t}(\sin\alpha t - \cos\alpha t) + M$$

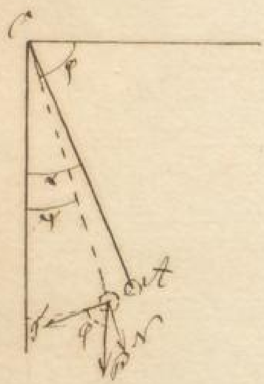
$$K = \frac{g}{2\alpha}\cdot\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha t}(\sin\alpha t + \cos\alpha t) + N$$

$$r = e^{\alpha t}\left\{\frac{g}{4\alpha^2}e^{-\alpha t}(\sin\alpha t + \cos\alpha t) + N\right\} + e^{-\alpha t}\left(\frac{g}{4\alpha^2}e^{\alpha t}(\sin\alpha t - \cos\alpha t) + M\right)$$

$$= \frac{g}{2\alpha^2}\sin\alpha t + N e^{\alpha t} + M e^{-\alpha t}$$

wodurch also r bestimmt ist.

Betrachtung über die Bewegung des Pendels.



Es sei AC eine steifen unbiegsam. Linie, ein Körper, dessen Gew. P ist, befestigt, in C sei der Drehpunkt des Pendels. Im Augenblick der Ruhe wird das Pendel senkrechte Stellung annehmen, aus dieser hebe man es nun um den $\angle\alpha$ nach A gehoben, nun nun sind wir die Bewegung betrachten.

67. Lassen wir den Körper in A los, so wird er sich vermöge seiner Schwere der senkrechten Lage nähern. Nach dem ersten Augenblicke der Bewegung sei die Geschwindigkeit = dv; ferner sei $AC = r$, u. die Seitenkräfte v. $P = N$ u. T.

Man hat daher:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{p}\,T, \quad \text{es ist aber}$$

$$T = P\cos\varphi, \quad \text{daher}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\cos\varphi; \text{ u. da } \frac{d\varphi}{dt} = \text{Winkelgeschw.}$$

$$v = r\,\frac{d\varphi}{dt}$$

$$v\,dv = g r \cos\varphi\, d\varphi$$

$$\frac{v^2}{2} = +g r \sin\varphi + C$$

für $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, ist $v = 0$.

$$0 = +g r \cos\alpha + C$$

$$\frac{v^2}{2} = g r(\sin\varphi - \cos\alpha)$$

$$v = \sqrt{2gr}\,\sqrt{(\sin\varphi - \cos\alpha)}.$$

oder da $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, $d\varphi = -d\psi$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}, \quad v = -r\,\frac{d\psi}{dt}$$

$$-r\,\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{2gr}\,\sqrt{(\sin\varphi - \cos\alpha)}$$

$$\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{r}}\,.\,dt = -\frac{d\psi}{\sqrt{(\sin\varphi - \cos\alpha)}}$$

$$\sqrt{\frac{2g}{r}}\,.\,t = -\int\frac{d\psi}{\sqrt{(\sin\varphi - \cos\alpha)}}$$

Dies führt wieder zu einer eigenthümlichen Funktion und lässt sich also das Integr. von dieser Größe nicht durch einen geschlossenen

Ausdruck darstellen, wohl aber durch eine Reihe, wenn nämlich die Winkel φ u. α sehr klein sind, so daß man

$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$, u. $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ setzen kann, u. die übrigen Glieder der Reihen vernachlässigt, dann ist

$\cos\varphi - \cos\alpha = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \varphi^2)$, daher

$$\sqrt{\tfrac{2g}{l}}\,.\,t = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2-\varphi^2)}}$$

$$\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,.\,t = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}} = \arccos\frac{\varphi}{\alpha} + C$$

für $t = 0$ ist $\varphi = \alpha$, also $C = 0$.

u. also $t.\sqrt{\frac{g}{l}} = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}} = \arccos\frac{\varphi}{\alpha}$

folglich $\varphi = \alpha\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$

Bezeichnet T' die ganze Schwingungszeit, so ist für $\varphi = 0$, $t = \frac{T'}{2}$

$$\frac{T'}{2}\sqrt{\tfrac{g}{l}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{u.} \quad T' = \sqrt{\tfrac{l}{g}}\,.\,\pi,$$

Untersuchen wir dieselbe Bewegung nochmal, aber mit Rücksicht auf die Widerstände, die wir der 1ten Potenz der Geschwindigkeit proportional annehmen, also etwa $= \beta v = W$.

$$\frac{dv}{dt} = g\,\frac{T - W}{P} = g\,\frac{P\cos\varphi - \beta v}{P}$$

$$= g\cos\varphi - g\frac{\beta}{P}v \quad \text{u. wenn } g\frac{\beta}{P} = \lambda \text{ gesetzt}$$

$$= g\cos\varphi - \lambda v$$

Wir haben wieder $\frac{ds}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}$

$$l\frac{ds}{dt} = -l\frac{d\varphi}{dt} \quad b.$$

$$v = -r\frac{d\psi}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = -r\frac{d^2\psi}{dt^2}$$

$$-r\frac{d^2\psi}{dt^2} = g\sin\psi + \lambda r\frac{d\psi}{dt}$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{g}{r}\sin\psi + \lambda\frac{d\psi}{dt} = 0$$

Wieder ein Ausdruck der nicht durch die gewöhnlichen Mittel integrirbar ist. Wenn aber ψ so klein, daß $\sin\psi = \psi$ so erhält man $\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{g}{r}\psi + \lambda\frac{d\psi}{dt} = 0$ was sich integriren läßt; nämlich durch Substitutionen; daß man etwa $\psi = e^{mt}$ setzt u. m so bestimmt, daß es der Gleichung genüge. Es läßt sich dann auch die Schwingungszeit berechnen.

Von der Bewegung der Massen.

Bisher betrachteten wir die Bewegung einzelner Punkte, od. doch nur solcher Massen, die wir uns in einem Punkt vereinigt denken konnten; od. von Massen, deren Punkte alle parallele u. congruente Bahnen beschreiben. Dies ist aber sehr seltener Fall. — Wenn ein Körper z. B. sich um eine Axe dreht, so kann man nicht

mehr gegen den Körp. od. die Masse hat die 70.
u. die Geschw., sond. jeder einzelne Punkt
hat wieder eine besondere Geschwindigkeit;
u. hiebei die Bedingungen des Gleichgewichts
zu finden, gibt uns Anleitung

das D'Alembert'sche Princip.

Stellen wir uns ein System von Massentheilchen vor, die durch äußere einwirkende Kräfte in Bewegung gesetzt wird, so können wir uns wohl auch ein Massentheilchen im Innern des Systems denken, das sich blos durch die Wirkung des Druckes der oben ihm liegenden Theilchen auf einer Bahn bewegt.

z. B. Von A aus habe sich ein solches Massentheilchen nach m bewegt, dort eine Geschw. = v erlangt; nach der Zeit t u. nach Zurücklegung eines Wegs = s, so wird es sich nach der Zeit dt mit einer Geschw. dv in n befinden u. einen Weg ds zurückgelegt haben. Offenbar wird aber Gleichgewicht bestehen, wenn wir tangential u. d. Richtg. eine Kraft auf das Theilchen wirken lassen, welche gleich der ist, die der Beschleunigung der Geschwindigkeit entspricht.

Daher ist, wenn q die Masse des Theilchens, K die bewegende Kraft ist $dv = g\frac{K}{q}dt$ ./.

u. $K = \frac{q}{g}\frac{dv}{dt}$; (u. wenn K_1, K_2 … u. q_1, q_2 … die entspr. Kräfte u. Gewichte für andere Punkte sind)

$K_1 = \frac{q_1}{g}\frac{dv_1}{dt}$

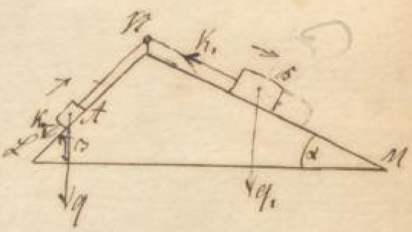
$K_2 = \frac{q_2}{g}\frac{dv_2}{dt}$

⋮

u. so für beliebig viele Punkte, u. wenn P_1, P_2, P_3 … die äußeren Kräfte sind: daher ist, sagten wir oben, wenn alle diese Kräfte entgegengesetzt angebracht werden, das System im Gleichgewicht.

Beispiel 1.

Auf zwei schiefen Ebenen befinden sich zwei durch ein Seil miteinander verbundene Körper A u. B; in N ist ein Ring, wodurch das Seil sich bewegen kann. Die Bewegung erfolgt nach der Richtg LN u. NM, so daß in A u. B die Geschw. = v u. einen Augenblick nachher dv ist.



Nun bringe ich eine Kraft $K = \frac{q}{g}\frac{dv}{dt}$ u. $K_1 = \frac{q_1}{g}\frac{dv_1}{dt}$ entgegengesetzt an, so muß Gleichgewicht bestehen. Die Gleichgewichtsgleichung können wir nun vermittelst der statischen Momente oder vermittelst des Princ. der virtuellen Geschwindigkeit herleiten. – Wir thun das letztere.

Ist nun σ der unendlich kleine Weg, den q so haben wir:

$$-K_1\sigma + q_1\sigma\sin\alpha - K\sigma - q\sigma\sin\beta = 0$$

od. $0 = q_1\sin\alpha - q\sin\beta - (K+K_1)$

$$K+K_1 = q_1\sin\alpha - q\sin\beta;$$

substituirt man die Werthe von K u. K_1

$$\frac{dv}{g\,dt}(q+q_1) = q_1\sin\alpha - q\sin\beta$$

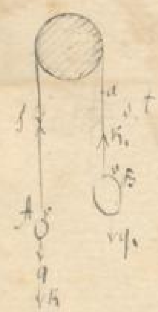
$$dv = g\,\frac{(q_1\sin\alpha - q\sin\beta)}{q+q_1}\,dt$$

$$v = g\,\frac{(q_1\sin\alpha - q\sin\beta)}{q+q_1}\,t + a$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \text{- - - - -}$$

$$s = g\,\frac{(q_1\sin\alpha - q\sin\beta)}{q+q_1}\,\tfrac{1}{2}t^2 + at + b$$

Beispiel 2.



Über einen festen Cylinder ist ein Seil gelegt, an dem zwei Lasten hängen in A u. B, wo die Geschw. $= v$ ist. Wir nehmen keine Rücksicht auf Reibung.

Wenn q u. q_1 die Gewichte, K u. K_1 die der Bewegung entgegengesetzte Kräfte, so ist

$$K = \frac{q}{g}\frac{dv}{dt}$$

$$K_1 = \frac{q_1}{g}\frac{dv}{dt}$$, nun ist aber:

$$q_1 = K_1 + q + K$$

$$q_1 - q = K_1 + K = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{g}(q+q_1)$$

$$\frac{dv}{dt} = g\left(\frac{q_1-q}{q_1+q}\right)$$

$$v = g\left(\frac{q_1-q}{q_1+q}\right)t + a.$$ u. der

727.

$$v = \frac{ds}{dt} = g\left(\frac{q_1-q}{q_1+q}\right)t + a$$

$$s = g\left(\frac{q_1-q}{q_1+q}\right)\frac{t^2}{2} + at + b$$

Um die Spannung im Seile selbst zu finden, zerschneide m. das Seil an der fraglichen Stelle u. bringe 2 entsprechende Kräfte T u. S dafür an.

$$T = q + K = q + \frac{q}{g}\frac{dv}{dt}$$

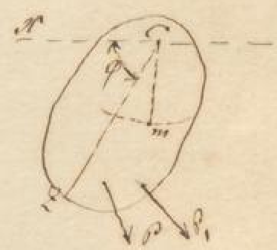
$$= q + \frac{q}{g}\cdot g\left(\frac{q_1-q}{q_1+q}\right)$$

$$= q\left(1+\frac{q_1-q}{q_1+q}\right) = \frac{2q\cdot q_1}{q_1+q}$$

Wenn die Gewichte gleich sind, so ist entweder gar keine Bewegung vorhanden, oder sie ist gleichförmig.

Beispiel 3.

Wir betrachten hier die drehende Bewegung eines Körpers um eine feste Axe C. Wir setzen voraus, daß der Körper nicht schwer sei, sondern in Folge der einwirkenden äußeren Kräfte P, P_1, P_2 etc. die Bewegung annehme. Ziehen wir durch C eine horizontale feste CX u. im Körp. selbst CZ als bewegliche Linie, so soll φ den $\angle$ bedeuten, den sie miteinander einschließen nach der Zeit t, $d\varphi$ nach der Zeit dt, u. $\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschw.



6

Man denke sich wieder ein kleines Massentheilchen im Innern, dessen Entfernung von der Axe = ρ sei, u. das sich bewegen muß, weil eben der ganze Körper bewegt wird.

Nun frägt es sich nach dem Dalemb. Princip, welche Kräfte müssten wir hinzufügen, daß sie mit den vorhandenen im Gleichgewicht sind. Dies finden wir wie folgt: die Geschw. des Theilchens m ist nach der Zeit t $= \rho \frac{d\varphi}{dt}$ u. im nächsten Zeitelement ist die Geschwindigkeitsänderung $d.(\rho \frac{d\varphi}{dt})$, folglich $d.\rho \frac{d\varphi}{dt} = g \frac{k}{m} dt$, wenn k die diese Geschwindigkeitsänd. hervorbringende Kraft ist, u. m die Masse des Theilch.

$$k = \frac{m}{g} \rho \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$ u. für andere Theilchen

$$k_1 = \frac{m_1}{g} \rho_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$k_2 = \frac{m_2}{g} \rho_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Stellen wir nun die Gleichg. fürs Gleichgewicht auf, bezeichnen zu dem Zweck die Hebelarm. von C auf die Richtungslin. der Kräfte $P, P_1, P_2, \ldots$ mit r, r_1, r_2; so hat man:

$$Pr + P_1 r_1 + P_2 r_2 + \ldots = k\rho + k_1\rho_1 + k_2\rho_2 + \ldots$$

u. durch Substitution, erhält man.

$$P z + P_1 z_1 + P_2 z_2 + \dots = \frac{1}{g}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(m\rho^2 + m_1\rho_1^2 + m_2\rho_2^2 + \dots\right)$$

od. $$\Sigma_1 P z = \frac{1}{g}\frac{d^2\varphi}{dt^2} S\rho^2 m$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\,\frac{\Sigma_1 P z}{S\rho^2 m}$$

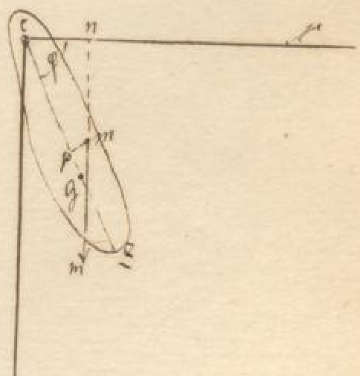
$\Sigma_1 P z$ bedeutet die Kraft, die in der Entfernung $= 1$ von der Axe an einer Masse $M_1 = S\rho^2 m$, die in jenem vereinigt gedacht wird, wirkend, dieselbe Bewegung hervorbrächte, wie sie die anderen Kräfte zusammen hervorbringen.

Wenn die Kräfte constant sind, haben:

$$\frac{d\varphi}{dt} = g\,\frac{\Sigma_1 P z}{S\rho^2 m}\,t + C$$

$$d\varphi = g\,\frac{\Sigma P z}{S\rho^2 m}\,t\,dt + C\,dt$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2} g t^2\,\frac{\Sigma_1 P z}{S\rho^2 m} + Ct + D.$$



Beispiel. 4

Untersuchung der Bewegung des zusammengesetzten Pendels. CZ sei eine durch den Schwerp. G des Körpers gezogene Gerade, welche mit der Horizontalen CX einen Winkel φ bildet. Alle Körpertheilchen werden von senkrechten Kräften afficirt (die Schwere), welches hier die äusseren Kräfte sind. Wir haben nur in obiger Formel

$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\frac{\Sigma_1 P_r}{\Sigma\rho^2 m}$ zu substituiren.

Für ein Massentheilchen m haben wir das Stat. Moment $= m(cn)$; setzen wir aber $cp = x$, $mp = y$, so ist:

$$cn = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

$$\Sigma_1 P_r = \Sigma_1 m(x\cos\varphi + y\sin\varphi)$$

$$= \cos\varphi\,\Sigma_1 mx + \sin\varphi\,\Sigma_1 my$$

Wenn M die Masse des ganzen Körpers, h die Entf. des Schwerp. von der Drehaxe, so ist $\Sigma_1 P_r = Mh\cos\varphi$ daher

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \cancel{g\frac{\Sigma_1 P_r}{Mh\cos\varphi}}\ g\frac{Mh\cos\varphi}{\Sigma\rho^2 m}$$

$$2d\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\frac{Mh\cos\varphi}{\Sigma\rho^2 m}\cancel{2d\varphi\cos\varphi}$$

$$d.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \text{-- --}$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g\frac{Mh\sin\varphi}{\Sigma\rho^2 m} + C$$

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{\Sigma\rho^2 m}{gMh}}$$

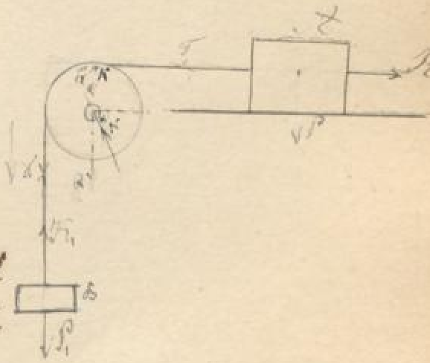
$$\left(\frac{T}{\pi}\right)^2 gMh = \Sigma_1\rho^2 m$$

Letztere Gleichung wird häufig angewendet, um das Trägheitsmoment vermittelst der Beobachtung der Schwingungen eines Körpers zu berechnen, besonders bei unregelmäßig gestalteten Körpern.

Beispiel 5.

Ueber eine Rolle geht ein Seil, an dem die Last P_1 hängt u. die Last P auf einer horizontalen hinzuziehen strebt. Wir nehmen Rücksicht auf Reibung. Zu finden haben wir also

1) die Bewegung des Systems überhaupt,
2) die Spannungen S u. S_1 im Seile; u.
3 den Druck, mit welchem der Zapfen in das Lager gedrückt wird.



Es sei die Winkelgeschw. der Rolle nach der Zeit $= \theta$ ferner der Radius des Zapfens $= r$, der der [illegible]

Wir zerschneiden das Seil in zwei Stücke u. bringen dafür die Kräfte S u. S_1 an. Das Gewicht der Rolle sei Q; die an den Massentheilchen angebrachten entgegengesetzten Kräfte seien K, K_1, K_2 etc. an A u. B seien sie K, K_1. Wir finden fürs Gleichgewicht bei den drei einzelnen Partien

für I 1.) $S = K$

für II 2.) $S_1 + K_1 = P_1$

für III sollten wir eigentlich 6 Bedingungsgl. haben, wegen derselben geben aber $0 = 0$ u. somit erhalten wir nur folgende:

$$\left.\begin{array}{l} 3.)\ S - N\cos\alpha = 0 \\ 4.)\ S_1 + Q - N\sin\alpha = 0 \end{array}\right\} \text{für Verschiebung}$$

da wir voraussetzen, daß die Rolle symmetrisch gebaut ist.

sei, so folgt, daß jedem Theilchen auf der einen Seite ein gleiches auf der andern Seite des Zapfens entspricht u. daß beide Zerlegung der daran angebrachten Kräfte $K, K_1 \dots$ die Summe der horizontalen $= 0$ u. die Summe der vertik. $= 0$ sei, also auf Verschiebung keinen Einfluß ausüben.

Dagegen in Bezug auf Drehung muß die Summe der stat. Momente berücksichtigt werden.

5.) $Sh + (K\rho + K_1\rho_1 + K_2\rho_2 + \dots) = hS_1$

Nun haben wir die Werthe von $K\rho$ zu substituiren, so ist nämlich

$h\,d\theta = g\frac{K}{P}\,dt$ daher

$K = \frac{P}{g} \cdot h\frac{d\theta}{dt}$

$K_1 = \frac{P_1}{g} h\frac{d\theta}{dt}$

$k = \frac{m}{g} \rho \frac{d\theta}{dt}$

$k_1 = \frac{m_1}{g} \rho \frac{d\theta}{dt}$ etc

1.) $S = \frac{P}{g} h\frac{d\theta}{dt}$

2.) $S_1 = P_1\left(1 - \frac{h}{g}\frac{d\theta}{dt}\right)$

3.) $S = N\cos\alpha$

4.) $S_1 + Q = N\sin\alpha$

5.) $h(S_1 - S) = \frac{1}{g}\frac{d\theta}{dt}\Sigma\rho^2 m$

Aus 3 u. 4 folgt:

$N = \sqrt{S^2 + (S_1+Q)^2}$ u.

$\sin\alpha = \frac{S_1 + Q}{\sqrt{S^2 + (S_1+Q)^2}}$

$$\cos\alpha = \frac{T}{\sqrt{T^2+(T_1+Q)^2}}$$

Nun bleibt noch die Spannung T_0, T_1 zu best.:
Aus (Gl.(5) erhält man:

$$k\left(P_1 - P_1\frac{k}{g}\frac{d\theta}{dt} - P\frac{k}{g}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{g}\frac{d\theta}{dt}\,S\rho^2 m.\right.$$

6.) $\frac{d\theta}{dt} = g\frac{kP_1}{kP_1+kP+S\rho^2 m}$ analog wie wir fanden in der vorigen Aufgabe $\frac{d\theta}{dt} = g\frac{\Sigma Pr}{S\rho^2 m}$.

$$\theta = g\frac{kP_1}{k^2P+k^2P_1+S\rho^2 m}\cdot t$$

$\theta = \frac{d\varphi}{dt}$, wenn φ den Drehungsbogen bedeutet

$$\frac{d\varphi}{dt} = g\frac{kP_1}{k^2P+k^2P_1+S\rho^2 m}\cdot t$$

7.) $$\varphi = g\frac{kP_1}{k^2P+k^2P_1+S\rho^2 m}\,\frac{1}{2}t^2.$$

Dies ist die Gleichung für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Es ist ferner

8.) $$T = \frac{k^2PP_1}{k^2P+k^2P_1+S\rho^2 m}$$

9.) $$T_1 = P_1\left(1 - \frac{k^2P_1}{k^2P+k^2P_1+S\rho^2 m}\right) = P_1\,\frac{k^2P + Sm\rho^2}{k^2P+k^2P_1+S\rho^2 m}$$ folglich

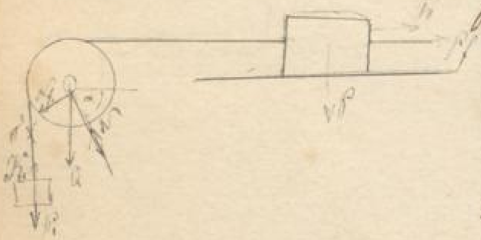
$$N = \sqrt{\left(\frac{k^2PP_1}{k^2P+k^2P_1+S\rho^2 m}\right)^2 + \left(Q + P_1\frac{k^2P + Sm\rho^2}{k^2P+k^2P_1+Sm\rho^2}\right)^2}$$

Wir sehen hieraus, daß die Spannungen im Seile während der Bewegung constant sind, ebenso die Pressungen der Zapfenlager.

Diese Vorrichtung wurde benützt die Reibung zu bestimmen.

Dessen Morin's Versuch über die Reibung vermittelst genannter Vorrichtung u. einer

Angenommen, daß # der Scheibe der Rolle eine conzentrisch gestellte Scheibe gleichförmig aber excentrisch bewegte d.h. drehte. Am Umfange der Rolle war ein Stift [illegible] befestigt, der also bei dem Umdrehen der Rolle eine Curve auf dem Papier beschrieb, aus der sich Alles berechnen ließ.



Dieselbe Aufgabe,

wo daß Rücksicht auf die Reibung genommen wird.

Wir haben also für die Reibg der Last P auf der horizontalen Ebene $= Pf$ u. für die Reibung im Zapfenlager eine $= Nf_1$ anzubringen

Wir erhalten also die Gleichungen:

1) $S = K + Pf$

2) $S_1 = P_1 - K$

3) $S_1 R - SR - S\rho k - Nf_1 r = 0$ für Drehung

4) $N \sin\alpha - Nf_1 \cos\alpha - S_1 - Q = 0$ für

5) $S - N\cos\alpha - Nf_1 \sin\alpha = 0$ Verschiebg.

Aus 4 u. 5 ergeben sich:

$N\cos\alpha + Nf_1 \sin\alpha = S$ } quadrirt u.

$N\sin\alpha - Nf_1\cos\alpha = Q + S_1$ } addirt

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{\sqrt{S^2 + (Q+S_1)^2}}{\sqrt{(1+f_1^2)}} \\ \sin\alpha &= \frac{Sf_1 + Q + S_1}{\sqrt{(1+f_1^2)}\sqrt{S^2+(Q+S_1)^2}} \\ \cos\alpha &= \frac{S - f_1(Q+S_1)}{\sqrt{(1+f_1^2)}\sqrt{S^2+(Q+S_1)^2}} \end{aligned}\right\} (6)$$

Substituirt man den Werth von Druck so ergibt sich:

$$N = \frac{\sqrt{(R + Pf)^2 + (Q + P_1 - K_1)^2}}{\sqrt{1+f_1^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+f_1^2}} \sqrt{\left(\frac{P}{g} k \frac{d\theta}{dt} + Pf\right)^2 + \left(Q + P_1 - \frac{P_1}{g} k \frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

7.) $k^2 P_1 \frac{1}{g} \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{g} \frac{d\theta}{dt} \int \rho^2 m + Pkf - kP_1 + kP^2 \frac{1}{g} \frac{d\theta}{dt} +$

$$+ \frac{f_1 r}{\sqrt{1+f_1^2}} \sqrt{\left(\frac{P}{g} k \frac{d\theta}{dt} + Pf\right)^2 + \left(Q + P_1 - \frac{P_1 k}{g} \frac{d\theta}{dt}\right)^2} = 0$$

$$\frac{1}{g} \frac{d\theta}{dt} (k^2 P_1 + \int \rho^2 m) + kPf - kP_1 = - \frac{f_1 r}{\sqrt{1+f_1^2}} \sqrt{\cdots}$$

$\frac{\sqrt{1+f_1^2}}{f_1 r} \cdot (k^2 P + k^2 P_1) = A$ gesetzt u.

$\frac{\sqrt{1+f_1^2}}{f_1 r} \cdot (-kPf + kP_1) = C$ folglich

$$\frac{1}{g} \frac{d\theta}{dt} \cdot A - C = - \sqrt{\cdots}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 (A^2 + C^2) - \frac{2}{g} \frac{d\theta}{dt} A \cdot C = \left(\frac{P}{g} k \frac{d\theta}{dt} + Pf\right)^2 + \left(Q + P_1 + \frac{P_1 k}{g} \frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

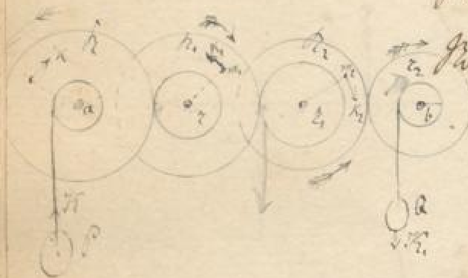
Entwickelt man diese Gleichung, bestimmt daraus $\frac{d\theta}{dt}$, integrirt dann u. findet θ, ferner $\frac{d\theta}{dt}$ substituirt gibt N u. P, P_1.

Wir sehen hieraus, daß wenn man Gleichungen aufstellen will, die nur irgend Nebenumstände berücksichtigen, die Sache selbst bei den einfachsten Systemen verwickelt wird, d. h. auf Weitläufigkeiten führt.

Beispiel,

wo mehrere Axen mit einander verbunden sind.

An der Welle, deren Rad. $= a$ ist, hänge ein Gewicht P, das durch seine Abwärtsbewegung die Last Q an der Welle b aufzieht. Wir nehmen keine Rücksicht auf die Reibung.



Nach der Zeit t sei die Winkelgeschwindigkeit am Rade $R = \theta$, so ist sie

" " R_1 u. $r = \frac{R}{r}\theta$

" " R_2 u. $r_1 = \frac{R}{r}\frac{R_1}{r_1}\theta$

" " r_2 u. $b = \frac{R}{r}\cdot\frac{R_1}{r_1}\cdot\frac{R_2}{r_2}\theta$

Nach dem d'Alembert'schen Princip müssen wir zu den äußeren Kräften P u. Q diejenigen hinzufügen, die im Stande sind, die Geschwindigkeitsänderungen im Innern der Körper zu vernichten; diese Kräfte sind K, K_1, K_2 … Um durch das Princ. der virt. G. die Bedingungsgl. zu finden, lassen wir das System sich um ein kleines Zeitelement dt fortbewegen, nachdem wir es nach der Zeit t still gehalten haben.

Wir bestimmen zuerst die einzelnen Wege, welche die Angriffspunkte der Kräfte zurücklegen:

83. Weg, den der Angriffsp. von P u. $\mathfrak{K}$ zurücklegt $= a\theta dt$

.. . . K . . $= \rho\,\theta dt$

.. . . K_1 . . . $= \rho_1 \frac{r}{z}\,\theta dt$

. . . . K_2 . . . $= \rho_2 \frac{r}{z}\frac{r_1}{z_1}\,\theta dt$

.. . . K_3 . . . $= \rho_3 \frac{r}{z}\frac{r_1}{z_1}\frac{r_2}{z_2}\,\theta dt$

. . . . $\mathfrak{K}_1$ u. Q . . . $= b\frac{r}{z}\frac{r_1}{z_1}\frac{r_2}{z_2}\,\theta dt$

Erhalten zugleich auch die Werthe von

$$\mathfrak{K} = \frac{P}{g}\,a\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{Q}{g}\,b\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$K = \frac{m}{g}\,\rho\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$K_1 = \frac{m_1}{g}\,\rho_1\,\frac{r}{z}\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$K_2 = \frac{m_2}{g}\,\rho_2\,\frac{r}{z}\frac{r_1}{z_1}\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$K_3 = \frac{m_3}{g}\,\rho_3\,\frac{r}{z}\frac{r_1}{z_1}\frac{r_2}{z_2}\,\frac{d\theta}{dt}$$

Die virtuellen Momente sind:

von P u. $\mathfrak{K}$ $= (P - \mathfrak{K})\,a\theta dt = \left(P - \frac{P}{g}a\frac{d\theta}{dt}\right)a\theta dt$

von K $= \int K\rho\,\theta dt = \int \rho^2 m\,\frac{1}{g}\,\theta dt\,\frac{d\theta}{dt}$

v. K_1 $= \int K_1\rho_1\frac{r}{z}\,\theta dt = \int \rho_1^2 m_1\,\frac{1}{g}\left(\frac{r}{z}\right)^2\theta dt\,\frac{d\theta}{dt}$

von K_2 $= \int K_2\rho_2\frac{r}{z}\frac{r_1}{z_1}\,\theta dt = \int \rho_2^2 m_2\,\frac{1}{g}\left(\frac{r}{z}\right)^2\left(\frac{r_1}{z_1}\right)^2\theta dt\,\frac{d\theta}{dt}$

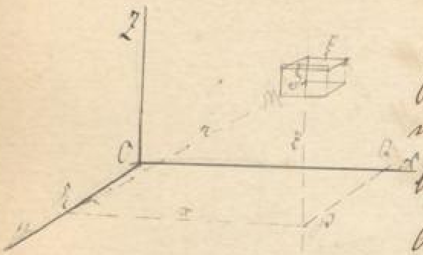
von K_3 $= \int K_3\rho_3\frac{r}{z}\frac{r_1}{z_1}\frac{r_2}{z_2}\,\theta dt = \int \rho_3^2 m_3\,\frac{1}{g}\left(\frac{r}{z}\right)^2\left(\frac{r_1}{z_1}\right)^2\left(\frac{r_2}{z_2}\right)^2\theta dt\,\frac{d\theta}{dt}$.

u. $\mathfrak{K}_1$ u. Q $= (Q + \mathfrak{K}_1)\,b\frac{r}{z}\frac{r_1}{z_1}\frac{r_2}{z_2}\,\theta dt = \left(Q + \frac{Q}{g}b\frac{d\theta}{dt}\right)b\left(\frac{r}{z}\right)\left(\frac{r_1}{z_1}\right)\left(\frac{r_2}{z_2}\right)^2\theta dt$.

Die algebraische Summe dieser Momente muß
$= 0$ sein.

$$\theta dt\left[Pa - \frac{1}{g}\frac{d\theta}{dt}\left(Pa^2 + \int\rho^2 m + \int\rho_1^2 m_1\left(\frac{r}{z}\right)^2 + \int\rho_2^2 m_2\left(\frac{r}{z}\right)^2\left(\frac{r_1}{z_1}\right)^2 + \int\rho_3^2 m_3\left(\frac{r}{z}\right)^2\left(\frac{r_1}{z_1}\right)^2\left(\frac{r_2}{z_2}\right)^2 + Qb^2\left(\frac{r}{z}\right)^2\left(\frac{r_1}{z_1}\right)^2\left(\frac{r_2}{z_2}\right)^2\right) - Qb\left(\frac{r}{z}\right)\left(\frac{r_1}{z_1}\right)\left(\frac{r_2}{z_2}\right)\right] = 0$$

Vom Moment der Trägheit.



Innerhalb dem Raume, den drei recht-winkl. Coordinatenaxen einerseits begrenzen, befinde sich ein Körper, der sich um die Axe Oy dreht.

Es sei M ein Punkt im Innern des Körpers, ferner, wenn u. Perpend. von M auf die Coordinatenaxen fällt, $OQ = x$, Qy, $MP = z$ so ist, wenn sich der Punkt M zu einem unendl. kleinen Parallelepiped ausdehnt, dessen Seiten ξ, ζ u. v sind:

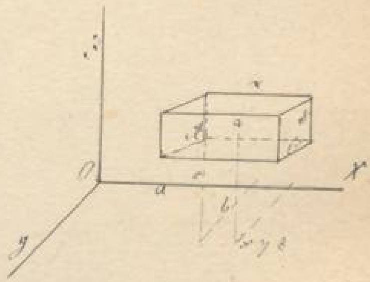
$M\xi = dx$, $Mv = dy$, $M\zeta = dz$.

Bezeichnen wir durch γ das Gewicht der Volumeneinheit, so ist, da $dx.dy.dz$ das Volumen, $dx.dy.dz.\gamma$ das Gewicht des Parallelepipeds; u. setzen wir die Entfernung v. der Drehaxe $MR = r$, so ist das Trägheitsmoment $= \gamma\, dx\, dy\, dz . r^2$ oder weil $r^2 = x^2 + z^2$, $\mu = \iiint \gamma (x^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$ d.h. dieser Ausdruck muss dreimal integrirt werden, einmal auf dx, dann auf dy u. dann auf dz oder in anderer Ordnung.

Beispiel 1.)

Das Trägheitsmoment eines Parallelepipeds auf die angegeb. Weise zu bestimmen. Eine Kante desselben sei # der Drehungsaxe.

Die Coordinaten des Scheitelpunktes $a\,b\,c$, die Dimensionen des Parallelepipeds α, β, γ.



Wir nehmen im Innern einen Punkt an, dessen Coord. $x\,y$ u. z seien.

Die Grenzen von diesen sind

$x = a$ bis zu. $x = a+\alpha$

$y = b$ " $y = b+\beta$

$z = c$ " $z = c+\gamma$.

Nach obiger Formel ist, wenn π die Dichtigk. d. Schwere ist:

$$\mu = \pi \int_{x=a}^{x=a+\alpha}\int_{y=b}^{y=b+\beta}\int_{z=c}^{z=c+\gamma} (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

$\int x^2 dx + z^2\int dx = \frac{1}{3}x^3 + z^2 x$

$\frac{1}{3}((a+\alpha)^3 - a^3) + z^2\alpha$

nämlich zurückzuführen dann α substituirt u. abgezogen.

1.) in Bezug auf x, wodurch ein Stab # Ox entsteht.

$$\mu = \pi \int_c^{c+\gamma}\int_b^{b+\beta}\left\{dy\,dz \int_a^{a+\alpha}(x^2+z^2)\,dx\right\} = \pi \int_c\int_b \left\{\tfrac{1}{3}\left((a+\alpha)^3-a^3\right)+\alpha z^2\right\} dz\,dy$$

2.) in Bezug auf y, wodurch eine Platte # der Axe entsteht:

$\int dy = y \;;\; \frac{b+\beta}{b}{\beta}$

$$\mu = \pi \int_c \left[\left\{\tfrac{1}{3}\left[(a+\alpha)^3-a^3\right] + \alpha z^2\right\}.\,dz \int dy\right]$$

$$= \pi \int_c \left[\tfrac{1}{3}\left[(a+\alpha)^3-a^3\right] + \alpha z^2\right] dz\,.\,\beta$$

3.) in Bezug auf z, wodurch der ganze Körper entsteht.

$$\mu = \pi\left[\frac{\beta}{3}\left[(a+\alpha)^3-a^3\right]\int dz + \alpha\beta \int z^2 dz\right]$$

$$= \pi\left[\frac{\beta\gamma}{3}\left((a+\alpha)^3-a^3\right) + \frac{\alpha\beta}{3}\left((c+\gamma)^3-c^3\right)\right]$$

$$= \pi\,\frac{\beta}{3}\left[\gamma\left(3a^2\alpha + 3a\alpha^2+\alpha^3\right) + \alpha\left(3c^2\gamma + 3c\gamma^2+\gamma^3\right)\right]$$

$$\mu = \pi \frac{xyz}{3}\left[3a^2 + 3ax + x^2 + 3c^2 + 3cy + y^2\right]$$
$$= \pi \frac{xyz}{3}\left[3(a^2+c^2) + 3ax + x^2 + 3cy + y^2\right]$$

Dies war der einfachste Fall, der sich denken läßt; denn in den meisten Fällen sind die x, y u. z nicht constant, sondern sie hängen ab von der Oberfläche des Körpers u. es müßten daher die Gleichungen der krummen Oberfläche eingeführt werden, was die Sache sehr weitläufig macht.
Braucht man das Trägheitsmoment eines Körpers absolut, sobald gewisse Fälle unbekannt, so bestimmt man es mechanisch wie oben angegeben wurde vermittels Schwingungen.
Noch fügen wir ein einfaches Beispiel bei, das mit Hülfe des Polarcoordinatensyst. welches in den meisten Fällen mit mehr Vortheil angewandt wird, gelöst werden soll. Nämlich das Trägheitsmoment eines Cylinders zu bestimmen, der sich um seine Axe dreht.
Zuerst denken wir uns eine Scheibe von der Dicke dz senkr. auf die Axe herausgeschnitten: dann beschreiben wir zwei Kreise concentr.

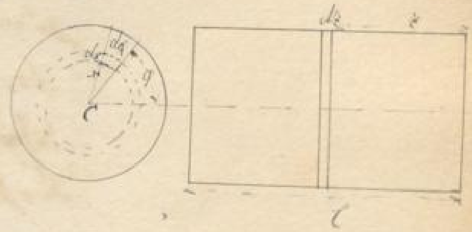
mit den Radien x u. $x+dx$, so schneiden diese ein ringartiges Stück u. hieraus ein keilförmiges Stück, wobei die beiden Radien einen $\angle\, d\varphi$ miteinander bilden. Dieses Stück sei nun so klein, daß wir es als Parallelepiped betrachten können, in dem jeder Punkt gleich weit von der Axe entfernt ist, u. dessen Seiten $x\,d\varphi$, dx u. dz sind.

Wir finden also

Das Trägheitsmom. des kleinen Stückchens $= x\,d\varphi\,dx\,dz \cdot x^2$

u. zwischen Grenzen $\mu = \gamma\int\!\!\int\!\!\int x^3\,d\varphi\,dx\,dz$.

Nun sei l die Länge des Cylinders u. R der Rad. so sind die Grenzen:



1) $z=0$ u. $z=l$

2.) $\varphi=0$ u. $\varphi=2\pi$

3.) $x=0$ u. $x=R$.

daher $\mu = \gamma\int_{x=0}^{x=R}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}(x^3\,d\varphi\,dx\int_{z=0}^{z=l}dz$

$= \gamma l\int\!\!\int x^3\,d\varphi\,dx$

1.) $\mu = \gamma l\int d\varphi\int x^3\,dx = \gamma l\int d\varphi\,\frac{R^4}{4}$

2.) $\mu = \gamma l\,\frac{R^4}{4}\int d\varphi = \gamma\, l\,\frac{R^4}{4}\cdot 2\pi$

$= R^2\pi\, l.\gamma \cdot \frac{R^2}{2}$

Ist r der innere Halbmesser des hohlen Cylinders, so fängt x nicht mit $x=0$, sond. mit $x=r$ an u.

$\mu = \gamma(R^2-r^2)\pi l\cdot\frac{R^2+r^2}{2}$

Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

Wir werden hier blos zeigen, wie dieser Princip durch Gleichungen dargestellt wird.

Es seien P_1, P_2, P_3 ....

Kräfte, die auf ein System von Massen wirken.

dp_1, dp_2, dp_3 ...

die Projectionen der Wege auf die Richtungen der Kräfte, welche deren Angriffspunkte zurücklegen.

R_1 R_2 .... Widerstände, die das System aufhebt.

dr_1, dr_2, dr_3 ......

diejenigen Wege ihrer Angriffspkte auf die Richtungen derselben, nach einem unendlich kleinen Zeitelement in welchem dp_1, dp_2 ... zurückgelegt worden sind.

m_1, m_2, m_3 ....

einzelne Massentheilchen.

u_1 u_2 u_3 ....

die Geschwind. dieser Massentheilch. in irgend einem bestimmten Augenblick.

v_1, v_2, v_3 ....

die Geschw. derselben Mth. in einem andern Augenblick.

Dies vorausgesetzt, ist nun:

$$\left\{\Sigma\int P_1 dp_1 + \int P_2 dp_2 + \ldots\right\} - \left\{\Sigma\int R_1 dr_1 + \int R_2 dr_2 + \ldots\right\}$$
$$= (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2 + \ldots) - (m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + \ldots).$$
$$= (m_1(v_1^2 - u_1^2) + m_2(v_2^2 - u_2^2) + \ldots)$$

 u. folglich:

$$\Sigma_1 \int P\,dp - \Sigma_1 \int R\,dr = Smv^2 - Smu^2 = Sm(v^2-u^2)$$

wobei die Integrationen auf diejenigen Wege auszudehnen sind, welche die Angriffsp. der Kräfte u. Widerstände zurück gelegt haben, während die Geschwindigkeiten aus $u_1, u_2, u_3 \ldots$ in $v_1, v_2, v_3 \ldots$ übergegangen sind.

Zur nähern Erläuterung obiger Gleichung fügen wir folgendes bei.
Es seien Ax, By u. Cz die Bahnen der Angriffspunkte der Kraft P (die veränderlich sein kann), des Widerstandes R u. [illegible] die Bewegung erfolge aber von A nach a, [illegible] nach b, u. s. C nach z, wo sich u in v umgewandelt hat.
Hierbei ist $ax = dp$, $P\,dp = P\,ax$.
u. $\Sigma P\,dp$ ist die Summe der Produkte aus den verschied. Kräften P in die Projectionen ax. Ebenso ist es bei $\Sigma R\,dr$.
Wenn die Kraft tangential an die Bahn wirkt, so fällt ds, der wirkliche Weg, mit der Projection zusammen.
u. $\int P\,dp = \int P\,ds$.

Wenn die Kraft P constant ist, so hat man

$$\int P ds = P\int ds = Ps.$$

Wenn P constant u. horizontal ist,

$$\int P ds = Ps.$$

Wir werden $\int P ds$ die Wirkung der Kraft nennen.

$\int R ds$ Gegenwirkung des Widerstandes

Σmv^2 die lebendige Kraft od. die Wirkungsfähigkeit der Masse.

u. das Princip werden wir kurz Grundsatz der Wirkung nennen.

Das Princip spricht aus:

die Differenz zwischen den Wirkungen der Kräfte u. den Gegenwirkungen der Widerstände ist gleich der Änderung der lebendigen Kraft, od. der Änderung der Wirkungsfähigkeit des ganzen Massensystems.

Wenn irgend eine Kraft einen ruhigen Druck ausübt, so bringt sie keine Änderung der Geschwind. u. folglich keine Wirkung hervor. Ebenso bringt Bewegung ohne Kraft keine Wirkung hervor. Es muss also gleichzeitig Bewegung u. Kraft vorhanden sein, wenn eine Wirkung sich zeigen soll. Die Begriffsfehler der Kräfte meisten Wege zurückgelegt u. die Produkte aus den Kräften u. die Wege geben die Größe der Wirkungen an.

Man könnte sich also auch durch $ds \cos\varphi$ ausdrücken. also $Pdp = P\cos\varphi\, ds$; es ist aber

$P\cos\varphi$ = der tangentialen Kraft T

also $Pdp = Tds$, was wir auch durch Zerlegung der Kraft gefunden hätten.

Den Winkel φ wollen wir mit $(\widehat{P,ds})$ d.h. mit $\measuredangle$ zwischen der Richtung der Kraft u. dem Weg od. der Bahn, bezeichnen; also $\int Pdp = \int P\cos(\widehat{P,ds})\, ds$.

Nun mögen Beispiele das Gesagte näher beleuchten.

Beispiel 1.

Eine (gewichtlose) Masse dreht sich um die Achse C. Die Winkelgeschw. sei θ in dem Augenblick, in dem wir die lebendige Kraft kennen lernen wollen.

Die einzelnen Massentheilchen seien $m, m_1, m_2 \ldots$ u. die ~~Winkelgeschw.~~ Geschwindigkeiten derselben $\rho\theta, \rho_1\theta, \rho_2\theta \ldots$

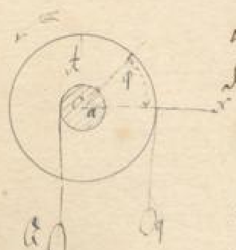
also $\sum mv^2 = m\rho^2\theta^2 + m_1\rho_1^2\theta^2 + m_2\rho_2^2\theta^2 + \ldots$

$= \theta^2 \sum m\rho^2$.

wie dies auch dem Gesetz folgen müßte:

das Quadrat der Geschwind. (θ^2) mal der Masse
d. i. für die Winkelgeschw. θ eine im
einem Abst. von der Axe = 1 vereinigte Masse
was uns $Sm\rho^2$ darstellt.

Beispiel 2.



Wenn bei nebenstehendem System die Last Q an der Welle, deren Rad. = a, hängt, so zieht die Scheibe, deren Rad. = A, die Masse q auf. Der Schwerpunkt der Welle u. Scheibe liege in der Axe. Anfangs sei Alles in Ruhe u. dann werde es freigelassen.
Nach einiger Bewegung bildet der Zeiger auf der Scheibe einen Winkel φ mit der festen Ort. Nun haben wir d. entspr. Werthen die allgemeine Gl. $\Sigma_1 \int P\,dp - \Sigma_1 \int R\,dr = Smv^2 - Smu^2$
für unsern Fall ist

$$\Sigma_1 \int P\,dp = \int Q\,a\,d\varphi = aQ\varphi$$

$$\Sigma_1 \int R\,dr = \int q\,A\,d\varphi = qA\varphi$$

$$Smu^2 = 0$$

$$Smv^2 = S\rho^2 m \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{Q}{2g} a^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{q}{2g} A^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

folglich

$$aQ\varphi - qA\varphi = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left(Sm\rho^2 + \frac{Q}{2g}a^2 + \frac{q}{2g}A^2\right)$$

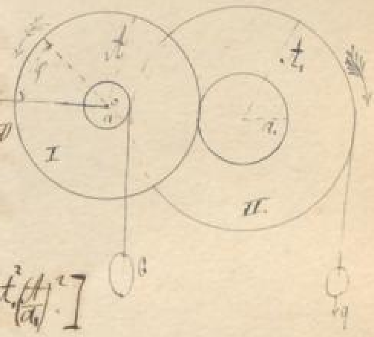
$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{(Qa - qA)\varphi}{Sm\rho^2 + \frac{Q}{2g}a^2 + \frac{q}{2g}A^2}$$

u. hiermit die Geschwindigkeit bestimmt.

Beispiel. 3.

Von einem ähnlichen System, wie das vorige, soll die Geschw. bestimmt werden. Es sei das Moment der Trägheit von I $= Sm\rho^2$, u. das v. II $= Sm_1\rho_1^2$. Es werde durch das Sinken der Last q die Masse Q gehoben.

Für dieses ist



$$\sum_0^t \int P\,dp = \int q A \cdot \frac{A_1}{a_1}\, d\varphi = qA \cdot \frac{A_1}{a_1}\varphi$$

$$\sum_0^t \int R\,dr = \int Q a\, d\varphi = aQ\varphi$$

$$Smu^2 = 0$$

$$Smv^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left[Sm\rho^2 + \left(\frac{A}{a_1}\right)^2 Sm_1\rho_1^2 + \frac{Q}{2g}a^2 + \frac{q}{2g}A_1^2\left(\frac{A}{a_1}\right)^2\right]$$

folglich:

$$\left(qA\frac{A_1}{a_1} - aQ\right)\varphi = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left[Sm\rho^2 + \left(\frac{A}{a_1}\right)^2 Sm_1\rho_1^2 + \frac{Q}{2g}a^2 + \frac{q}{2g}A_1^2\left(\frac{A}{a_1}\right)^2\right]$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\left(qA\frac{A_1}{a_1} - aQ\right)\varphi}{Sm\rho^2 + Sm_1\rho_1^2 + a^2\frac{Q}{2g} + \frac{q}{2g}A_1^2\left(\frac{A}{a_1}\right)^2}$$

$= \lambda\varphi$; u. wenn $\frac{d\varphi}{dt} = \theta$, so ist

$\theta^2 = \lambda\varphi$; $2\theta\, d\theta = \lambda\, d\varphi$

$d\varphi = \theta\, dt$ folglich

$2\theta\, d\theta = \lambda\theta\, dt$, $2\, d\theta = \lambda\, dt$

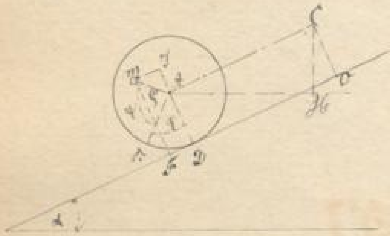
$\theta = \frac{1}{2}\lambda t = \frac{d\varphi}{dt}$

$\varphi = \frac{1}{4}\lambda t^2$

Die Bewegung steht also im Verhältniß mit d. Q. der Zeit u. ist deshalb gleichförmig beschleunigt

Beispiel 4.

Wir wollen die Geschwindigkeit suchen, welche ein auf einer schiefen Ebene herabrollender Cylinder hat, wenn er mit horizont. Axe in C in Ruhe war, frei gelassen wurde u. während einer Zeit t nach A gekommen ist. Wir bringen einen Zeiger auf der Grundfl. des Cylind. an, der einen variabl. Winkel φ mit der auf der schief. Ebene Normalen AD bildet. Es sei Neigungsw. der Ebene $= \alpha$;



$OD = CA = \xi$, $AD = r$. die Coord. für ein Massentheilchen $OF = x$ u. $mF = y$; wenn AH horizont, so ist $\xi \sin\alpha = CH$; Q sei d. Gew. des Cylinders.

Wir suchen nun in allgemeiner Gleichg

$$\Sigma_i \int P dp - \Sigma_i \int R dr = \Sigma m v^2 - \Sigma m u^2.$$

entsprechende Werthe zu substituiren.

Es ist $\Sigma_i \int P dp = Q\xi \sin\alpha$, denn der Angriffsp. der Last Q hat den wirklichen Weg CA zurückgelegt u. dieser auf die Richtg der Last Q projicirt gibt $CH = \xi \sin\alpha$.

$\Sigma \int R dr = 0$ ist vorausgesetzt.

$\Sigma m u^2 = 0$ ebenfalls.

Um $\Sigma m v^2$ zu bestimmen, schlagen wir

95. folgenden Weg ein:

Es ist $x = \xi + \rho \sin(180 - (\varphi+\psi))$

$= \xi + \rho \sin(\varphi+\psi)$

$y = r \pm \rho \cos(\varphi+\psi)$

Differentiiren wir nun, wobei ρ u. ψ als constant angesehen werden müssen, da es sich nur um das Theilchen m handelt;

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \rho \cos(\varphi+\psi)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho \sin(\varphi+\psi)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2\rho\cos(\varphi+\psi)\frac{d\xi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2\rho\cos(\varphi+\psi)\frac{d\xi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

Es ist aber $d\xi = -r\,d\varphi$ (negativ, weil mit dem Wachsen von ξ, das φ kleiner wird)

$$\frac{d\xi}{dt} = -r\frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{also} \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{r}\frac{d\xi}{dt}$$

folglich $mv^2 = \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 - 2\rho\cos(\varphi+\psi)\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\right]m$

Für das Integrale, d.i. für die Summe der einzelnen Theilchen ist für den Augenblick, für den wir die Geschwind. kennen lernen wollen, φ constant; daher

$$\Sigma mv^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\Sigma m + \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2\Sigma m\rho^2 - \frac{2}{r}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \cancel{\cos(\varphi+\psi)}\,\Sigma m\rho\cos(\varphi+\psi)$$

Es ist aber $\rho\cos(\varphi+\psi) = AS$; da aber AS immer durch den Schwerpunkt geht, so ist die Richtung der Kraft in bezug darauf $= 0$ u.

daher $\sum m\rho\cos(\varphi+\psi) = 0$ u. also 9697

$$\sum m v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\left(\frac{Q}{2g} + \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sum m\rho^2\right)$$

für den Cylinder ist aber $\sum m\rho^2 = \frac{Q}{2g}\frac{r^2}{2}$

($\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\pi r^4 c q$; $\pi r^2 c . q = \frac{Q}{2g}$); folglich:

$$\sum m v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\left(\frac{Q}{2g} + \frac{1}{r^2}\frac{r^2}{2}\cdot\frac{Q}{2g}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\cdot\frac{Q}{2g}$$ u. endlich

$$Q\xi\sin\alpha = \frac{3}{4}\frac{Q}{g}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$$

$$\frac{4g}{3}\xi\sin\alpha = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$$

$$2\sqrt{\frac{g\sin\alpha}{3}}\cdot\sqrt{\xi} = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)$$

$$2\sqrt{g\frac{\sin\alpha}{3}}\cdot\sqrt{\xi}\cdot dt = d\xi$$

$$\int 2\sqrt{g\frac{\sin\alpha}{3}}\cdot dt = \int\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}$$

$$t\cdot 2\sqrt{g\frac{\sin\alpha}{3}} = 2\sqrt{\xi} + C$$

für $t=0$ ist $\xi=0$, also $C=0$

u. folglich $\sqrt{\xi} = \sqrt{g\frac{\sin\alpha}{3}}\cdot t$ oder

$$\xi = \frac{1}{3}g\sin\alpha\cdot t^2$$

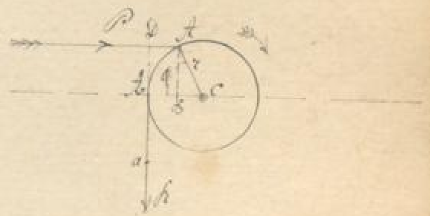
die Geschwindigkeit ist also der Zeit proportional u. daher gleichförmig beschleunigt.

9697.

Theorie der Curbel u. des Schwungrades.

Diese Theorien war u. vor einigen Jahren noch nicht im Reinen aufzustellen; z. B. Langsdorf stellte 7 falsche Theorien auf. Erst seit dem man anfing das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte u. das Dalembert'sche Princip zu benützen, kam m. auf richtige Ansichten von der Sache.

Denken wir uns das beistehende einfache System von einer Welle C, daran eine Curbel mit Kreuzzapfen, u. durch die in der sich immer ‖ bleibenden Schubstange wirkenden Kraft P ein Schwungrad umgedreht.



Die Masse des Schwungrades sei so groß, daß wir die Massen der einzelnen Elemente vernachlässigen können.

Es sei $\Sigma m\rho^2$ das Trägheitsmom. des Schwungrades

c_0 die Anfangsgeschw., welche vorhanden war, da die Curbel in A_0 war.

ϑ die Winkelgeschw. nachdem der $\angle\ \varphi$ beschrieben.

Wir können nun das Gesetz für die Bewegung herleiten 1.) durch das Princ. der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

$$\Sigma.\int Pdp - \Sigma.\int Kdr = Smv^2 - Smu^2.$$

Hiebei ist $Smu^2 = \theta_0^2 Sm\rho^2$

$Smv^2 = \theta^2 Sm\rho^2$

$Smv^2 - Smu^2 = (\theta^2 - \theta_0^2) Sm\rho^2$.

Die wirkenden Kräfte sind als P in der Schubstange vereinigt; der wirkliche Weg, den der Angriffspunkt von P in diesem Zeitraum zurücklegt ist A_0A u. auch die Richtung der Kraft gemessen. Es ist

$DA = A_0B = r \sin vers\, \varphi$ also

$\Sigma\, Pdp = Pr \sin vers\, \varphi$

Alle Widerstände seien in der K vereinigt, die immer tangentiel an den Kurbelkreis wirkt. Der Weg, den der ebenfalls in a gedachte Angriffspunkt dieser K zurücklegt, ist $r\varphi$; also $\Sigma Kdr = Kr\varphi$; folglich:

$$Pr \sin vers\, \varphi - Kr\varphi = (\theta^2 - \theta_0^2) Sm\rho^2$$

2.) Nach dem Dalembert'schen Princip.

Hiebei müssten wir an jedem Massentheilchen m eine Kraft K entgegengesetzt anbringen, die die Geschwindigkeit des Theilchens aufhebt.

Setzen wir die statischen Momente an:
$P r \sin\varphi = A r + S\rho K$.
Nun ist aber $\frac{dv}{dt} = g\frac{F}{Q}$, $\frac{Q}{g} = 2m$
u. $F = 2m\frac{dv}{dt}$; u. $\frac{dv}{dt} = \rho\frac{d\theta}{dt}$, also
$K = 2m.\rho\frac{d\theta}{dt}$, u. $S\rho K = 2\frac{d\theta}{dt} Sm\rho^2$
$P r\sin\varphi - Ar = 2\frac{d\theta}{dt}Sm\rho^2$
Aber $\theta = \frac{d\varphi}{dt}$, $d\varphi = \theta dt$ giebt
$Pr\sin\varphi d\varphi - Ar\, d\varphi = 2\theta d\theta\, Sm\rho^2$
$Pr\int\sin\varphi d\varphi - Ar\int d\varphi = 2Sm\rho^2\int\theta d\theta$
$Pr \sin vers\varphi - Ar\varphi = 2Sm\rho^2\frac{\theta^2}{2}+C$
für $\varphi=0$, $\theta=\theta_0$
$0 = \theta_0^2 Sm\rho^2 + C$
folglich $Pr\sin vers\varphi - Ar\varphi = (\theta^2-\theta_0^2)Sm\rho^2$ ... I
dasselbe Resultat wie oben.

3. Durch Reduction der Massen.

Wir beschreiben einen Kreis mit einem Rad. = r u. in diesem Kreis denken wir uns eine Masse, die ein ebensogroßes Trägheitsmoment hat, als der Bewegungsrad. Diese Masse $M = \frac{Sm\rho^2}{r^2}$
Man zerlege die Kraft P in zwei nach der Richtg des Radius, welche aufgehoben wird, u. in eine tangentiell an den Kreis, welche letztere = $P\sin\varphi$ ist.
Wir haben $\frac{dv}{dt} = g\frac{F}{Q} = \frac{1}{2}\frac{F}{M}$, ferner,

$v = r\theta$, $F = P\sin\varphi - k$, also

$$r\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{P\sin\varphi - k}{Sm\rho^2}\right)r^2$$

oben haben wir gefunden $\theta dt = d\varphi$

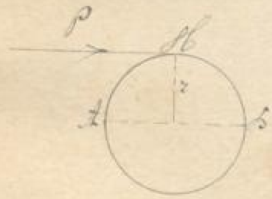
$$r\,\theta d\theta = \frac{1}{2}\,\frac{(P\sin\varphi - k)\,r^2 d\varphi}{Sm\rho^2}$$

$$2\theta d\theta\, Sm\rho^2 = Pr\sin\varphi d\varphi - kr d\varphi$$

$$\theta^2 Sm\rho^2 = Pr\,\text{sinvers}\,\varphi - kr\varphi + C$$

$$(\theta_1^2 - \theta_0^2)\,Sm\rho^2 = Pr\,\text{sinvers}\,\varphi - kr\varphi$$

wie oben.



Früher hielt man immer an der Idee, es müßte in B entsprechend dem größten statischen Momente, auch die größte Geschwindigkeit vorhanden sein, was aber irrig, u. daher zu falschen Theorien führte.

Fragen wir nun, welche Geschwind. findet in B statt? hier ist $\varphi = \pi$, $\theta = \theta_1$ zu substituirt:

$$Pr\,\text{invers}\,\pi - kr\pi = (\theta_1^2 - \theta_0^2)\,Sm\rho^2$$

$$2rP - kr\pi = \;.\;.\;.\;.$$

Wir sehen nun fest, daß alle halben Umdrehungen auf gleiche Weise vor sich gehen, damit also in B wieder dieselbe Geschwind. wie in A statt finden und $\theta_1 = \theta_0$ sein.

Dies findet aber erst statt, wenn der Beharrungszustand eingetreten ist.

Dieser wird nach kurzer Zeit eintreten

100, 101. da die Geschwindigkeit des Schwungrades nur bis zu einer gewissen Grenze zunehmen kann. Für diesen Beharrungszustand haben wir:

$$2Pr - Kr\pi = 0$$

$$2P = K\pi$$

$$P = \frac{\pi}{2} K \quad \ldots\ldots\ldots \text{II}$$

dies in die Gleich. (I) substit. gibt:

$$\frac{\pi}{2} K r \sin vers \varphi - Kr\varphi = (\theta^2 - \theta_0^2) Sm\rho^2$$

$$Kr\left\{\frac{\pi}{2} \sin vers \varphi - \varphi\right\} = (\theta^2 - \theta_0^2) Sm\rho^2 \quad \ldots \text{III}$$

In dieser Gleichung ist also das Gesetz der Bewegung im Beharrungsz. niedergelegt.

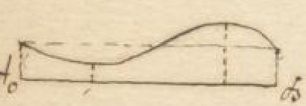
Wir ersehen daraus, daß ungeachtet der constanten Kraft P u. dem constanten Widerstand K eine ungleichförmige Bewegung statt findet.

Diese Ungleichförmigkeit der Bewegung ist aber den Maschinen nachtheilig, daher stoßen wir jetzt auf die Frage: Welche Masse müssen wir dem ganzen Schwungrade geben, damit der Unterschied zwischen der größten u. kleinsten Winkelgeschw., welche bei der Bewegung durch einen Halbkreis entsteht, eine ganz bestimmte Größe hat.

Die zur Rechnung kommende Veränderlichk.

ist.

Kraft ist $\frac{\pi}{2} k \sin \varphi$ u. ist also abhängig 102.
von $\Delta\varphi$. Anfangs ist sie klein, so daß
sie dem Widerst. k nicht das Gleichgewicht
zu halten vermag; wächst aber bis
$\frac{\pi}{2} k \sin \varphi_1 = k$: (wir setzen φ_1 u. φ_2 um diese
Werthe von φ auszuzeichnen.) In A_0 setzten
wir voraus hatte das Schwungrad die Ge-
schwind. c_0; da aber die Kraft $\frac{\pi}{2} k \sin \varphi$ immer
mehr zunimmt u. am Ende auch $= k$ dem Widerst.
werden muß, so daß sich also die beiden
Kräfte das Gleichgewicht halten würden
u. das System gar keine Geschwindigkeit
* wenn c_0 die Geschw. abnehmen * mehr hätte, so muß für ~~diese~~ Stelle, wo
$\frac{\pi}{2} k \sin \varphi_1 = k$, $\frac{\pi}{2} \sin \varphi_1 = 1$, ein Minimum
von Geschwindigk. statt finden, da es sich
nur noch vermöge der Trägheit bewegt.
Von hier an wird die Kraft größer als
der Widerstand u. daher wächst auch die
Winkelgeschwindigk. bis zum Punkt, wo
nochmals $\frac{\pi}{2} k \sin \varphi_2 = k$ d. i. $\sin \varphi_2 = \sin(180 - \varphi_1)$,
u. hier hat die Geschw. ihr Maximum erreicht.
Beistehende Curve mag dies veranschaulichen.
Der Halbkreis $A_0 B_0$ sei als Abscisse
aufgewickelt u. die Winkelgeschw. als
Ord. aufgetragen.



Bei einer gleichf. Bewegung wäre θ immer gleich u. daher würde die Bewegung durch eine gerade Linie dargestellt; bringt man aber neue Massen an das Schwungrad, so nähern sich diese Schwankungen immer mehr der Geraden u. dies wollen wir nun untersuchen, wie?

durch Ausrechnung von $\frac{\pi}{2}$ sin φ findet man $\varphi_1 = 39^\circ 32' 25''$ u. $\varphi_2 = (180 - 39^\circ 32' 25'')$

ferner $\frac{\pi}{2} \sin\varphi = 1$, $\sin\varphi = \frac{2}{\pi}$. folglich: nachdem man $hr\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sin\,vers} \varphi - \varphi\right)$ differentiirt hat, erhält man auch die Werthe für das Minim. u. Maximum, wie folgt:

$$hr\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi - 1\right) = Sm\rho^2 \frac{d.(\theta^2)}{d\varphi}$$

$$hr\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi - 1\right) = 0, \text{ od. } \frac{\pi}{2}\sin\varphi = 1$$

$\sin\varphi = \frac{2}{\pi}$, um zu sehen, ob dieser Werth ein Minim. od. Max. gibt, suchen wir

$$\frac{d(\theta^2)}{d\varphi^2} = hr\left(\frac{\pi}{2}\cos\varphi\right)$$, woraus erhellt, daß, da der cos im ersten Quadr. positiv u. im 2ten negativ, für $\varphi = \frac{2}{\pi}$ ein Min. u. für $180 - \frac{2}{\pi}$ ein Maxim. Werth findet.

Setzen wir w u. W das Min. u. Max. der Geschw. so ergibt sich:

$$hr\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sin\,vers}\varphi_1 - \varphi_1\right) = (w^2 - \theta_0^2)\, Sm\rho^2$$

$$hr\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sin\,vers}\varphi_2 - \varphi_2\right) = (W^2 - \theta_0^2)\, Sm\rho^2$$ u. beide abgezogen von einander:

$$hr\left[\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sin\,vers}\varphi_2 \cancel{-\varphi_2}\right) \cancel{-} \operatorname{sin\,vers}\varphi_1\right) \pm \cancel{\varphi_1} - (\varphi_2 - \varphi_1)\Big] = Sm\rho^2 (W^2 - w^2) \text{ u.}$$

/.

folglich $Smp^2 = \frac{Cr\left[\frac{\pi}{2}(\text{sin vers}\,\varphi_2 - \text{sin vers}\,\varphi_1) + \varphi_1 - \varphi_2\right]}{W^2 - w^2}$

Es ist aber $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ d. i.

$\text{sin vers}\,\varphi_2 = \text{sin vers}(\pi - \varphi_1) = 1 - \cos(\pi - \varphi_1) = 1 + \cos\varphi_1$

$\text{sin vers}\,\varphi_1 = \text{— — — — — —} = 1 - \cos\varphi_1$

also $\text{sin vers}\,\varphi_2 - \text{sin vers}\,\varphi_1 = 2\cos\varphi_1$ u. daher

$$Smp^2 = \frac{Cr}{W^2 - w^2}\frac{\pi}{2}\left\{2\cos\varphi_1 - \frac{2}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) \cancel{\varphi_1 - \pi + \varphi_1}\right\}$$

$$= \frac{Cr\pi}{W^2 - w^2}\left(\cos\varphi_1 - \frac{1}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\right)$$

Um die Formel numerisch zu berechnen

hat man $\cos\varphi_1 = \sqrt{1 - \sin\varphi_1^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2}$.

$\frac{2}{\pi} = 0,6365$; $(0,6365)^2 = 0,405132$;

$\sqrt{1 - 0,405132} = \sqrt{0,594464} = 0,77125$.

also $\cos\varphi_1 = 0,77125$.

$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} = \frac{100,91944}{180} = 0,5606$.

d. $-0,5606 + 0,7712 = \cancel{1,2726}$ $\cancel{0,7496}$ $= 0,2106$

$0,2106\ \cancel{1,2726} \cdot \pi = 0,66147$ daher

$$Smp^2 = 0,66147\,\frac{Cr}{W^2 - w^2}$$

Unter mittlerer Geschwindigkeit verstehen wir diejenige, mit welcher sich die Kurbel gleichförmig in der Zeit durch den Halbkreis bewegen würde, in der sie mit ungleichförm. Geschw. einen Halbkreis zurücklegt.

Es sei C die mittlere Kurbelgeschw.

so ist: $W = (1 + \frac{1}{n})C$, $w = (1 - \frac{1}{n})C$ ./.

1605. d. $W + w = 2C$, $W - w = \frac{2}{n} C$ $\Big\}$ $W^2 - w^2 = \frac{4}{n} C^2$

$$Smp^2 = 0,66147 \frac{k^2}{4C^2} n = 0,16536 \frac{k^2}{C^2} n$$

In der Praxis ist gewöhnlich die Anzahl der Umdrehungen in 1 Minute gegeben. Diese Anzahl sei z. B. = i gegeben, so ist

$$C = \frac{2\pi i}{60}$$

$$Smp^2 = 0,16536 \frac{k^2 \cdot n}{\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 i^2}$$

$$= 15,08 \frac{k^2}{i^2} n$$

Theorie der Kurbel mit Rücksicht auf die an der Schubstange u. am Schwungrad wirkenden Massen.

Es treibe z. B. eine Dampfmaschine eine Mahlmühle.

Wir setzen voraus:

1.) Es drücke eine constante Kraft von unten auf die Kolbenfläche u. dann dieselbe von oben.

2.) Ohne Rücksicht auf Reibung geht die [illegible]

3.) Am Umfange des Kurbelkreises wirke ein constanter Widerstand.

4.) Mit der Schwungradwelle stehen nur drehende Systeme in Verbindung.

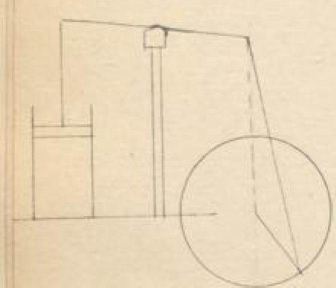
ja

5.) Die Schubstange sei so lang, daß im Vergleich mit der Kurbel, daß wir annehmen können, die Schubst. bewege sich immer vertikal.

Ferner Annahmen sind:

m Masse des Kolbens u. der Kolbenstange.

m_1 " der Schubstange.



$\Sigma\mu\rho^2$ Trägheitsmom. des Balanciers in Bezug auf seine Axe.

$\Sigma\mu_1\rho_1^2$ " des Schwungrades.

$\Sigma\mu_2\rho_2^2$ die auf eine Entfernung r von der Schwungradwelle reduc. Massen, welche etwa noch mitbewegt werden.

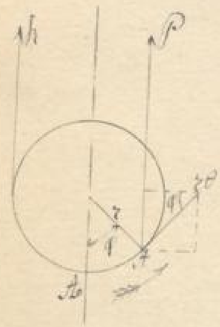
P der Druck auf den Kolben.

R der Widerstand, den die zu bewegende Maschine der Bewegung entgegensetzt, reducirt auf den Kurbelkreis.

ω_0 die Winkelgeschw. in A_0.

ω " " welche dem $\Delta\varphi$ entspricht

l die Länge des Balanciers.



Wir fragen nun, um wieviel hat sich die lebendige Kraft geändert, während der Bewegung durch den Winkel φ d.h. von A_0 bis A.

Wir haben dazu nur entsprechende Werthe in $\Sigma\int P ds - \Sigma\int R dr = \Sigma m v^2 - \Sigma m u^2$ zu substituiren. Es ist

$\Sigma\int P ds = P r \operatorname{vers}\varphi$ ./.

$\Sigma_1 \int h\,dz = hz\varphi$

$S m u^2 = \theta_0^2 S\mu_1\varrho_1^2 + \theta_0^2 S\mu_2\varrho_2^2$

$$S m v^2 = \begin{cases} m(r\theta\sin\varphi)^2 + S\mu\rho^2\left(\frac{r\theta\sin\varphi}{\ell}\right)^2 + \\ + m_1(r\theta\sin\varphi)^2 + \theta^2 S\mu_1\varrho_1^2 + \theta^2 S\mu_2\varrho_2^2 \end{cases}$$

$$= \theta^2\left[S\mu_1\varrho_1^2 + S\mu_2\varrho_2^2 + \sin^2\varphi\, r^2\left(m+m_1+S\mu\rho^2\frac{1}{\ell^2}\right)\right]$$

daher:

$$P r \sin vers\,\varphi - hz\varphi = \begin{cases}(\theta^2-\theta_0^2)(S\mu_1\varrho_1^2+S\mu_2\varrho_2^2) + \\ + \theta^2 r^2\sin^2\varphi\left(m+m_1+\frac{1}{\ell^2}S\mu\rho^2\right).\end{cases}$$

Wenn $m+m_1+\frac{1}{\ell^2}S\mu\rho^2 = M$ gesetzt wird,
so hat man die Gleich.:

$$P r \sin vers\,\varphi - hz\varphi = (\theta^2-\theta_0^2)(S\mu_1\varrho_1^2+S\mu_2\varrho_2^2)+r^2\theta^2\sin^2\varphi\, M \quad \text{I.}$$

Wir stellen nun wieder eine Gleichg. für den Beharrungszustand auf, wobei für $\varphi = \pi$, $\theta = \theta_0$ sein muß.

$$2Pr - hz\pi = 0$$

$$P = \frac{\pi}{2}h \quad \ldots\ldots\ldots \text{II}$$

$$2h\frac{\pi}{2}\left(\sin vers\,\varphi - \frac{2\varphi}{\pi}\right) = (\theta^2-\theta_0^2)(S\mu_1\varrho_1^2+S\mu_2\varrho_2^2)+r^2\theta^2\sin^2\varphi\, M \;..\; \text{III.}$$

Um das Max. u. Minim. zu bestimmen, ist

$\frac{d(\theta^2)}{d\varphi} = 0$, also

$$2h\frac{\pi}{2}\left(\sin\varphi - \frac{2}{\pi}d\varphi\right) = (S\mu_1\varrho_1^2+S\mu_2\varrho_2^2)2\theta d\theta + $$
$$+ r^2M\sin^2\varphi\, 2\theta d\theta + r^2\theta^2 M\, 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi;$$

$$\frac{2\theta d\theta}{d\varphi}\left(S\mu_1\varrho_1^2 + S\mu_2\varrho_2^2 + r^2M\sin^2\varphi\right) =$$
$$= 2h\frac{\pi}{2}\left(\sin\varphi - \frac{2}{\pi}\right) - 2r^2\theta^2M\sin\varphi\cos\varphi.$$

$$2\theta\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2h\frac{\pi}{2}\left(\sin\varphi-\frac{2}{\pi}\right) - r^2\theta^2M\sin2\varphi}{S\mu_1\varrho_1^2+S\mu_2\varrho_2^2+r^2M\sin^2\varphi}.$$

Bezeichnen wir mit α den Werth von φ, für welchen θ ein Minim. wird, u. durch w die zugehörige Winkelgeschw.; ebenso ~~für~~ durch β u. W die entsprechenden Werthe für das Maximum, so ist

$$\left.\begin{array}{l} 2h\frac{\pi}{2}\left(\sin\alpha - \frac{2}{\pi}\right) = r^2 w^2 M \sin 2\alpha \\ 2h\frac{\pi}{2}\left(\sin\beta - \frac{2}{\pi}\right) = r^2 W^2 M \sin 2\beta \end{array}\right\} \mathrm{IV}$$

u. ferner aus (III)

$$2h\frac{\pi}{2}\left(\sin vers\,\alpha - \frac{2\alpha}{\pi}\right) = (w^2 - c_0^2)(\Sigma\mu_1\rho_1^2 + \Sigma\mu_2\rho_2^2) + r^2 w^2 \sin^2\alpha\, M$$

$$2h\frac{\pi}{2}\left(\sin vers\,\beta - \frac{2\beta}{\pi}\right) = (W^2 - c_0^2)(\Sigma\mu_1\rho_1^2 + \Sigma\mu_2\rho_2^2) + r^2 W^2 \sin^2\beta\, M.$$

u. durch Subtraction:

$$2h\frac{\pi}{2}\left(\sin vers\,\beta - \sin vers\,\alpha - \frac{2}{\pi}(\beta - \alpha)\right) =$$

$$= (W^2 - w^2)(\Sigma\mu_1\rho_1^2 + \Sigma\mu_2\rho_2^2) + r^2 M W^2 \sin^2\beta - r^2 w^2 M \sin^2\alpha$$

$$\Sigma\mu_1\rho_1^2 = \frac{2h\frac{\pi}{2}\left(\sin vers\,\beta - \sin vers\,\alpha - \frac{2}{\pi}(\beta-\alpha)\right) - r^2 M(W^2\sin^2\beta - w^2\sin^2\alpha)}{W^2 - w^2} -$$

$$- \Sigma\mu_2\rho_2^2 \;\ldots\; \mathrm{V}$$

Es sei C die mittlere Winkelgeschwind. der Curbel.

Es soll $W - w = \frac{1}{n} C$ sein u. nehmen wir dass

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(W + w) = C \quad \text{so ist } W = C\left(2 + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2} \\ \text{u.} \quad \ldots \quad w = C\left(2 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2} \\ \text{u.} \quad — \quad W^2 - w^2 = \frac{2}{n} C^2 \end{array}\right\} \mathrm{VI}$$

Numerisches Beispiel.

Es soll das Trägheitsmoment eines Schwungrades bestimmt, das mit einer Dampfmaschine von 40 Pferdekräften in Verbindung steht. Dabei soll der Unterschied zwischen der größten u. kleinsten Geschwindigkeit eine bestimmte Größe haben.

Die Formel ist nach obiger Entwicklung

$$Sm\rho^2 = 15,08 \, \frac{k r n}{i^2}$$

Es sei $c = 1,8^m$ also $i = \frac{1,8 \, . \, 60.}{2 \cdot \pi} = 17,2$

ferner $n = 40$. u. endlich:

$$k r \, . \, \theta = 75 \, . \, 40$$

$$k r = \frac{75.40}{1,8} = 1666$$ u. folglich

$$Sm\rho^2 = 15,08 \, . \, \frac{1666 \, . \, 40}{(17,2)^2} = 3396^{\text{Kilogr.}}$$

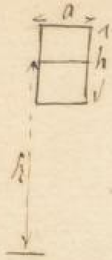
Da wir oben schon viele Massen vernachlässigt haben, so können wir bei der Bestimmung der Dimensionen des Schwungrades auch die Trägheitsmomente der Arme des Rades außer Acht lassen.

Wir erhalten, wenn R der Radius des Rades ist $\frac{Q}{2g} R^2 = Sm\rho^2 = 3396$

Q = Masse des Rades = $\frac{2 \, . \, 9,81 \, . \, 3396}{R^2}$

wenn $3,5 = R$ angenommen wird, ist

$Q = 5439^{\text{Kilogr.}}$ ferner ist.



wenn a die Dicke u. h die Höhe des Radreifes u. 7200 Kilgr. das Gewicht eines Kubikmeters Gußeisen ist:

$$ah \cdot 2R\pi \cdot 7200 = 5439 \quad \text{u. wenn } h = 2a$$

$$7200 \cdot a \cdot 2a \cdot 2\pi \cdot 3{,}5 = 5439$$

$$a = \sqrt{\frac{5439}{7200 \cdot 4 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}14}} = 0{,}131^{m}$$

also $a = 0{,}131^{m}$ u.

$h = 0{,}262^{m}$.

2tes Numerisches Beispiel

mit Rücksicht auf die Massen der Schubstangen etc.

Oben haben wir die Formeln aufgestellt:

$$kr\frac{\pi}{2}\left(\sin\alpha - \frac{2}{\pi}\right) = Mw^2 \sin 2\alpha$$

$$kr\frac{\pi}{2}\left(\sin\beta - \frac{2}{\pi}\right) = MW^2 \sin 2\beta$$

$$G\mu\rho^2 = \frac{kr(\sin\cos\beta - \sin\cos\alpha - \frac{2}{\pi}(\beta-\alpha))^2 M(W^2\sin^2\beta - w^2\sin^2\alpha)}{W^2 - w^2} - S\rho_2^2$$

der Ungleichförmigkeit wegen, setzen wir wieder

$$W = C\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad w = C\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$$W + w = 2C$$

$$W - w = \frac{2}{n}C \quad \text{u.} \quad W^2 - w^2 = \frac{4}{n}C^2$$

Die Dampfmaschine habe wieder 40 Pferdekraft ferner sei:

$n = 40$

$C = 2{,}744^{m}$

Höhe der Balance in der Mitte $0{,}828^{m}$

Dicke derselben $0{,}06^{m}$.

iii. Länge der Schubstange $5,2^m$

Querschnitt " " $0,329^{qm}$

Durchmesser des Dampfkolbens $0,856^m$

Höhe ‒ ‒ ‒ ‒ ‒ ‒ $0,15^m$

Querschnitt ‒ ‒ ‒ ‒ ‒ $0,5755^{qm}$

Gewicht des Lokomotives ferner 7200^{kgr}

daher Gewicht des Kolbens 621^{kgr}

" der Schubstange 1255^{kgr}

" des Balanciers 1963^{kgr}

Man hat somit

$$M = m + m_1 + \frac{\Sigma m e^2}{l^2} = \frac{1}{2g}\left(621 + 1255 + 1963 \cdot \frac{(5,488)^2 + (8,18)^2}{(2,744)^2}\right)$$

$$M = 130.$$

$$Kr = 1666.$$

Es sei $l = 1,8$ daher

$$W = 1,8\left(1 + \tfrac{1}{40}\right) = 1,845$$

$$w = 1,8\left(1 - \tfrac{1}{40}\right) = 1,75$$

$$W^2 = 3,403, \qquad w^2 = 3,063$$

Für die Bestimmung von α u. β ergibt sich

$$\sin\alpha - \frac{2}{\pi} - \frac{2Mw^2}{Kr\pi}\sin 2\alpha = 0$$

$$\frac{2Mw^2}{Kr\pi} = \frac{2 \cdot 130 \cdot 3,063}{1666 \cdot 3,141} = 0,15207$$

also $\sin\alpha - 0,63653 - 0,15207 \sin 2\alpha = 0$

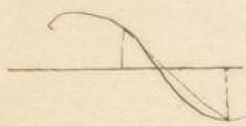
$\sin\beta - 0,63653 - 0,16895 \sin 2\beta = 0$

führen wir endlich statt $\beta = \pi - \beta_1$ ein so

ergibt sich $\sin\beta_1 - 0,63653 + 0,16895 \sin 2\beta_1$.

Am einfachsten läßt sich nun α u. β aus den nach den beiden Gleichungen durch die regula falsi bestimmen. 112, 113.

Setzen wir z. B. $\alpha = 45^\circ$, so ergibt sich, wenn wir den dadurch sich ergebenden Werth als Ordinate y zu α als Absc. einer Curve ansehen:



$$0{,}7071 - 0{,}63653 - 0{,}15207 = y_0$$

$$\alpha_0 = 45;\ y_0 = -0{,}0815$$

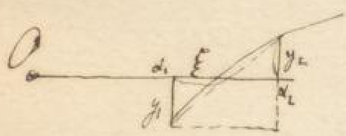
Da aber nur für $y = 0$ α einen Wurzelwerth der Gleichung hat, so fahren wir fort andere Werthe für α zu substituiren.

$$\alpha_1 = 50^\circ,\ \sin 50 = 0{,}7660,\ \sin 2\alpha = 0{,}9848.$$

$$0{,}7660 - 0{,}63653 - 0{,}15207 \cdot 0{,}9848 = y_1$$

also für $\alpha_1 = 50$, $y_1 = \mp 0{,}0203$

~~fern~~ $\alpha_2 = 55^\circ$, $\sin 55 = 0{,}8192$; $\sin 110 = 0{,}9385$



$$0{,}8192 - 0{,}63653 - 0{,}15207 \cdot 0{,}9385 = y_2$$

$$y_2 = +0{,}0399$$

so ist $\xi : y_1 = (\alpha_2 - \alpha_1) : (y_1 + y_2)$

$$\xi = \frac{y_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{(y_1 + y^2)} = \frac{+0{,}0203 \cdot 5}{0{,}0203 + 0{,}0399} = 1^\circ 41'.$$

also ist der Wurzel naher Werth ist

$$\alpha_1 + \xi = 51^\circ 41'.$$

Ebenso verfahren wir mit β. Substituiren nach Vermuthen etwa 30°, so wird: $\sin 30 = 0{,}5000$, $\sin 2\beta = 0{,}866$, also:

$$0{,}500 - 0{,}63653 + 0{,}76495 \cdot 0{,}866 = y$$

$y = 0{,}0094$ also $\beta = 30$ genügend.

113. Substituiren wir endlich:

$\sin vers\,\beta - \sin vers\,\alpha = \sin vers(180-30) - \sin vers\,5^\circ 41' =$

$= 1,4860.$

$\frac{2}{\pi}(\beta - \alpha) = 1,0920$

$\sin vers\,\beta - \sin vers\,\alpha - \frac{2}{\pi}(\beta-\alpha) = 1,4860 - 1,0920 = 0,3940$

$kr \cdot \frac{\pi}{2}(0,3940) = 1031,0794$

$r^2 M \cdot (W^2 \sin^2\beta - w^2 \sin^2\alpha) = -1520,4375$

Betrachtung über den Stoß.

Wie ist der Grundsatz der lebendigen Kräfte zu gebrauchen, wenn Stöße auf unelastische Körper vorkommen?

Durch den Stoß ändert sich plötzlich die lebendige Kraft u. diese Änderung muß auch zu der

$\Sigma \int P dp - \Sigma \int Q dq = \Sigma m (V^2 - v^2)$ hinzugefügt werden.

Wir bestimmen dies durch das Carnot'sche Princip. Es seien

$m_1, m_2, m_3 \ldots$ die verschied. Massen des Syst.

U_1 U_2 U_3 ... } die Geschw. vor dem
V_1 V_2 V_3 ... } Stoß auf 3 rechtw. Axen
W_1 W_2 W_3 ... } zerlegt.

u_1 u_2 u_3 -- } die Geschw. nach denselben
v_1 v_2 v_3 -- }
w_1 w_2 w_3 -- } Achsen nach dem Stoße.

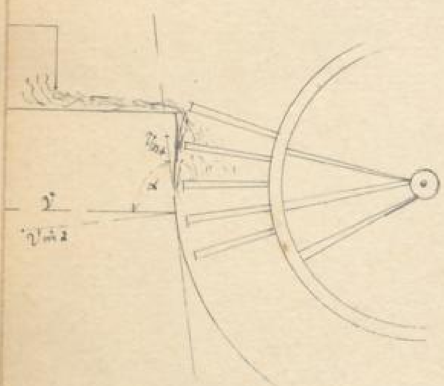
Die Verluste an leb. Kr. der einzelnen Massentheilchen:

$$\mu_1 \{(U_1-u_1)^2+(V_1-v_1)^2+(W_1-w_1)^2\}$$
$$\mu_2 \{(U_2-u_2)^2+(V_2-v_2)^2+(W_2-w_2)^2\}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Der Gesammtverlust also

$$= S\,\mu\,\{(U-u)^2+(V-v)^2+(W-w)^2\}$$

Zu bemerken ist, daß diese Gleichung nur in den Fällen praktisch anwendbar ist, wo man die Geschwind. des Systems nach dem Stoße genau voraus kennt.



1. Beispiel.

Untersuchung der Bewegung eines Wasserrades, auf dessen Schaufeln das Wasser mit Stoß ankömmt.

Die Geschw. des Rades ändert sich nicht, folglich ist in der Mitte des Rades auch kein Verlust an leb. Kraft.

Dagegen das Wasser muß, wenn es auf die Schaufel getroffen, die Geschw.

 des Rades annehmen.

Die Geschw. des Rades sei v.

" mit der das Wasser verbraucht sei V.

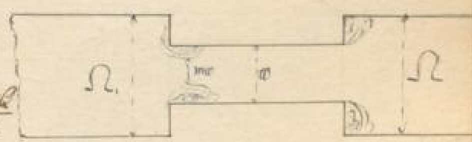
Letztere zerlegen w. in 2 rechtw., in eine tangentiale u. in eine nach der Richtg. des Radius; erstere ist $V\cos\alpha$, letztere $V\sin\alpha$.

Wenn also in der Sec. ein Wasserquantum zu 1000 Kilgr. verbraucht, so ist die Masse $1000\frac{Q}{2g}$ u. der Verlust a. leb. Kraft $= \frac{1000\,Q}{2g}\left\{(V\cos\alpha - v)^2 + (V\sin\alpha - 0)^2\right\}$

$$= \frac{1000\,Q}{2g}\left(V^2 + v^2 - 2Vv\cos\alpha\right)$$

2. Beispiel.

Bewegung des Wassers in einer Röhre mit schroffkantigen Verengungen.



Stöße kommen nur bei dem Ausfluss von Ω in ω, u. wieder von ω in Ω.

Wenn nun oben in der Sec. eine Masse $\frac{1000\,Q}{2g}$ durchfließt, so ist, – wenn ferner u u. U die Geschw. in den 2 Querschnitt sind u. m der Contractionscoeffic. ist, $m\omega$ der verengte Querschnitt u. w sei die Geschw. in demselben –:

$$\frac{1000\,Q}{2g}\left\{\left(\frac{Q}{m\omega} - \frac{Q}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{Q}{\omega} - \frac{Q}{\Omega}\right)^2\right\}$$

Nämlich $Q = m\omega w$; $Q = \omega u$, $Q = \Omega U$

$$w = \frac{Q}{m\omega}, \quad u = \frac{Q}{\omega}, \quad U = \frac{Q}{\Omega}.$$

die allgemeine Gleichung mit Rücksicht auf den Stoß wäre also

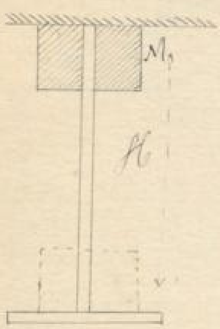
$$\Sigma_1 \int P dp - \Sigma_1 \int Q dq = \Sigma m (v^2 - u^2) + \Sigma \mu \left[(U-u)^2 + (V-v)^2 + (W-w)^2\right].$$

Für den Beharrungszustand der Maschine, wobei also $v = u$ hat man ganz einfach die Gleichg:

$$\Sigma_1 \int P dp = \Sigma_1 \int Q dq,$$

in welcher Gleich. keine Massen vorkommen, was im ganzen Bereich des Maschinenwesens eine bedeutende Einfachheit herbeiführt.

Über die Festigkeit der Materialien hinsichtlich des Stoßes.



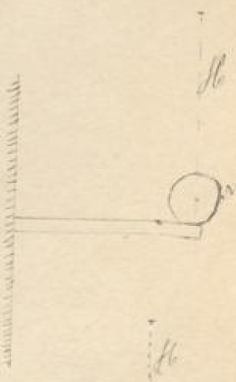
Wenn z.B. ein Stab in senkrechter Lage unten ein Gewicht zu tragen hat, so ist die absolute Festigkeit dem Durchschnitt proportional.
Anders ist es aber, wenn unten eine Platte fest mit dem Stabe verbunden ist u. man auf diese ein Gewicht (etwa einen schweren hohlen Cylinder) herabfallen läßt.
Es sei während dem Stoß w das maxim. der Spannung; M sei das Gewicht des Stoßend

117. Beispiel. Wenn das Volumen des Stabes, ε der Elasticitätscoeffic.; H die Höhe, von der der Körper fällt, so ist

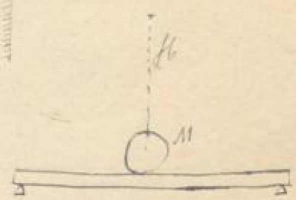
$$\omega = \sqrt{\frac{2MH\varepsilon}{W}}$$

also hat der Querschnitt keinen Einfluß, sondern je größer das Volumen, desto kleiner die Spannung.

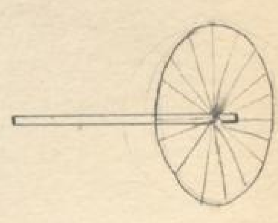
2.) Ebenso überraschend ist die Gleichung für einen horizontalen Stab, der in einer Wand befestigt: hiebei ist $\omega = 3\sqrt{\frac{2MH\varepsilon}{W}}$.



u. 3.) Wenn derselbe an beiden Enden unterstützt ist, ebenfalls $\omega = 3\sqrt{\frac{2MH\varepsilon}{W}}$.



4.) Beim Stoß während drehender Bewegung ergibt sich; wenn z. B. an einer Welle ein Schwungrad in Bewegung ist u. plötzlich die Welle festgehalten würde, so würde beim Überschreiten des Maxim. von Torsionsfestigkeit ein Wellenbruch erfolgen.



Wenn W das Volumen der Welle; C die anfängliche Geschw.; τ ein Elastic.coeffic. für Drehung; Smp^2 das Trägheitsm. d. Schwung=

werde u. S das Maxim. der Torsions-
festigkeit, so ist

$$\delta = e_0 \sqrt{\frac{2t\,S\,m\,\varphi^2}{g\,\mathfrak{A}}}$$

wobei angenommen das dem größten
Volumen der Welle eine größere
Festigkeit entspricht.

118. 119.

Allgemeine Theorie der Maschinen.

§ 1.

Jede mechanische Operation besteht entweder in einer Ortsveränderung oder in einer Formveränderung eines Körpers.

Wir sind nicht im Stande Körper zu schaffen, wohl aber besitzen wir die Fähigkeit, die Gesetze kennen zu lernen, nach welchen die Naturkräfte auf ihre eigenthümliche Weise wirken; und diese Kenntniß lehrt uns die Mittel ausfindig machen, durch die wir d. Naturkräfte verwenden können, daß sie mit den Naturprodukten gerade diejenige Veränderung vornehmen, durch welche sie (die Rohstoffe) an die Orte geschafft werden, wo wir sie brauchen, oder in Produkte (der Industrie od. der Kunst) verwandelt werden, welche für unsere materiellen u. geistigen Zwecke nützlich u. nothwendig sind.

§. 2.

Will man mit eing. Körper eine mechan. Arbeit verrichten, so muß m. mit einer gewissen Kraft auf denselben einwirken. denn 1.) muß der zu verändernde Körper überhaupt in Bewegung gesetzt, also seiner Masse od. den einzelnen Theilchen derselben Geschwindigkeit ertheilt werden, u. 2.) wirken allen Veränderungen, welche m. mit e. Körp. vorn. will, gewisse Kräfte entgegen, die überwunden werden müssen. Hat m. z. B. einen Körper in horizontaler Richtung auf einer Schleife od. einem Wagen fortzuschaffen, so ist im ersten Falle die Reibung, welche die Bahn verursacht, u. im 2ten Fall die Zapfenreibung, so wie auch der Widerstand, der durch das Eindringen der Räder in die Bahn entsteht, zu überwinden. Soll ein Körp. gehoben werden, so muß das Gewicht desselben (d. h. die Kraft, mit w. die Erde den Körp. anzieht) überwunden werden. Bei allen Formänderungen der Körper, welche durch

Hobeln, Feilen, Sägen, Drehen, Meißeln, Schlagen, Spinnen, Weben, etc. geschehen, müssen die Molekularkräfte, die jeder neuen Gruppierung der Theilchen entgegen wirken, überwältigt werden.

§. 3.

Die Kräfte, die zur Überwältigung andrer angewendet werden können, haben nur ihren Sitz in gewissen Stoffen, u. können in der Natur nie erzeugt wr. Die Materie besteht aus einem passiven Bestandtheil, welchen wir die <u>Masse</u> nennen, u. einem activen, dem wir den Namen <u>Kraft</u> beilegen. Weder der eine noch der andere Bestandtheil kann von dem andern wirklich getrennt werden, jeder nur getrennt gedacht werden.

Diejenigen Stoffe od. Körper, welche im Stande sind, auf äußere Körper eine bedeutende Wirkung auszuüben, werden <u>Motoren</u> (Beweger) genannt. Jeder in Bewegung befindliche Körper kann einem andern Bewegung mittheilen, indem er seine eigene allmählig verliert. Solche Motoren sind z. B. das Wasser der Flüsse,

u. Wasser u. die bewegte Luft (d. Wind.)

Körper können ferner durch äußere auf sie einwirkende Kräfte zu Motoren werden, wie z. B. Wasser, wenn es durch die Anziehung der Erde von einem höheren zu einem tiefern gelangt, [illegible] strömen kann; oder ein Elektromagnet, durch die elektromagnetische Kraft einer Batterie; od. eine Stahlfeder, wenn sie zusammengepreßt worden ist.

Es können aber auch d. Körper durch die ihnen ursprünglich innewohnende Kraft, wenn sie veranlaßt wird, nach außen zu wirken, zum Motor werden, wie dies insbesondere beim Wasserdampf der Fall ist oder bei den chemischen Kräften.

§. 4.

Bei den nachweisl. Veränderungen, welche in d. Natur ohne unsere Mithilfe, ohne unsere Veranlassung entstehen, wirkt der Motor gewöhnlich unmittelbar auf einen andern Körper ein, der dadurch eine Veränderung erleidet, u. dann ist diese von allerlei Zufälligkeiten abhängig, wie z. B. bei der Bewegung des Wassers in einem schaffenheit der Stoff ist, dessen Form u. Lage unterbrochenen Veränderungen ausgesetzt sind.

Soll daher mit e. Körp. eine ganz bestimmte Form- od. Ortsveränd. vorgenommen werden, so wird dies fast nie durch unmittelbare Einwirkung eines Motors geschehen können, sondern es ist nothwendig, den Motor mit dem zu verändernden Körper durch ein gewisses System von Zwischenkörpern, welches alle Willkürlichkeit u. Zufälligk. der Beweg. aufzuheben im Stande ist, u. nur eine dem Zweck der Veränd. angemessene Bewegung gestattet, in Verbindung zu setzen.

Dieses <u>Körpersystem</u> bildet die <u>Maschine</u>.

§. 5.

Bei jeder mechanischen Operation kommen also drei Arten von Körpern vor:

1.) der Motor od. der active Körper.

2.) der zu verändernde Körper.

3.) die Maschine, welche die Verbindung zwischen beiden herstellt.

§. 6.

An jeder Maschine muss wenigstens ein Bestandtheil vorkommen, auf welchen der Motor zunächst einwirkt u. die Wirkung desselb unmittelbar aufnimmt.

Bei einem Wasserrad sind es die Schaufeln, od. Zellen, auf welche Motor unmittelbar einwirkt. Bei einer Dampfmaschine ist es der Kolben, auf welchen der Dampf drückt.

Diesen Bestandtheil wollen wir Receptor nennen.

Alle Bestandtheile, welche zusammen wirken müssen, damit der Motor auf die zweckmässigste Weise dem Receptor seine Wirkung mittheilen kann, bilden die Kraftmaschine.

§. 7.

Bei jeder Maschine muss wenigstens ein Bestandtheil vorkommen, der auf den zu verändernden Körper unmittelb. einw. u. mit demselben diej. Funktionen durchführt, welche die zu verrichtende Arbeit erfordert.

Diese Körper wollen wir das Werkzeug nennen.

Ist die nähere Operation verwickelt, so sind gewöhnlich mehrere Werkzeuge, die gleichzeitig, nacheinander folgend wirken müssen, nothwendig.

Alle diese Werkzeuge werden dann gewöhnlich zu einem Ganzen vereinigt, u. bilden ein System, welchem wir den Namen Werkzeugsystem od. Arbeitsmaschine beilegen wollen. Oft sind sogar eine ganze Reihe von solchen Arbeitsmaschinen nöthig, u. diese bilden wieder ein Ganzes, welches wir ein System von Arbeitsmaschinen nennen wollen. Bei einer Pumpe, die zum Heben des Wassers dient, sind die Kolben u. die Ventile die Werkzeuge, die Pumpe selbst ist eine Arbeitsmaschine.

Die verschied. Maschinen, welche in den Eisenwerken vorkommen, nämlich die Hammer-Walzwerke, Blechscheren, Ziehbänke, Gebläse &c bilden ein System von Arbeitsmaschinen. Die Hämmer des Hammerwerkes, die Walzen des Walzwerkes sind die einzelnen Werkzeuge. Ein sehr klares Beispiel eines Systems von Arbeitsmaschinen, liefert eine mechanische Baumwoll-Spinnerei.

§. 8.

Bei jeder Maschine, so wie bei jedem Maschinensysteme, muss ein Mechanismus vorkommen, welcher den Motor od. die Kraftmaschine mit dem Werkzeuge od. der Arbeitsmaschine od. mit allen Maschinen des ganzen Systems d. Arbeitsmaschinen in Verbindung bringt, um die Kraft des Motors nach allen Punkten hinzuleiten, wo es gearbeitet werden soll.
Diesen Mechanismus wollen wir die Transmission nennen. Er besteht gewöhnlich aus vielen Rädern, Rollen oder überhaupt aus Bestandtheilen, die zur Fortleitung u. Verwendung der Bewegung geeignet sind.

§. 9.

Eine vollständige einfache Maschine besteht also aus:

1.) dem Motor
2.) dem Werkzeuge
3.) einem Verbindungsmechanismus.

Eine zusammengesetzte vollständige Maschine besteht aus:

1.) der Kraftmaschine
2.) der Arbeitsmaschine
3.) einem Verbindungsmechanismus

Ein vollständiges Maschinensystem enthält:

1.) eine od. mehr Kraftmaschinen
2.) eine gewisse Anzahl v. Arbeitsmaschinen.
3.) einen Verbindungsmechanismus od. die Transmission.

§. 10.

Wenn irgend eine mechanische Operation ausgeführt werden soll, so ist zunächst nur allein gegeben:

1.) der Motor
2.) der zu verändernde Körper
3.) was auf letzterem durch die Veränd. geschehen soll, od. wozu er geschafft werden soll; ~~u.~~ das Mittel durch welches die Operation ausgeführt werden kann; d. h. die Maschine muss erdacht werden.

Es wird z. B. verlangt durch Wasser (Motor) Getreide (der zu veränd. Stoff) in Mehl (was aus dem Stoff werden soll) zu verwandeln; od. mit Dampf Baumwolle u. Seide zu spinnen, oder mit Pferden Bretter aus Balken zu schneiden.

§. 11.

Die Einrichtung des Rezeptors wird zwar durch die Natur des Motors zum Theil bedingt, aber nicht vollkommen bestimmt, denn u. kann für jeden Motor unzählig viele Rezeptoren ausfindig machen.

Die Einrichtung u. Bewegung des Werkzeugs oder der Arbeitsmaschine wird zum Theil durch die Natur des zu verarb. Stoffes u. durch die Eigenschaften des Dinges, welches aus der Arbeit hervorgehen soll, bedingt, aber wieder nicht vollk. bestimmt. Man kann z. B. aus einem Balken durch Anwendung von Beilen, od. durch Anwend. v. Schneiden, od. durch Anw. von geradlinigen od. kreisförmigen Sägen zu Brettern machen; oder man kann Eisenstabe durch Hämmern, od. durch Werken zwischen Walzen hervorbringen.

Hat man sich über die Einrichtung der Kraft- u. Arbeitsmaschine entschieden so kann auch der Verbindungsmechanismus noch auf unzählige Arten hergestellt werden.

Es ist also die Construct. einer Maschine oder eines Maschinensystems, welches irgend eine mechanische Operation bewerkstelligen soll, eine bestimmte Aufgabe, die unendlich verschiedener Auflösungen fähig ist, u. es kommt jederzeit darauf an, die vollkommenste dieser Auflösungen auffindig zu machen.

§. 12.

Eine mechanische Operation wird um so vollkommener ausgeführt,

1. je vollkommener die Qualität des Productes ist, welches aus dem Rohstoff gewonnen werden soll.
2.) je geringer die Quantität des Motors ist, welche eine bestimmte Quantität Producte liefert.
3.) je kleiner die Anschaffungskosten u. Unterhaltungskosten der Maschine oder des Maschinensystems sind.

Wir wollen nun sehen, von welchen Umständen, diese 3 Hauptbedingungen abhängen.

§. 13.

Die Qualität des Producte wird vorzüglich durch die Wahl des Werkzeuges oder der Arbeitsmaschine bedingt. Je mehr diese durch ihre Einrichtung u. Bewegungsart der Natur des zu verarbeitend. Stoffes u. der Art der Veränderungen, welche mit demselben

vorzunehmen, sind angemessen sind, je
genauer u. zweckmäßiger sie alle ihre Bewegungen
ausführen, desto besser wird die Qualität
des Produktes ausfallen.
Gewöhnlich geht der Arbeit durch Maschinen
die Handarbeit voraus, u. die Werkzeuge
welche bei letzterer benützt werden, bilden
den Ausgangspunkt für die Construktion
der Arbeitsmaschine. Gewöhnlich ist es
aber für den Übergang von der Hand-
arbeit zur Maschinenarbeit nöthig, erstere
in einfache Operationen aufzulösen, zu theilen
u. für jede dieser Operationen ein besonderes
Werkzeug od. eine besondere Arbeitsma-
schine ausfindig zu machen.

§. 14.

Die Quantität des Motors, welche
für eine bestimmte mechanische Operation noth-
wendig ist, d.h. der Kraftaufwand richtet
sich theils nach der Größe der Operation
selbst, vorzüglich aber auch nach der Ein-
richtung u. Bewegung des Triebwerks.
Die vorzüglichsten Motoren durch zweck-
mäßig eingerichtete Triebwerke, ist der wich-
tigste Gegenstand für die ganze Industrie.

denn die Rohstoffe haben an u. für sich keinen Werth u. nur ihre Gewinnung u. Verarbeitung vermittelst der Kräfte gibt ihnen Werth.

Dieser richtet sich vorzüglich nach dem Kraftaufwand, welcher bei der Gewinnung u. Verarbeitung angewendet wurde. Die Industrie wird daher in dem Maße Fortschritte machen, als man in der Benützung der Naturkräfte größere Fortschritte machen wird.

§. 15.

Die Anschaffungs- u. Unterhaltungskosten eines Maschinensystemes od. einer Maschine richten sich vorzüglich nach

1.) der größern od. geringern Einfachheit des ganzen Zusammenhanges aller Maschinenbestandtheile.

2.) nach der Natur u. Quantität des Materialaufwandes für die Herstellung der Maschine.

3.) Nach der Genauigkeit u. Vollkommenheit in der Ausführung.

§. 16.

Wenn eine Maschine nur von Zeit zu Zeit od. ganz nur vorübergehend zu benützen ist, u. die größere od. geringere Vollkommenheit ihrer Construct. keinen wesentlichen Einfluß hat auf die Menge u. Güte der Arbeit, welche mit derselben verrichtet werden soll, wird man vorzüglich darauf bedacht sein die Anschaffungskosten zu vermindern u. es wird in diesem Falle eine minder vollkommen construirte aber wohlfeile Maschine ihrem Zweck am besten entsprechen. Wenn dagegen eine Maschine continuirlich zu arbeiten hat, einen bedeutenden Kraftaufwand zu ihrer Bewegung bedarf, u. so wohl die Quantität als Qualität der Produkte, welche sie liefern soll, von dem Grade der Vollkommenheit in der Construction der Maschine abhängt, darf man die Anschaffungskosten nicht scheuen, da ja weil auch eine sorgfältig ausgeführte Maschine nicht so bedeutende Unterhaltungskosten verursacht u. dauerhafter ist.

§. 17.

Für den Maschinenbau sind vorzüglich folgende Kenntnisse u. Fertigkeiten erforderlich:

1.) Geometr. Kenntnisse u. insbesondere ein ausgebildetes Vermögen sich räumliche Gegenstände klar vorstellen zu können, u. dieselben richtig zu verzeichnen.

Diese geom. Kenntnisse sind vorzüglich für die Auffindung der zweckmäßigsten Zusammensetzungen der Maschinentheile von besonderer Wichtigkeit.

2.) die allgemeinen Grundsätze der Statik u. Mechanik, indem vermittelst derselben:

a.) die Widerstände ausgemittelt werden können, durch welche die vortheil-haftesten Einrichtung der Motoren bestimmt werden kann.

b.) diej. Formen u. Maschinen Abmessungen für die Maschinenbestandtheile bestimmt werden, bei welchen sie mit dem geringsten Materialaufwand die hinreichende Festigkeit erhalten.

c.) der Kraftaufwand, ~~für~~ welcher

für irgend eine andern Operation nothwendig ist, beurtheilt u. benutzt werden kann.

3.) Zeichnungen der Stoffe, welche durch die Maschine bearbeitet werden sollen, u. der Materialien aus welchen die Maschinenbestandtheile zu verfertigen sind.

4.) Zeichnungen aus dem Bereiche für die Herstellung der Wasserbauten, der Maschinenfundamente u. der Fabrikgebäude.

Die vorzüglichsten Fertigkeiten, welche der Maschinenconstructeur besitzen soll, sind:

1.) Fertigkeit im genauen Zeichnen

2.) Fertigkeit in den verschied. Arbeiten u. Operationen, welche bei der Ausführung der Maschinenbestandtheile u. Aufstellung der Maschinen vorkommen.

Das Messen der Wirkungen der Kräfte.

Die unmittelbare Äußerung einer Kraft ist immer ein Zug oder ein Druck, u. kann jederzeit gemessen werden, indem man ein Gewicht angibt, welches auf eine Unterlage einen ebensogroßen Druck ausübt, als jene Kraft. Durch einen Druck allein aber wird noch keine Arbeit verrichtet, sondern erst dann, wenn der Punkt, auf welchen der Druck ausgeübt wird, auch nach der Richtung der Kraft fortschreitet. Die Größe der Arbeit, welche eine Kraft verrichtet, od. die Größe der Wirkung, welche sie hervorbringt, ist offenbar zu schätzen:

1.) nach der Größe des Druckes, oder Zuges, mit welch. die Kraft wirkt,
2.) nach der Länge des Weges, den der Angriffspunkt der Kraft nach der Richtung derselben zurücklegt.

Wenn also eine Kraft P mit unveränderlicher Intensität u. ihrer eigenen Richtung fortschreitet u. einen Weg s zurücklegt, so ist die Größe der Wirkung der Kraft dem Produkt Ps proportional; u. wenn man als Einheit die Wirkung (der Kraft)

dig. mittel, für welche dieses Product = 1 ist,
so wird durch dasselbe die Größe der
Wirkung im Vergleich mit der als Einheit
angenommenen ausgedrückt. Wir werden
in der Regel die Kräfte in Kilogrammen
u. die Wege in mètres ausdrücken, u.
werden für das Product Ps die Benennung
Kilogramme Mètres (Km) gebrauchen.

Jede Arbeit kann mit d. Heben einer Last
auf e. gewisse Höhe verglichen werden;
denn wenn z. B. eine Kraft von 10^k durch einen
Weg von 3^m wirkt, also eine Wirkung
$= 10^k 3^m = 30^{km}$ hervorbringt, so ist diese
genau ebensogroß, als wenn ein Körper,
dessen Gewicht 10^k beträgt, auf eine Höhe von
3^m erhoben würde. Diese Vergleichungen
der Wirkungen der Kräfte mit dem Heben
von Lasten ist aber für das Wesen der Wirkungen
nicht nothwendig, sond. gibt nur eine anschauliche
Vorstellung von der Größe der Wirkung.

Um von größeren Wirkungen der Kraft
eine deutl. Vorstell. zu bekommen, als jene
ist, als durch den Zahlenwerth des Products
Ps hervorgerufen wird, ist m. allmählig
übereingekommen, diese Wirkungen mit jenen
zu vergleichen, welche ein Pferd von
gewöhnlicher Stärke hervorzubringen vermag. Man hat zu diesem Endzwecke

139. ein Pferd u. mittlere Kräfte angenommen, welches im Stande ist einen Widerstand von 75 kgm in jeder Sec. durch einen Weg v. 1m zu überwinden. Die Wirkung dieses idealen Pferdes ist also

$$p. 1'' 75^{km}$$

u. m. kann nun jede Wirkung Ps auf Arbeit bestimmen, indem m. angibt, wie viele Pferde durch eine Sec. wirken müssten, um eine Wirkung hervorzubringen, die dem Prod. Ps gleich kommt. Nennt m. N die Anzahl dieser Pferde, so ist

$$75 N = Ps \quad u. \quad N = \frac{Ps}{75}$$

Die Einführung der Pferdekraft zum Messen größerer Wirk. ist bei der Erfindung der Dampfmaschinen geschehen, weil diese anfänglich meistens solche Maschinen zu bewegen hatten, die früher v. Pferden getrieben wurden.

Daß durch das Produkt aus d. Druck, der eine Last erhebt, u. den Weg, durch welchen der Angriffspunkt derselben fortschreitet u. der Zeit in allen Fällen die Größe der Wirkung der Last, so wie auch die Größe der Arbeit, welche sie dadurch verrichtet, gemessen wird, wird vorzüglich erst dann klar, wenn m. die Arbeiten vermittels der Maschine betrachtet.

Wenn eine Kraft nicht mit unveränd. Intensität wirkt, sond. sprungweise oder continuirlich verändert. so, kann man natürlich ihre Wirkung nicht durch ein einziges Produkt ausdrücken.

Nehmen wir an eine Kraft wirke veränderl. veränd. durch einen gewissen Weg s, theilen wir diesen in sehr kleine oder unendl. kl. Theile $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$, ferner bezeichnen wir durch

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad \ldots \quad p_n$$

die Intensitäten, mit welchen die Kraft in dem Augenblicke wirkt, in welchem ihr Angriffspunkt die Wege $s_1\ s_2\ s_3 \ldots$ zu beschreiben beginnt; so werden die Produkte

$$p_1 s_1 \quad p_2 s_2 \quad \ldots \quad p_n s_n$$

beziehungsweise die einzelnen Wirkungen ausdrücken, während der ganze Weg

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = s$$

zurückgelegt wird.

Um die Wirkung einer veränd. Kraft zu bestimmen, muß also das Gesetz bekannt sein, nach welchem sich die Kraft verändert, so wie ihr Angriffspkt fortschreitet, oder es muß wenigstens für eine Reihe aufeinanderfolgender Zeitaugenblicke der Bewegung die Intensität der Kraft u. die während dieser Zeitmoment zurückgelegten Wege bekannt sein.

Man z. B. der Angriffspunkt dieser Kraft einen Weg von 1m zurücklegt, u. m. weiß entw. aus Beobachtungen od. aus theoretischen Betrachtungen, daß die Intensität der Kraft:

10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20 Kilogr.

betrug, als der Angriffspunkt einen Weg von

0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0m

zurückgelegt hatte, so wird m. annäherungsweise die gesammte Arbeit der Kraft finden, wenn m. annimmt, daß jede der obigen Kräfte durch 0,1m gewirkt hat, u. m. erhält dann:

$$1,0+1,1+1,2+1,3+1,4+1,5+1,6+1,7+1,8+1,9+2,0=16,5^{km}$$

Ist das Gesetz, nach welchem eine Kraft veränderlich ist, durch eine Formel ausgedrückt, u. als Funktion des Weges bekannt, so kann m. die Arbeit d. Kraft durch eine Annäherungsmethode z. B. Simpson'sches Verfahren od. vermittelst der Methode der Integralrechnung berechnen.

Um die Simpson'sche Formel anzuwenden wird man den ganzen Weg, für welchen die Wirkung zu berechnen ist, in eine gerade Anzahl Theile theilen. Es sei e ein solcher Theil. Hierauf wird m. aus der Formel, indem m. in dieselbe für den Weg die Werthe 0; 1e; 2e; ... ne

setzt, die entsprechenden Intensitäten $P_0, P_1 \ldots$
berechnen u. dann erhält man durch folgende Formel die ganze Wirkung W der Kraft:

$$W = \frac{1}{3} e \left\{ P_0 + P_n + 4(P_1 + P_3 + P_5 + \ldots) + 2(P_2 + P_4 + P_6 + \ldots) \right\}.$$

Wer mit d. Elementen der Integralrechng vertraut ist, wird es aber vorziehen durch wirkliche Integration die Lösung zu machen.

Ist P die Intensität der Kraft (als Funkt. des Weges) nachdem der Angriffspt. derselben einen Weg s zurückgelegt hat, welcher von irgend einem Pkte der der geraden Linie an, auf welcher d. Kraft wirkt u. in der der Angriffspt. fortschr. zu rechnen ist; ds der unendl. kleine Weg, den der Angr. der Kraft zurücklegt, so ist

$$P\,ds$$

die unendl. kleine Wirkung, welche dem Weg ds entspricht, u.

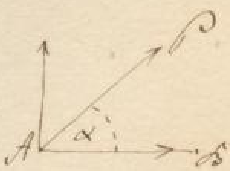
$$\int_{s_0}^{s_1} P\,ds$$ die totale Wirkung,

welche die Kraft hervorbringt, während ihr Angriffspt. den Weg $s_1 - s_0$ zurücklegt.

Was bis jetzt über die Berechnung der Wirkg gesagt worden ist, gilt auch für den Fall, wenn der Angriffspunkt eine krumme Linie beschreibt, vorausgesetzt, daß die Kraft immer nach der Richtung der Tangente an d. krumme Linie wirkt.

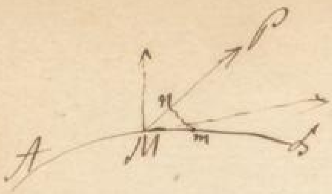
Wenn der Angriffspunkt einer Kraft nicht nach der Richtung derselben fortschreitet, so muß m. um die Wirkung der Kraft zu finden, den wirklich beschriebenen Weg auf die Richtung der Kraft projiciren u. das Produkt aus der Kraft u. die Projection bilden.

Wenn z. B. eine Kraft P mit der Linie AB, auf welcher ihr Angriffspunkt fortschreitet, einen $\angle\alpha$ bildet, so ist die Wirkung nicht $P \cdot AB$, sond. $P \cdot AB \cos\alpha$; denn zerlegt m. die Kraft P in 2 Kräfte, $P\cos\alpha$ u. $P\sin\alpha$, so ist klar, daß letztere, da ihr Angriffsp. nach ihrer Richtung gar nicht fortrückt, keine Wirkung hervorbringen kann u. daß dagegen die erstere eine Wirkung $P\cos\alpha\, AB$ hervorbringt.



Es ist aber $AB \cos\alpha$ die Proj. des Weges AB auf die Richtg der Kraft.

Wenn der Angriffspunkt einer veränderl. Kraft P eine krumme Linie beschreibt u. es wirkt die Kraft nicht nach der Richtg



der Tangente, so ist das Element der Wirkung, welche d. Kraft hervorbringt, während der Weg Mm beschrieben wird gleich

$$P.Mn,$$ wenn Mn die Projection von Mm auf P vorstellt. Setzt man $\angle PMm = \varphi$, den die Richtg der Kraft mit d. Richtg der Tangente an die krumme Linie bildet u. $Mm = ds$, so ist

$$Mn = ds \cos\varphi$$ u.

das Element der Wirkung der Kraft

$$= P ds \cos\varphi$$

u. endlich die Totalwirkung während der Weg $AB = s$ beschrieben wird

$$\int_0^s P ds \cos\varphi$$

Es ist aber auch $P\cos\varphi$ die Kraft, welche nach d. Richtg der Tangente der Curve wirkt, [illegible] P in eine normale u. in eine tangentiale Kraft zerlegt.

Eine Kraft, deren Angriffspunkt nicht nach der Richtung der Kraft fortschreitet, sondern im Gegentheil zurückweicht, ist für diese Bewegung als ein Widerstand zu betrachten. Da eine solche Kraft der Bewegung entgegen wirkt, so wollen wir die entsprechende Wirkung eine Gegenwirkung nennen.

Zur Übung in der Berechnung der Wirkung der Kräfte u. Gegenwirkung der Widerstände mögen vorläufig folgende Aufgaben dienen.

1te Aufgabe.

Um auf einer geradl. horiz. Strecke fortzuziehen, ist nach den Erfahrungen eine Zugkraft nothwendig die $\frac{1}{20}$ des Gewichts des Wagens u. seiner Belastung beträgt. Wenn nun das Gewicht eines Wagens sammt Belastung 4000^k beträgt, wie gross ist die Arbeit um diesen W. durch eine Strecke von 1000^m fortzuschaffen.

Auflösung

Die erforderliche Zugkraft ist $= \frac{4000}{20} =$ $= 200^k$ u. der Weg durch welchen sie wirken muss, ist 1000^m mithin die Arbeit

$$W = 200 \cdot 1000 = 200000^{km}$$

2te Aufgabe.

Ein Körper, dessen Gewicht P ist, soll gehoben werden, so dass sein Schwerpunkt um h höher zu liegen kommt; wie gross ist die dazu erforderliche Wirkung.

Auflösung

Denken wir uns den Körper in kleine Volumentheilchen getheilt u. seien wir durch

$$p_0 \quad p_1 \quad p_2 \ldots \quad p_n$$

die Gewichte der Materie, welche in diesen

Volumentheilchen enthalten P; durch

$$\zeta_0 \; z_0 \; z_1 \; z_2 \ldots \; z_n$$

die Abstände dieser Theilchen u. des Schwerpunkts des Körpers von einer horiz. Ebene u. zwar vor dem Heben; durch

$$\zeta_0' \; z_0' \; z_1' \; z_2' \; z_3' \ldots \; z_n'$$

ebenso die Abstände derselben Punkte von dieser Ebene nach dem Heben begriffen; so ist nach dem Satz vom Schwerpunkt:

$$P\zeta_0 = p_0 z_0 + p_1 z_1 + p_2 z_2 + \cdots$$

$$P\zeta_0' = p_0 z_0' + p_1 z_1' + p_2 z_2' + \cdots$$

hieraus folgt durch Subtraktion u. Berücksichtigung daß $\zeta_0' - \zeta_0 = H$

$$PH = p_0(z_0' - z_0) + p_1(z_1' - z_1) + p_2(z_2' - z_2) \ldots$$

Betrachten wir aber jedes ein Glied, welches rechts des Gleichheitsz. vorkommt, z. B. das erste $p_0(z_0' - z_0)$ so überzeugen wir uns leicht, daß dasselbe die Wirkung ausdrückt, die erforderlich ist, um das Gewicht p_0 auf die Höhe $z_0' - z_0$ zu erheben, wie auch die andern Kräfte beschaffen sein mög., welche das Theilchen p_0

während des Hebens beschrieben hat.

Die Summe der Cylinder aber, d. h. also die Summe der Wirkungen, die zum Heben sämtlicher Gewichte, auch in der Reihe betrifft, auf die Höhe

$$(z_0'-z_0),\ (z_1'-z_1),\ (z_2'-z_2)\dots$$

nothwendig ist, u. da diese Summe

$$= Ph$$

gleich d. Produkt aus dem totalen Gewicht des Körpers in die Höhe der Erhebung des Schwerpunkts gleich ist, so findet m. also die Wirkung, welche zum Heben eines Körpers nothwendig ist, wenn m. das Gewicht des Körpers mit der Höhe multipl., auf welche der Schwerp. gehoben werden soll.

Wenn also keine Reibung vorhanden wäre, so würde zum Heben eines Körp. vermittelst einer schiefen Ebene genau eine ebensogroße Wirkung nöthig sein, wie zum Heben i. freier Luft.

3. Aufgabe.

Ein Körper soll über eine schiefe Ebene hinaufgezogen werden, durch eine mit derselben || wirkende Kraft; man soll mit Berücksichtigung der

Reibung die hierzu erforderliche Wirkung berechnen.

Auflösung

Q sei das Gewicht der Last
P die ‖ mit der schief. Ebene wirkende Kraft,
α der Neigungswinkel der Ebene gegen d. Horiz.
f der Reibungscoeffic.
s der Weg, durch welchen der Kr. gezogen werden muss, damit sein Schwerpunkt um h höher zu liegen kommt.

Dies vorausgesetzt ist $Q \cos\alpha$ die Last des Körp. gegen d. schiefe Eb.;

$Q \cos\alpha\, f$ die Last, welche ‖ mit der schiefen Eb. wirken muss, um die Reibung zu überwinden.

$Q \sin\alpha$ die Last, mit welcher der Körper durch sein Gewicht dem Hinaufziehen entgegenwirkt, demnach:

$$P = Q \sin\alpha + Q \cos\alpha\, f$$

Nun ist aber:

$$Ps = \frac{Ph}{\sin\alpha}$$

die Wirkung, welche nothwendig ist, um den Widerstand P längs des Weg s zu übereinstimmen; wir erhalten daher

$$Ps = Qh + Qhf\cot\alpha = Qh(1+f\cot\alpha)$$

Wenn keine ~~Reib~~ Reibung vorhanden wäre, betrüge die Wirkung Qh.

4te Aufgabe.

Man soll die Wirkung berechnen die nothwendig ist, um einen Stab um eine gewisse Länge auszudehnen.

Auflösung.

Es sei:

l die natürl. Länge des Stabes
o sein Querschnitt
E der Elasticitätscoeffic. des Materials, woraus der Stab besteht.
λ die Länge, um welche der Stab ausgedehnt werden soll.

Die Kraft, welche zum Ausdehnen nöthig ist, wächst in dem Maße, als die Verlängerung zunimmt. Beträgt diese:

$$E\frac{o}{l}\cdot\xi \;;$$

um die Ausdehnung $d\xi$ fortzusetzen, ist daher eine Wirkung $E\frac{o}{l}\xi d\xi$ nothwendig u. daher die ganze Wirkung, welche eine Verlängerung λ hervorbringt

$$\int_0^\lambda E\frac{o}{l}\xi d\xi = E\frac{o}{l}\int_0^\lambda \xi d\xi = E\frac{o}{l}\frac{\lambda^2}{2}.$$

5te Aufgabe.

Man soll die Wirkung bestimmen die erforderlich ist, um das Wasser, welches in jeder Secunde im Mittel auf eine Quadratmeile Erdoberfläche niederfällt, zur Höhe der Wolken zu erheben.

Auflösung.

Nach den meteorologischen Beobachtungen ist die Wassermenge, welche in unserer Gegend in einem Jahre herabfällt aus den Wolken, im Stande, eine Wasserschicht von etwa $0{,}5^m$ Höhe zu bilden. Die mittlere Höhe der Wolken ist $= 1200^m$; eine Quadratmeile hat $(4000)^2 = 16000000^{qm}$. Die Wassermenge, welche also jährlich auf eine Quadratmeile herabfällt, ist demnach $0{,}5 \cdot 16000000 = 8000000^{cbm} =$
$= 8000000000^{Klgr}$; also ist die Wassermenge, welche per Sec. im Mittel auf eine Quadratmeile herabfällt $= \dfrac{8000000000}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 253^{Klgr}$.

Ebenso ist also auch die Wassermenge, welche durch das Verdampfen in jeder Sec. auf 1200^m Höhe gehoben werden muß u. die hiezu erforderliche Wirkung ist $253 \cdot 1200 = 303600^{km}$. Diese

150. 151. Wirkung ist = derjenigen, welche

$$\frac{303600}{75} = 4048$$ Pferde in einer Stunde hervorbringen. Die ganze Erdoberfläche beträgt $9266000^{\square \text{Meil.}}$; wenn man also annehmen, daß durch die Wassermenge, welche in einem Jahr auf die Erdoberfläche herabfällt, diese mit einer Wasserschichte von $0{,}5^m$ Höhe bedeckt werde, so ist die Wirkung, welche im Mittel in jeder Sec. aufzuwenden ist, um die in einer Sec. auf der ganzen Erdoberfl. verdampfte Wassermenge bis zur Höhe der Wolken zu erheben gleich derjenigen, welche

$$9266000 \cdot 4048 = 37589728000$$

Pferde in einer Sec. hervorbringen.

Anmerkung. Auf je $\frac{16000000}{4048} = 3965^{\square m}$ Oberfläche, ist 1 Pferdekraft nöthig.

Bedeutung der lebendigen Kraft einer Masse.

Ist P eine Kraft, die mit unveränd. Intensität durch einen Weg s auf einen Körper wirkt, dessen Gewicht Q u. dessen Masse $m = \frac{Q}{2g}$ ist; v die Geschwind., welche der Masse mitgetheilt wird, nachdem der Weg s zurückgelegt ist, so ist, wenn anfangs die Masse keine Geschwindigk. hat

$$Ps = \frac{Q}{2g} v^2 = mv^2$$

Nun ist aber Ps die Wirk. der Kraft auf den Körp. u. $\frac{Q}{2g} v^2$ od. mv^2 die lebendige Kraft der Masse m; man sieht also daß durch diese letztere die Wirk. gemessen wird, welche erforderlich ist, um einer Masse m eine gewisse Geschwindigkeit mitzutheilen.

Hätte anfängl. die Masse eine gewisse Geschwind. v_0 gehabt u. die Kraft P durch einen Weg s auf sie eingewirkt, so wird die Geschwindigk. v am Ende des Weges s durch folgende Gleichung bestimmt $Ps = m(v^2 - v_0^2) = mv^2 - mv_0^2$.

153. Wenn also eine Masse m durch eine continuirliche u. mit unveränd. Intensität wirkende Kraft K eine Geschwindigkeitsänderung $v - v_0$ mitzutheilen ist, so ist dazu eine Wirkung erforderlich, die durch die Differenz der lebendigen Kraft ausgedrückt wird.

Wenn eine Masse $m = \frac{Q}{2g}$ eine gewisse Geschw. v, also auch eine gewisse lebendige Kraft mv^2 besitzt u. man läßt dieselbe einem constant. Widerstand K entgegenwirken, bis die Geschwind. der Masse ganz verschwindet, so vermag sie diesen Widerstand K durch einen Weg s zu überwinden, der durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$Ks = mv^2$$

Wir haben Ks die Wirkung, welche die Masse hervorbringt u. mv^2 ihre ursprüngliche lebendige Kraft u. man sieht hieraus, daß die Wirkungsfähigkeit, welche in einer Masse enthalten ist, die eine bestimmte lebendige Kraft mv^2 besitzt, durch diese gemessen wird.

Wenn die Masse m auf den Widerstand k wirkt bis ihre Geschwind. v_0 geworden ist, u. wir bezeichnen durch b_0 den Weg, den der Angriffspunkt von k od. den die Masse zurücklegt, während sie die Geschwindigkeitsänderung $v - v_0$ erleidet, so ist

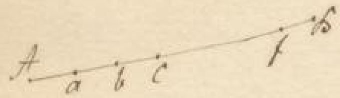
$$k b_0 = m(v^2 - v_0^2) = mv^2 - mv_0^2$$

Die Wirkung $k b_0$, welche also eine Masse m hervorbringt, indem sie eine Geschwindigkeitsänd. $v - v_0$ erleidet, wird also durch die Änderung $m(v^2 - v_0^2)$ ihrer lebendigen Kraft gemessen.

Wenn die Kraft, die auf e. Masse wirkt nicht constant ist, sond. mit veränderl. Intensität wirkt, so ergeben sich ähnliche Resultate.

Es sei z. B. Ab die gerade Linie, nach welcher eine Masse durch eine Kraft fortbewegt wird,

Wenn die Masse in $A, a, b, c \ldots f$ angekommen ist, sei die Intensität der Kraft:



$p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad \ldots \quad p_{n-1}$

u. die die Geschwind. der Masse $v_0 \; v_1 \; v_2 \ldots v_n$;

setzen wir ferner:

$Aa = b_0$, $bc = b_1 \ldots fb = b_n$ u. nehmen wir diese Wege sehr klein an, so werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir in jedem einzelnen Intervall Aa, ab, bc die Intensität d. Kraft als const. ansehen, u. zwar im ersten Intervall Aa gleich p_0, im 2ten $ab = p_1$ …

Unter d. Voraussetz. ist aber die leb. Kraft in jedem einz. Zeitmoment gleich der Wirkung, welche die Kraft in d. früheren Stellen hervorbringt. Wir erhalten daher:

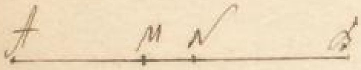
$$p_0 s_0 = m(v_1^2 - v_0^2)$$
$$p_1 s_1 = m(v_2^2 - v_1^2)$$
$$p_2 s_2 = m(v_3^2 - v_2^2)$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$p_{(n-1)} s_{(n-1)} = m(v_n^2 - v_{n-1}^2)$$

u. wenn wir diese Gleichung summieren, so ergibt sich:

$$p_0 s_0 + p_1 s_1 + p_2 s_2 \ldots + p_{n-1} s_{n-1} = \sum_1 ps = m(v_n^2 - v_0^2)$$

Nun ist aber $p_0 s_0 + p_1 s_1 + \ldots = \sum_1 ps$ die Summe aller Elementarwirk. der Kraft, d.h. die totale Wirk., welche sie auf die Masse ausgeübt hat, u. $m(v^2 - v_0^2)$ ist d. Änderung der leb. Kraft, die dadurch entstanden ist; woraus also hervorgeht, daß durch diese letzte Größe d. Wirk. bestimmt wird, die erford. ist, um durch eine constante od. veränderl. Kraft in einer Masse eine bestimmte Geschwindigkeitsänderung hervorzubringen.

Jene Summe $\sum_1 ps$ wird um so genauer die Wirk. d. Kraft darstellen, je kleiner d. Interv. $s_0, s_1 \ldots$ genommen werden, u. wenn diese ∞ kl. genommen werden, Ci welchen Fall die Summe $\Sigma . p\delta$ sich in ein Integral verwandelt, so erhält m. den vollst. genauen Werth der Arb. d. Kraft.



Setzt m. $AM = s$, $MN = ds$ u. bezeichnet durch p die Intensität der Kraft M, so ist pds das Element der Arb., w. sie im Intervall MN hervorbringt; u. wenn m. $AB = R$ setzt, so ist:

$$\int_0^R p\,ds$$

die totale Arb., w. d. Kraft hervorbringt, während sie v. A bis B auf d. Masse m wirkt, u. wenn m. durch v_0 die anfgl. u. v. die Endgeschw. bez., erhält man:

$$\int_0^R p\,ds = m(v^2 - v_0^2)$$

Wenden wir uns nun zu dem allgem. Falle, wenn auf irgend ein Massensystem Kräfte wirken od. Widerstände, um die Arb. zu bestimmen, d. nöth. sind, um ein solches Massensystem v. einem Bewegungszustand in einen andern zu versetzen.

Es seien:

$$P \quad P_1 \quad P_2 \quad \ldots$$

wachsende Kräfte, die in irg. e. Augenbl. der Bewegung auf d. Massensystem einwirken.

$$R \quad R_1 \quad R_2 \quad \ldots$$

verschied. Widerstände in gleichen Zeitaugenblick thätig.

$$ds \quad ds_1 \quad ds_2$$

die Projec. der unendl. kl. Wege, um die Angriffsp. der Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ in einem auf die Zeit t folgenden Zeitmoment zurücklegen.

$$dr \quad dr_1 \quad dr_2 \ldots$$

die zurückgelegten Proj. der unendl. kl. Wege, um die Angriffsp. der Widerstde $R, R_1, R_2 \ldots$ in d. gleichen Zeitmom. zurücklegen.

$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \ldots$ } die Geschw. einzelner Massentheilchen $m_0 \; m_1 \; m_2 \ldots$
$v_0 \quad v_1 \quad v_2 \ldots$ }
in zwei bestimmten Zeitmoment verschied. Beweg.

Dies vorausgesetzt ist:

$m_0 u_0^2 + m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + \ldots = \sum mu^2$ die totale lebend. Kraft des Massensystems im 1ten, u.

$m_0 v_0^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \ldots = \sum mv^2$

die totale leb. Kraft im 2ten Zeitmoment;

endlich:

$m_0(v_0^2 - u_0^2) + m_1(v_1^2 - u_1^2) + \ldots = \sum m(v^2 - u^2)$

die Änderung der leb. Kraft des ganzen Massensyst. während dieser 2 Zeiten.

Nach d. Grundsatz der Erhaltung der leb. Kraft ist aber die totale Änderung der leb. Kraft eines Massensystems gleich der Summe der Wirk. sämtlicher Kräfte weniger der

Summe der Wirk. sämtlicher Widerstände.

Die erstere dieser Summe ist:

$$\int K_0 dp_0 + \int K_1 dp_1 + \int K_2 dp_2 + \dots = \sum_1 \int K dp$$

die letztere dieser Summen ist:

$$\int k_0 dr_0 + \int k_1 dr_1 + \int k_2 dr_2 + \dots = \sum_1 \int k dr$$

Wir erhalten demnach:

$$\sum_1 m(v^2 - u^2) = \sum_1 \int K dp - \sum_1 \int k dr$$

Aus allem diesem geht nun die Bedeutung der leb. Kräfte hervor; sie drückt nämlich einerseits die Größe der Wirkung aus, u. nöth. war, um ein Massensystem in denjenigen Bewegungszustand zu versetzen, in welchem es sich befindet; andererseits wird durch die lebend. Kraft eines Massensyst. die Größe der Wirkung ausgedrückt, welche dasselbe hervorzubringen vermag, wenn es Widerstände überwindet, bis sein Geschwindigkeitszustand ganz vernichtet wird.

Die Masse kann also Wirk. in sich aufnehmen u. aufgenommene Wirk. als sie aufgenommen hat, wieder abgeben.

Hierdurch ist also die rein geistige Natur der Masse ausgesprochen; indem bedingungs=

159. [illegible] wird, daß die Masse kein Stück aus sich selbst während der Bewegung schaffen kann.

Man nehme ein Molekularsyst., das in Bezug ist gar keine Kräfte u. Widerstände einwirken, od. solche die sich in jedem Augenblick das Gleichgewicht halten, so kann sich die in der Masse enthaltene Wirkungsfähigkeit d.h. ihre leb. Kraft nicht ändern, d.h. es ist in diesem Bewegungszustande

$$\sum m(v^2-u^2)=0$$

In diesem Zustande können zwar d. Geschwind. einzelner Molekulartheilchen sehr veränderlich sein, es ist aber nicht möglich, daß die Geschw. aller Molekule gleichzeitig größer od. kleiner ausfallen würden, als sie in irgend einem Augenblicke sind. Wenn das Molekularsyst. blos aus rotirenden Bestandtheilen besteht, u. blos vermöge der Trägheit seine Bewegung fortsetzt, ohne Änderung der leb. Kraft, so ändert sich die Geschwindigkeit gar nicht.

Die Bewegung jedes Atoms erfolgt also mit gleichförm. Geschw. Man dagegen in den festen Massen verkennen, die abwechselnd sich [illegible] zusammengeschoben werden müssten, kann keine gleichförm. Bewegung statt finden.

Auf diese Bewegung eines Wagens, wenn keine Kräfte u. Widerstände auf ihn einwirken, od. solche, die sich das Gleichgew. halten, drückt das eigenthümliche Verhalten der Materie aus, das mit dem Worte „Trägheit" bezeichnet wird. Die nachfolgenden Aufgaben dienen zur Erläuterung des Besprochenen.

1.te Aufgabe.

Man soll die Wirkung berechnen, um einen Wagen, der mit Belastung 2000 K wiegt, in eine Geschwindigk. v. 2 m Sekunde in diesen Bewegungszustand zu versetzen.

Auflösung

Um einen Wagen auf horizontaler Straße mit einer gewissen Geschwind. fortzu=bewegen, sind vom Anfang der Bewegung an zweierlei Arten v. Kräften nothwendig. Es muss nämlich die Reibung überwunden werden, die an den Achsen der Räder sich äußert, so wie auch ein gewisser Widerstand, den die Straße durch das Eindringen der Räder verursacht. Ist die Zugkraft gerade hinreichend, um diese beiden Widerstände zu überwinden, so ist sie zwar hinreichend den Wagen in gleichförmiger Bewegung zu erhalten, wenn überhaupt einmal Be-wegung vorhanden ist; um aber die Beweg einzuleiten, und d. aufgeh. Wirk. Kraft größer sein als gerade zur Überwindung jener Widerstände nöthig ist.

Die Wirk., welche erforderl. ist, um der Masse $\frac{2000}{2g}$ die Geschwindigkeit von 2^m zu ertheilen, ist nach dem Vorhergehenden gleich der leb. Kraft, also $= \frac{2000}{2g} \cdot 2^2 = \frac{2000}{2 \cdot 9{,}81} \cdot 4 =$ $= 408^{km}$. Diese Wirkung ist also ebenso groß als jene, welche die Hebung einer Last von 408^k auf 1^m erfordert.

2te Aufgabe.

Wie groß ist die Wirk., um einer Kanonenkugel von 10^k Gewicht eine Geschwind. von 200^m zu ertheilen?

Lösung.

Die leb. Kraft einer solchen Kugel ist: $\frac{10}{2g} \cdot 200^2 = 20387^{km}$ u. ebenso groß ist auch die gesuchte Wirkung.

3te Aufgabe.

Wie groß ist die Wirk., welche in der Masse eines Schwungringes eines Schwungrades enthalten ist, wenn das Gewicht des Ringes 5000^k u. seine Geschw. 6^m beträgt?

Auflösung

Die in der Masse $\frac{5000}{g}$ enthaltene leb. Kraft od. Wirkungsfähigkeit beträgt

$\frac{5000}{g}\,6^2 = 9174^{km}$. Diese Zahl durch die Arbeit 75 dividirt, gibt 122 Pferdekraft, d. h. die Wirkungsfähigkeit, welche in diesem Schwungring enthalten ist, ist ebensogroß als jene, welche 122 Pferde (à 75^{km}) in einer Sec. oder ein Pferd in 122 Sec. hervorzubringen vermag.

Wenn man a. d. Axe des Schwungrades ein Seil befestigt u. [illegible] an dieses eine Last von 3000^{k} angehängt würde, so bietet sich die Frage dar, bis auf welche Höhe das Schwungrad diese Last gehoben im Stande wäre.

Bezeichnen wir durch h diese Höhe, so ist 3000h die zum Heben erforderliche Arbeit u. diese muss der leb. Kraft des Schwungrades gleich sein.

Man hat daher:

$3000\,h = 9174$, woraus folgt $h = 3{,}058^{m}$.

4te Aufgabe.

Wenn bei einer Rammmaschine ein Rammklotz von 250^{k} Gewicht von einer Höhe von 4^{m} auf einen bereits in der

162. 163. Erde befindl. Pfahl herabfällt, u. dieser durch den Schlag um $0,03^{m}$ tiefer in das Erdreich eindringt, wie groß ist die Last, welche dieser Pfahl zu tragen vermag, ohne durch dieselbe tiefer einzusinken.

Auflösung.

Unter der Voraussetzung, daß die totale lebendige Kraft 250^{k}, welche im Rammklotz in dem Momente enthalten ist, wo derselbe mit dem Pfahl zusammentrifft, ganz auf das Eintreiben des Pfahles wirkt, u. weder durch den Stoß, noch durch das Zusammendrücken des Pfahles Wirk. verloren gingen, würde die Gleichung

$$250.4 = 1000$$ den auf vorläufig aufzuwendenden Widerstand R, welchen das Erdreich dem Eindringen des Pfahles entgegensetzt, durch einen Weg $4.0,03^{m}$ zu überwinden haben; es ist demnach zu setzen:

$$1000 = 0,03\,R, \quad R = 3333^{k}$$

Dieser Werth ist aber auch die Tragkraft des Pfahles, denn diese ist gleich dem Widst., den das Erdreich dem Eindringen des Pfahles entgegensetzt.

5te Aufgabe.

Wenn mit einer Feuerspritze in jeder Sec. 10^K auf 20^m Höhe getrieben werden sollen, wie groß ist die Wirkung, welche hierzu in jeder Sec. nothwendig ist.

Auflösung.

Damit das Wasser eine Höhe von 20^m erreicht, muß es (abgesehen vom Luftwiderstand) die Mündung des Gußrohres wenigstens mit einer Geschwindigk. $\sqrt{2.9,81.20}$ verlassen. Um diese das Gewicht zu leisten, muß in jeder Sec. einer Wassermenge von 10^K eine Geschwind. von $\sqrt{2.9,81.20}^{\,m}$ ertheilt werden.

Die entsprechende Wirk. ist daher:

$$\frac{10}{2.9,81}\left(\sqrt{2.9,81.20}\right)^2 = 10.30 = 300^{Km}$$

Diese Wirkung ist aber gleich jener, welche $\frac{300}{75} = 4$ Pferde in 1 Sec. hervorbringen.

6te Aufgabe.

Die Wassermenge, welche ein Fluß oder Bach in jeder Sec. liefert, betragen 1000^K u. die Geschwin. des Wassers im Fluß sei $= 3^m$, wie groß ist die Wirkung, welche in dieser Wassermasse enthalten ist.

Auflösung.

Die leb. Kraft dieser Wassermenge ist $\frac{1000}{2g} \cdot v^2 = 458,7^m$ u. ebenso groß ist auch die in dieser Masse enthaltene Wirkungsfähigkeit, welche an einem bestimmten Ort des Flusses in jeder Sec. nutzbringend gemacht werden kann.

Allgemeine Eigenschaften der Motoren.

Die Kräfte kommen in der Natur nicht isolirt vor, sond. jederzeit in innigem Verb. mit mater. Stoffen. Diese mat. Stoffe sind zu gewissen Kraftäußerungen, die durch die ihnen innewohnende Kräfte sich selbst u. andere Körper zu bewegen vermögen. Diej. Körper, welche diese Eigenschaft in einem hoh. Grade besitzen, werden vorzugsw. Motoren genannt.

Jeder Motor besteht also aus einem passiven Princip der Masse u. aus einem aktiven der Kraft. Ein Motor verhält sich zu einem lebl. Körper

Masse, wie ein selbstleuchtender Körper zu einem dunkeln. Ein dunkler Körper, d. h. der von einer Lichtquelle beleuchtet worden ist, ist mit einer trägen Masse zu vergl., die durch eine andere in Bewegung gesetzt worden ist, u. dadurch die Fähigk. erlangt hat, auf andere trägen Massen, bewegend einzuwirken. Wollte m. die Worte „todt" u. „lebendig" brauchen, in dem Sinn, daß alles, was nicht fähig ist eine Thätigkeit zu entwickeln, „todt" u., was im Stande ist, eine Wirk. hervorzubringen, „lebendig" genannt würde, so wäre eine ruhige träge Masse ein todter u. ein Motor od. eine in Bewegung befindl. Masse ein lebendiger Körper zu nennen.

Es gibt im allgemeinen 3 erlei Motoren:

1. Körper, die bereits durch eine Ursache in Bewegung gesetzt worden sind. Zu diesen gehören insbesondere die Wasser in den Flüssen u. Bächen, u. die bewegte Luft, der Wind.

2. Körper, die sich unter Umständen befinden, daß sie durch äußere Kräfte in Bewegung gesetzt u. dadurch auf

167. andern Körper (als Motoren) bewegend einwirken können. Dahin das Wasser, welches als Regen (durch die Schwere) zur Erde fällt, in Bächen u. Flüssen (durch die Schwere) sich sammelt, u. von den höher gelegenen Punkten nach der Niederung zufließt.

2.) Körper, welche durch eine derselben innewohnende Kraft. (Wärme, Molekularkraft, organische od. Lebenskraft-) befähigt sind, auf ihre eigene Masse u. auf die von äußern Körpern bewegend einzuwirken. Dahin die thierische Kraft u. der Wasserdampf.

Damit ein Körper für unsere Zwecke als Motor dienen kann, muß er aber durch die, ohne äußere Mithülfe fortdauernde wirksame Thätigkeit der Naturkräfte, dazu gemacht werden. Denn wenn wir einen Körper zu einem Motor künstlich machen wollten, würden wir eine Kraftverbrauch anwenden, die gerade so groß wäre, als jene welche dieser Körper im günstigsten Falle, wieder abzugeben im Stande wäre.

Für unsere Zwecke ist aber

sehr vortheilhaft, einen künstlichen Motor zu machen. Um z. B. eine Uhr in Bewegung zu erhalten, können wir mit der Hand eine Spiralfeder zusammenwinden, wozu eine gewisse Wirkung nothwendig ist, die die Feder in sich aufnimmt, u. dann bei der Rückkehr in ihre natürliche Gestalt auf das Räderwerk einwirkt, um die verschied. Reibungen zu überwinden. 16. 169.
Oder wir können einen Körper auf eine gewisse Höhe heben, wodurch derselbe dann im Stande ist, bei seiner Niederbewegung bis an den Ort, in welchem er sich vor dem Heben befand, wiederum eine Wirk. zu entwickeln, die jener gleichkommt, die zum Heben nothwendig war.

Allein wir machen diese künstlichen Motoren nicht in der Absicht, an Kraft zu gewinnen, sond. nur um für eine gewisse Wirkung, einen Motor zu erhalten, der gerade nur eine ebenso große Wirkung wiederum abzugeben vermag, als jene ist, welche zu seiner Bildung nothwendig war, die jedoch nur zu gewissen Verwendungen zweckmäßig ist. Stellten wir z. B. bei einer

Ließe man keine treibende Feder oder kein aufgezogenes Gewicht anwenden, so müßten wir bei jeder Schwingung des Pendels u. der Unruhe mit einer schwachen Kraft in das Getriebe einwirken, was einmal nicht leicht mit der gehörigen Genauigkeit geschehen könnte, andererseits sehr unbequem wäre.

Diese künstlichen Motoren, sind Kraftmagazine, die für viele Zwecke sehr nützlich sind. Wo es sich aber darum handelt größere Wirkungen ununterbrochen hervorzubringen, sind sie nicht anwendbar, sond. man muß in diesem Falle, die natürl. Motoren, Wasser, Dampf, Pferde, etc., anwenden. Die künstlichen Motoren unterscheiden sich von den natürlichen dadurch, daß jene durch eine uns zu Gebote stehende Naturkraft, diese durch eine freie Thätigkeit der Naturkraft, ohne unsere Mithilfe gebildet worden sind.

In jedem Motor ist nur eine gewisse Wirkungsfähigkeit enthalten, u. wenn der motorische Körper diese Wirkungsfähigkeit ganz abgegeben hat, erlisch., indem er bereits

Masse in Bewegung setzte und gewisse Widerst. überwältigte, tritt er wieder in die Reihe der todten und trägen ~~Körper~~ e.

Die thier. Motoren machen zwar in dieser Beziehg. eine Ausnahme, weil durch den Lebensprocess immer wieder Wirkungsfähigkeit hervorgerufen wird, allein gerade dadurch, dass der thier. Organismus, wenn er nach außen Wirkg. hervorbringt, sich erschöpft u. dass nun unaufhörl. die abgegeb. Wirkg. durch den Lebensprocess ersetzt werden müssen, zeigt sich eine große Analogie zwischen den thier. Motoren u. den unorganischen.

Es ist also ein allgem. richtig, dass in jeder Quantität eines jeden Motors nur eine bestimmte Wirkungsfähigkeit enthalten ist. Eine bestimmte Quantität Wasser, die eine gewisse Geschwind. besitzt oder auf einer gewissen Höhe sich befindet; eine gewisse Quant. Dampf, der eine bestimmte Spannung besitzt; eine gewisse Quantität in Bewegung befindlicher Luft; ein Mensch; ein Pferd, eine zusammengepresste Feder etc. vermögen alle nur eine gewisse Wirkung hervorzubringen.

Wenn ein Motor z. gewisse Wirk. entwickelt muss u. die totale Wirk., welche derselbe hervorbringt, wohl unterscheiden von jener, welche er auf äussere Dinge überträgt. Es ist nämlich die totale Wirkg. gleich derj., welche der Motor entwickeln müsste, um seine Eigene, seinen Bewegungs- od. sonstigen Zustand zu verändern mehr derj., welche er nach aussen überträgt. Die erstere dieser Wirkungen u. die innere, die andere die äussere Wirkg nennen.

Wenn z. B. ein Zentner Wasser auf 1 m Höhe sich befindet, so ist in demselben eine totale Wirkung von $1000 . 1 = 1000^{km}$ enthalten; wirkt nun dieses Wasser auf ein unterschlächtiges Wasserrad u. fliesst von demselben mit einer Geschw. von 2^m weg, so ist jene totale Wirkgsfähigkeit nicht vollständ. dem Wasserrad mitgetheilt worden, da in dem mit einer Geschw. wegfliessenden Wasser noch eine Wirkfähigkeit enthalten ist, welche nothw. war um dem Wasser die Geschw. zu ertheilen, welche es beim Ablaufen noch besitzt. Die an das Wasserrad abgegeb. Wirk. ist die äussere, die in dem Wasser auch zurückbleibende, die innere Wirkung.

Noch klarer zeigt sich dies bei thier. Motoren z.B. die totale Arb., welche d. thier. Organism. eines Pferdes entwickelt, wenn es einen Wagen zieht, wird z. Theil zur Erzeug. d. Züge des Pferdes verwendet (innere Arb.), zum Theil zum Fortziehen des Wagens (äußere Arb.).

Nur in dem einen Falle, wo die eine Wirkung ganz verschwindend klein ist, (was bei thier. Motoren nie der Fall sein kann), ist die äußere Arb. gleich der totalen. Wenn z.B. Wasser auf ein Turbine wirkt, u. dieselbe ohne alle Geschw. verläßt, also als totale Kraft Masse am Anfange des Rades erscheint, ist die ganze in dem Wasser wohnende gewesene Arb. an d. Rad abgegeben worden.

Wenn ein Motor auf ein Receptor wirkt, muß sowohl der Druck der auf diesen ausgeübt wird, wie auch die Wirkung, die dadurch mitgetheilt wird, von der Geschwind. des Recept. abhängen, u. der Druck des Motors auf den Receptor ist eine Funkt. der Geschwd. Dieser Druck ist am größten, wenn die Geschwind. = 0, nimmt allmählig ab, wenn die Geschwind. wächst, u. verschwind. zuletzt ganz. Wenn z.B. ein Arbeiter ein Winde vermittelst einer Kurbel bewegt, vermag er bei gleicher Anstrengung den größten Druck auf d. Kurbelgriff auszuüben, wenn dieser ohne Bewegung ist. So wie die Bewegung des Kurbelgriffs schneller geht, nimmt der Druck den der Arbeiter auszuüben vermag, immer mehr ab, indem die innere Wirkung, oder Kraftaufwand, um die Glieder des Körpers immer schneller u. schneller zu bewegen, beständig wächst, während die absolute Leistungsfähigkeit des Arbeiters wenigstens nicht über eine gewisse Grenze sich steigern kann.

Bei einer gewissen Geschwind. des Kurbelgriffes vermag die Hand gar nicht mehr der Bewegung zu folgen, u. der Druck hört ganz auf.

Ein anderes Beispiel zur Erläuterung obigen Satzes bietet ein unterschlächtiges Wasserrad dar. Wenn die Schaufeln des Rades ruhen, ist der Druck, den das an diese anschlagende Wasser ausübt am größten, er nimmt allmählig ab, so wie die Schaufeln schneller gehen, u. verschwind. ganz, wenn einmal die Schaufeln so schnell gehen, als das Wasser fließt.

Bei einer Dampfmaschine nimmt der Druck des Dampfes aus 2 Gründen ab, je mehr die Geschw. des Kolbens wächst; einmal, weil bei einem schnellern Gang der Maschine mehr Dampf auf den Kolben wirkt, was zur Folge hat, daß die Spannung im Kessel abnehmen muß; u. dann muß bei einem schnellern Gange der Maschine, der Dampf mit größerer Geschw. durch die Zuleitungskanäle strömen.

Bei Motoren, die eine gewisse träge Masse haben, wie bei Menschen u. thier. Kräften, ist die Ursache der Abnahme des Druckes, der auf den Receptor ausgeübt wird, wenn dessen Geschwind. zunimmt, in dem Umstande begründet, daß jeder Motor nur eine gewisse totale Wirkungsfähigkeit besitzt, die unter. zum Theil od. ganz zur Bewegung der Masse des Motors verwendet. ist, daß daher die Wirkung nach außen u. der Druck auf den Receptor vermindert von jeder Geschw. abhängen müssen.

Die Kräfte an u. für sich sind ein Funkt. der Geschwind., sond. auch die Vorrichtungen, welche Massen auf Massen ausüben, wenn sie mit an-

gleichen Geschwind. zusammentreffen; sie
wenn m. i Stande wäre die Bewegungen
der Körperwelt bis zu der Bewegung
der Atome zu verfolgen, würde m. nie i
den Fall kommen, Kräfte von Geschwindigk.
abhängig anzunehmen; denn i letzter
Hinsicht würden alle Bewegungen, durch
attractive od. repulsive Molekularkräfte,
die nur v. der Entfernung der Molek., nicht
aber v. ihrer Geschw. abhängen, hervorge-
bracht.

Wenn z. B. 2 Körp. zusammenstossen, so ist die
wechselseitige Pressung an der scheinbaren
Berührungsstelle nicht anders, als die Ab-
stossung der Theilchen an der Berührungsstelle
des einen Körpers gegen die Theilchen des
andern Körpers. Je grösser nun die Differenz
der Geschwind., mit welcher sich d. beiden Körper
begegnen, desto mehr nähern sich die
Molecule an den scheinbaren Berührungsstellen,
u. desto stärker stossen sie sich ab.

Die Wirk. eines Molec. auf sich
selbst u. auf and. äussere Körper, kann
nur dann vollständig entwickelt u.
erklärt werden, wenn es überhaupt

möglich wäre, die Bewegung eines Körpers od. mehrerer auf einander einwirkender Körper, bis auf die Bewegung ihrer kleinsten zu verfolgen, fällt also mit dem allgem. physikalischen mathemat. Problem zusammen, dessen Lösung alle Erscheinungen der unorganischen (u. vielleicht der organischen?) Natur umfassen würde.

Die angeführten allgemeinen Eigenschaften der Materie genügen aber hinreichend, um sich von der Wirk. derselb. auf Maschinen einen klaren Bild machen zu können, u. einige für die Theorie der Maschinen sehr wichtige Sätze aufstellen u. begründen zu können.

Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften der Materie.

1.) Die Kräfte kommen in der Natur nicht isolirt vor; sind jederzeit in Verbindung mit Körpern od. Substanzen.

2.) Körper od. Substanzen, welche in Bewegung sind, Wirk. hervorzubringen, (welche Widerstände durch gewisse Wege zu überwinden) nennt man Motoren oder Erreger.

176. 177. Ein Meteor besteht, wie schon früher bemerkt, aus einem positiven Princ. der Masse u. einem activen der Luft.

3.) Es gibt dreierlei Arten von Meteoren.

a. Körper od. Substanzen, welche sich im Zustand der Bewegung befinden. (Irdische Meteore).

b.) Körper, welche sich außer Umständen befinden, daß sie durch gewisse äußere Kräfte in Bewegung gesetzt, u. dadurch bewegend auf andere einwirken können.

c. Körper, welche durch eine denselben innewohnende Kraft (Wärme, Molecularkräfte, vegetative od. Lebenskraft) befähigt sind, auch ihre eigene Masse u. auch die von äußeren Körp. bewegend einzuwirken.

4. Es gibt natürliche u. künstliche Meteore; die natürl. sind diej., welche durch die ohne unsere Mithilfe fortwährend wirksame Thätigk. der Naturkräfte entstehen. Unter den künstl. dagegen verstehen wir diej., welche wir mit Anwendung ~ eigend eines natürl. Meteors hervorbringen können.

5.) die Wahl, welche ein künstl. Motor zu entsch. vermag, ist ebenso gestaltet [illegible], als der natürl. hergeben müßte, um denselben hervorzubringen.

6.) die künstl. Motoren werden nicht in der Absicht gemacht, um Kraft zu gewinnen, sond. nur um einen Motor zu erhalten, dessen Wirkungsart für irgend einen Zweck passender ist, als ein natürlicher.

7.) Jeder bestimmte motorische Körper od. jede bestimmte motor. Anlage enthält eine gewisse Wirkungsfähigkeit in sich (absolute Wirkfähigk.).

8.) Wenn ein Motor thätig ist, betrifft die totale Wirkung, welche derselbe entwickelt, auch den Anteil, welche er auf äußere Körper hervorbringt (äußere W.) u. welche er auf sich selbst u. seine Masse ausübt, (innere W.).

9.) Der Druck eines Motors auf einen Träger ist im Allgem. eine Funkt. der Geschwind. des Letzteren.

Allgemeine Eigensch. des geometr. Zusammenhanges der Maschinenbestandtheile.

Da durch die Maschine zwischen dem Motor u. den zu verarbeit. Körper jederzeit eine ganz bestimmte Verbindung hergestellt werden muß, damit die Werkzeuge, welche auf den zu verarbeitenden Körp. einwirken, gerade nur diej. Arten von Bewegungen ausführen können, w. der Natur der zu verrichtenden mechanischen Operation angemessen sind, so müssen alle Maschinenbestandtheile einen Zusammenhang haben, der von Wirkungsweise des Motors u. von der Gegenwirkung der Widerstände, welche der zu verarbeit. Körp. verursacht, ganz unabhängig sind. Oder mit andern Worten: der geometr. Zusammenhang der Maschinenbestandtheile muß von der Art sein, daß die Gestalt der Bahnen, welche die einzelnen Punkte der Maschine beschreiben, blos allein durch den Zusammenhang bedingt werden, u. von der Wirkung des Motors u. den

Widerständen ganz unabhängig sind.
Da selbst die Verhältnisse der Geschwind. mit wel. sich d. einz. Pkte. in ihren Bahnen beweg., müssten einzig u. allein durch den gewaltl. Zusammenhang bedingt werden, so daß man z. B. u u. v die Geschw. begreifen, mit wel. sich zwei Pkte. in d. gleichen Augenbl. bewegen u. die Maschine doch nur immer für eine Versuche benutzt wird, $\frac{u}{v}$ nur allein v. den Abmessungen der Maschinenbestandtheile u. von den Stellungen der festen Punkte abhängen.

Wenn man z. B. eine Wassermühle betrachtet, die vermittelst Wasserräder getrieben wird, so sehen wir, daß bei derselben umdrehende Bewegung verlangt u. das Verhältniss der gleichz. Geschw. zweier beliebt. Punkte ist eine absolute Constante ob nun die Mühle schnell od. langsam gehen, das Räderwerk nun durch das Wasser od. eine andere Kraft bewegt werden. Die Bahnen, in die einz. Pkte. des beweglichen Bestandtheils beschreib., sind durchweg Kreise.

Betrachten wir hingegen eine Kugel, die durch eine gewöhnliche Dampfmaschine bewegt wird, so zeigt es sich daß die Linien, welche die verschied. Pkte beschreiben, theils Kreise theils gerade Linien sind, theils sehr zusammengesetzte krumme Linien. Aber ihre Gestalt bleibt dieselbe die Maschine mag schnell od. langsam gehen, sie mag durch Dampf bewegt werden, od. durch irgend eine Kraft, welche auf irgendeinen Pkt der Maschine einwirkt.

Das Verhältniß der gleichzeitigen Geschwind. zweier Pkte dieser Maschine, ist aber nicht constant, sond. ändert sich mit der Stellung der Maschine, ist aber ebenfalls wie bei der Mühle von den Kräften u. Widerständen total unabhängig.

Da bei der Veränderung, die eine Maschine auf einen Körper hervorbringen soll, die Arbeitsth. immer eine gewisse Reihe von Bewegungen durchzumachen haben, um die Umwandlung des Rohstoffes zu bewerkstelligen, dann wiederum in ihre anfängliche Position zurückkehren, u. denselben Kreislauf von neuem beginnen;

so sind im Allgem. die besseren, welche die einz. Theile einer Masch. beschreiben geschlossene Linien.

Messen wir die Wege, die die einz. Punkte in ihren Bahnen zurücklegen, von den Punkten an, in welchen sie sich befinden, wenn der Zeiger in einer gewissen Position sich befindet u. auch den Weg, den der letztere beschreibt, von diesem Orte an, u. nennen wir durch σ den Weg, den irgend ein Theil zurücklegt, wenn der Zeiger um s weiter gegangen ist, bezeichnen, so wie durch a, b, c, d .. die constanten Abmessungen der Maschinenbestandtheile, so ist im Allgemeinen:

$$\sigma = f(s, a, b, c \ldots)$$

Kommen in der Maschine allein rotirende Bewegungen vor, so ist das Verh. $\frac{\sigma}{s}$ constant. Für solche Maschinen ist daher

$$\sigma = s\, f(a, b, c..)$$

Im Allgem. ist aber

$f(s, a, b, c \ldots)$ eine periodisch wiederkehrende Function.

Beharrungszustand der Maschinen.

Aus der so eben erklärten allgemeinen Eigensch. der Motoren folgt, daß die Geschwind. einer Maschine, die durch irg. e. Motor bewegt wird, nie eine ∞ große Geschwindigk. annehmen kann; selbst dann nicht, wenn m. alle Hindernisse der Bewegung, Reibung etc. ganz beseitigen könnte; denn wenn einmal die Geschwindigk. der Maschine u. mithin auch die des Angriffspunktes ihre größte Grenze erreicht hat, verschwindet der Druck auf denselben ganz u. gar, u. es kann daher von dies. Augenbl. an keine weitere Zunahme der Geschwind. eintreten. Zu diesen Resultate gelangt m. auch vermittelst der allgem. Gleich. der leb. Kräfte.

Nehmen wir an, daß auf die Maschine nur eine einzige Kraft P wirke (der Druck des Motors auf d. Ang.), welche aber eine Funkt. der Geschw. ihres Angriffspunktes ist, die mit der Zunahme der Geschwind.

allmählig erlahmt u. zuletzt ganz
0 würde, wenn die Masch. aufhört zu wir-
ken; so haben wir, um die Gleich.
der Bewegung aufzustellen, nur die Wirk.
der Kraft P also $\int Pds$, der leb.
Kraft sämmtlicher Massen: Smv^2 gleich
zu setzen:

$$\int Pds = Smv^2.$$

Da nun auch die Maschin. gewissen
Widerstand übers., so muß anfangs
die Geschw. von 0 angefangen, fort-
wachsen, so wie aber mit der Zeit also
auch mit dem Weg, den d. Angriffspunkt v. P zurücklegt
die Geschw. zunimmt, wird P immer
kleiner u. kleiner.

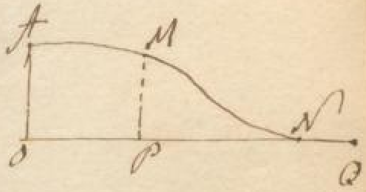
Es sei a der Weg, den der Angriffspunkt
v. P zurückgelegt hat, bis zu dem Augenblick,
in welchem P verschwindet, so ist:
$\int_0^a Pds$ die Wirk. welche dem Zeug. bis
dahin mitgetheilt worden ist, u. wenn wir
durch c die Geschw. nach einer Wirksamkeit
in dies. Augenblick bezeichnen, so ist Smc^2
die leb. Kraft, welche jene Wirk. hervorgebracht
hat; wir erhalten daher:

$$\int_0^a Pds = Smc^2.$$

182. 185. Da aber nun bei der Fortsetzung der Bewegung
P fortw. fort $= 0$ bleibt, so wird, wenn b ein
belieb. Weg bezeichnet, der größer als a
ist $\int^b P ds$ immer $= \int^a P ds$ bleiben.
Es kann also die leb. Kraft des Massensystems
nie größer als $\sum mc^2$ werden.

Wir können uns den Werth von $\int P ds$
auch durch geometr. Betrachtg. anschaulich
machen; wenn wir die Wege, welche der
Angriffspkt. ist P zurücklegt, als Abscissen
auftragen u. die entsprechend. Werthe von
P als Ordinaten, so wird das Gesetz
nach wel. sich P mit s ändert, durch eine Curve
AMN ausgedrückt, die bei N (wenn $ON = a$)
mit der Abscissenlinie zusammenfällt u. sich nicht
mehr von derselben entfernt. Setzen
wir $OP = s$, $ON = a$, $OQ\ (>a) = b$; so ist
$\int_0^s P ds$ gleich dem Flächeninhalt der Figur
$OAMP$; $\int_0^a P ds$ gleich d. Flächeninhalt der
Fig. $OAMNPO$; $\int_0^b P ds$ gleich dem
Flächeninh. $AMNQO$. Da aber von N
bis Q keine Fläche mehr vorhanden ist,
so ist, überhaupt wenn $b > a$

$$\int_0^b P ds = \int_0^a P ds$$



Nachdem wir nun bewiesen haben, daß
selbst dann keine ∞ große Geschwindigkeit
in der Maschine eintreten kann, wenn
gar keine Widerstände vorhanden sind,
so ist dies um so viel mehr der Fall, wenn
solche da sind.

Der Hauptsatz, daß d. Geschwind. nie
über eine gewisse Grenze hinaus
kommen kann, liegt aber auch in den
Nebenumständen der Bewegung, sond.
ist in der Wirkungsart der Motoren begründet.

Wenn der Druck eines Motors auf einen
Zeitraum unveränd. wäre, so würde
doch ∞ große Geschw. mit der Zeit in der
Maschine eintreten können, wenn auch
ihrer Bewegung gewisse Hindernisse
entgegenwirken; wenn aber die Geschw.
einer Maschine nicht über eine gewisse
Grenze hinaus kann, so muß der Bewegungs-
zustand innerhalb gewisser Grenzen
verbleiben u. es ist nun die Frage,
von welcher Art dieser Zustand sein
wird. Wenn die Kraft u. die Wider-
stände, welche auf die Maschine ein-
wirken, kein bestimmtes Gesetz befolgen,
sond. unregelmäßig bald stärker
bald schwächer wirken, zu Zeiten

gegen gar nicht wirken, dann kann unregelmäßiger Zustand der Bewegung eintreten.

Wenn dagegen die Kraft u. die Widerstände regelmäßig wirken, so muß, nachdem einmal die Bewegung eine Zeit gedauert hat, entw. ein unveränd. od ein gesetzmäßig veränderlicher, periodischer, wiederkehrender Bewegungszustand eintreten. Dieser Bewegungszustand, in welchem die Maschine zuletzt geräth, nennen wir den <u>Beharrungszustand</u>, u. dieser ist also entweder

1. unregelmäßig oder
2. regelmäßig

u. wenn der letztere Statt findet

a. unveränderlich, gleichförmig,
b. periodisch, veränderlich.

Gewöhnlich tritt der Beharrungszustand kurze Zeit nach dem Beginn der Bewegung ein, u. erst wenn derselbe eingetreten ist, fängt die Maschine an regelmäßig zu arbeiten.

Bewegung einer Maschine bis der Beharrungszustand eintritt.

Die Bewegung der Maschine beginnt, wenn der Druck des Motors auf den Receptor im Stande ist, sämmtliche Widerstände der Maschine zu überwinden. Würde dieser Druck ein größerer werden würde, als nothwendig um mit den Widerständen im Gleichgewicht zu treten, so würde sich die Maschine in bewegen.

Die Bedingung des Beginnens der Bewegung einer Maschine ist daher, daß das Moment des Druckes, welchen der Motor auf den Receptor auszuüben vermag, größer werden kann als der auf den Recept. reducirte Widerstand.

Wenn wir z. B. eine große Mahlmühle mit 10 Mahlgängen durch eine sehr kleine Dampfmaschine treiben wollten, so müßte vielleicht der Druck des Dampfes auf jeden Quadratcentim. des Kolbens 10 Atm. betragen, um die Widerstände der Maschine überwinden zu können. Diese Dampfmaschine zeigt nun die

Mühle in Bewegung setzen können oder nicht, je nachdem die Belastung des Sicherheitsventils pr Quadratcentim. kleiner oder größer als 9 Klgr. ist. (1 k abgerechnet wegen des absoluten Drucks auf 1 □ctm.). Ist die Belastung z. B. nur 4 Klgr. so wird sich der im Kessel gebildete Dampf vermehren, bis er durch seine Spannkraft auf jeden Quadratctm. des Sicherheitsvent. einen Druck von 5 k ausübt; dann wird das Ventil gehoben, so weit, daß aller Dampf, der in einer gewissen Zeit gebildet wird, entweichen kann. Die Mühle wird aber ruhig stehen bleiben. Wenn dagegen das Sicherheitsventil mit einem Druck von 9 oder mehr Klgr. belastet wird, wird die Spannung des Dampfes allmählig auf jeden □cm einen Druck von 10 Klgr ausüben, ehe daß das Ventil gehoben wird, u. die Mühle wird in Bewegung kommen.

Um sich eine klare Vorstellung zu machen, wie die Bewegung einer Maschine beginnt, u. wie sie fortschreitet bis der Beharrungszustand eintritt, ist es am zweckmäßigsten einige

specielle Fälle zu betrachten, indem
es kaum möglich ist, bei der Verschieden-
artigkeit der Wirkungsweise der
verschied. Motoren den Gegenstand
im Allgemeinen zu behandeln.

Nehmen wir als erstes Beispiel
an, daß eine Mahlmühle durch ein Pferd
vermittelst eines Göpels (Manège)
getrieben werden soll. Um die
Widerstände, welche das Zerreiben der
Getreidekörner verursacht, sowie
auch die Widerstände, welche die
verschiedenartigen Reibungen
der Maschine verursachen, zu über-
winden, wird an dem Arm des Göpels,
an welchem das Pferd ziehen soll,
eine gewisse Zugkraft z. B. v. 75 k
nothwendig sein. Wenn nun das
Pferd zu ziehen beginnt, werden
anfangs die Stränge so weit ausgedehnt,
bis auf ihren Befestigungspunkt ein Zug
von 75 k entsteht. In dem Moment,
in welchem diese Zugkraft eintritt, hält
sie den Widerständen der Maschine
gerade das Gleichgewicht; damit aber
eine Bewegung entsteht, muß die

191. Zugkraft noch mehr wachsen. Ist diese z. B. 80 Kilogr. geworden, so werden davon 75 Kg gerade hinreichen, den Widerstand das Gleichgewicht zu halten, u. der Überschuß von 5 Kg wird auf sämtliche Massen der Maschine so einwirken, als wenn die Maschine gar keinen Widerstand verursachte, und bloß ein System von trägen Massen wäre, auf welche eine Kraft von 5 Kilogr. wirkt. Die Massen müssten daher in Bewegung gerathen.

Nehmen wir nun an, daß das Pferd durch 2 Minuten mit 80 Kg anzieht, so wird während dieser Zeit die Geschwind. der Maschine fort u. fort zunehmen, das Pferd muß aber immer schneller u. schneller gehen, u. wenn es im Stande wäre, bei jeder Geschwind. eine Zugkraft auszuüben, die größer als 75 Kg wäre, müßte die Geschw. der Maschine über alle Grenzen wachsen.

Nehmen wir nun an, daß das Pferd, nachdem die Bewegung durch 2 Minut. gedauert hat, plötzlich schwächer u. genau mit 75 Kg anzieht, so ist nun diese Zugkraft wiederum im Stande dem Widerstand der Maschine das Gleichgew.

zu halten; es ist aber kein Überschuß
an Kraft vorhanden, der eine weitere
Beschleunigung der Masse der Maschine her-
vorbringen könnte, sie wird also mit
der am Ende der 2 Min. vorhandenen
Geschwindigk. vermöge der Trägheit
ihre Bewegung fortsetzen, u. wenn
das Pferd fort u. fort mit 75 Pfd anzieht
so wird dieser Bewegungszustand
fortdauern.
Es ist also dann ein gleichförmiger
Bewegungszustand eingetreten.
Wenn das Pferd nur während einer
Minute mit 80 Pfd Zugkraft anzieht,
u. am Ende dieser Zeit mit 75 Pfd seine
Zugkraft fortsetzt, so tritt schon nach
der ersten Minute ein Beharrungszustand
ein, u. welch. aber d. Geschwind. der Maschine
u. des Pferdes kleiner sein wird als
in dem vorigen Fall, denn im ersten
Fall hat der Überschuß von 5 Pfd durch
2 Minut. die Masse der Maschine be-
schleunigt; im 2ten Fall aber nur während
einer Minute.
Aus diesem Beispiele sehen wir
folgendes:

1.) Die Bewegung der Maschine beginnt in dem Moment, wo die Kraft im Stande ist, die Widerstände zu überwinden;

2.) die Geschwind. der Maschine nimmt so lange zu, als die Kraft stärker wirkt, als zur Überwindung der Widerstände nothwendig ist, indem der Überschuß an Kraft nichts zu thun hat, als die Massen der Maschine zu beschleunigen.

3.) der Beharrungszustand tritt in dem Augenblick ein, von welchem an kein Überschuß an Kraft vorhanden ist; wenn also die Kraft anfängt u. fortfährt gerade nur so stark zu wirken als zur Überwindung der Widerstände nothwendig ist.

Beim Beginn der Bewegung u. beim Beginn des Beharrungszustandes, so wie auch während der ganzen Dauer desselben, ist also die Kraft mit den Widerständ. im Gleichgewicht.

Wenn das Pferd im Beharrungszustand nicht immer gleichstark angreift, sond. manchmal stärker, manchmal schwächer als 75 k, so wird

die Maschine außerordentlich schneller
u. bequemer gehen.

Als zweites Beispiel wollen wir eine Wassermühle betrachten, die durch Wasser vermittels eines unterschlächtigen Wasserrades bewegt werden soll.

Nehmen wir an, daß am Umfang des Rades ein Druck von 1000 k erford. sei, um die sämtlichen Widerstände, welche der Bewegung entgegenwirken, zu überwinden. Wir können uns also die Widerstände der Maschine ganz weg denken, wenn wir am Umfang des Rades einen Widerstand von 1000k anbringen.

Nehmen wir an, daß anfangs die Schützen des Rades geschlossen sei, so daß kein Wasser auf das Rad fließen kann, u. daß dem Wasserrad immer gleichviel Wasser zugeleitet werden kann.

Wird nun das Schützen geöffnet, so beginnt das Wasser gegen das Rad hinzuströmen, u. in dem Moment, in dem das erste Wassertheilchen das Rad erreicht, wird auf die Schaufeln, welche es trifft, ein Druck ausgeübt. Diesem ersten Theilchen folgen andere nach. Die Zahl der gleichzeitig an die

Schaufeln anschlagenden Wassertheilchen,
u. endlich auch der Druck, welcher auf
dieselben ausgeübt wird, nimt allmählig
zu u. wenn überhaupt die Wassermenge,
welche der Kanal ud. [illegible] liefern kann,
hinreichend groß ist, u. das Wasser-
rad nicht zu klein gemacht ist, so wird
der Druck auf die Schaufeln nach einiger
Zeit = 1000 ℔ werden, u. von diesem
Augenblick an auch größer werden
müssen, weil dem Wasser fort u. fort
Wasser zufließt u. diesem durch die
Schaufeln der Weg zum Abfließen
versperrt ist.

In dem Augenbl. in w. der Druck des
Wassers gegen die Schaufeln beginnt größer
als 1000 ℔ zu sein, beginnt die Maschine
ihre Bewegung, indem der in jedem
Augenbl. vorhandene Überschuß der
Kraft die Masse der Maschine beschleunigt.

In dem Maße als die Geschwind.
der Schaufeln zunimt, kann mehr u.
mehr Wasser abfließen, so lange
aber die wegfließende Wasser-
menge kleiner ist, als die zufließende,
sammelt sich vor dem Rade mehr
u. mehr Wasser an. Der Druck auf
die Schaufeln nimt immer fort zu,

so wie sich mehr Wasser gegen den Schaufeln anhäuft, andererseits wächst dieser Druck, wird daher in einem gewissen Moment ein Maxim. erreichen, u. von da an allmählig abnehmen, bis er wieder 1000k beträgt. Bis zu diesem Moment hat nun die Geschwind. der Maschine zugenommen, kann sich aber von da an nicht mehr ändern, weil kein Überschuss an Druck mehr vorhanden u. die zufliessende Wassermenge der abfliessenden gleich geworden ist.

Es tritt also ein gleichförm. Bewegungszustand ein.

Die Erscheinungen welche sich zeigen bis der Beharrungszustand eintritt, sind der Hauptsache nach folgende:

1.) Die Bewegung der Maschine beginnt, wenn die Kraft zum erstenmal den Widerst. das Gleichg. hält.

2.) Der Druck auf die Schaufeln wächst anfangs, nachdem die Bewegung begonnen hat, erreicht nach einiger Zeit ein Maxim. u. nimmt von da an allmählig ab, bis er genau das 2te Mal dem Widerstand das Gleichgew. hält.

3. Bis zu diesem Augenblick sind die Massen der Maschine beschleunigt worden.

4.) Der Beharrungszustand tritt ein, wenn zum 2tenmal Kraft u. Widerstand ins Gleichgewicht getreten, u. wenn die zufliessende Wassermenge der abfliessenden gleich geworden ist.

Als 2tes Beispiel wollen wir annehmen, daß dieselbe Mahlmühle durch eine Dampfmaschine bewegt werden soll.

Wir nehmen an, daß die Heizung immer gleichförmig fortgesetzt werde, daß also in gleichen Zeitintervallen gleich viel Dampf (dem Gewichte nach) erzeugt und gleichviel Wasser verdampft werde.

Die Dampfmaschine soll zur Verwandlung der geradlinigen auf u. niedergehenden Bewegung in eine rotirende, mit Balancier, Schubstange, Kurbel u. Schwungrad, so wie auch mit einem Mechanismus für die Zu- u. Ableitung des Dampfes versehen sein. Dieser Mechanismus hat aber zur Folge, daß die Kraft, mit welcher auf den Kolben gewirkt werden muß, um sämtliche Widerstände, sowohl der Dampfmaschine, als auch der Mahlmühle zu überwinden, von der Stellung des Kolbens abhängen wird.

Sie ist am kleinsten, wenn derselbe sich in der mittleren Stellung befindet, nimt allmählig zu, so wie sich der Kolben der höchsten u. tiefsten Stellung nähert. u. ist in dieser Stellung selbst unendlich groß, weil die Schubstange u. die Kurbel in dieselbe gerade Linie fallen.

Nehmen wir an, daß auf jeden □cm. des Kolbens ein Druck von 3^k wirken müßte, um sämtliche Widerstände zu überwinden, wenn der Kolben sich der mittleren Stellung befindet, u. nehmen wir an, daß der Kolben anfänglich in diese Stellung gebracht würde. So wie nun der untere Kessel geheizt wird beginnt die Dampfentwicklung. Es sammelt sich immer mehr Dampf im Kessel an, seine Spannkraft wächst allmählig u. wird endlich (vorausgesetzt, daß das Sicherheitsventil stark genug belastet ist) nach einiger Zeit so groß, daß auf □ctm. der Kesselwand u. des Kolbens ein Druck von 3^k ausgeübt wird. Da aber in diesem Moment noch kein Dampf abfliessen kann, so muß die Spannung noch weiter zunehmen. Die Maschine wird aber ihre Bewegung beginnen, so wie die Spannung nur um das Unbedeutendste größer geworden ist als 3^k pr. 1□cm.

199. Aber die Vorgänge der Maschine
genau zu verfolgen ist aber selbst
mit Zuhilfenahme der Differenz. u. Integr.
nicht möglich; um so viel weniger durch
unmittelbare Beobachtung der Versuche.
Aber so viel sieht man leicht ein,
daß anfangs so lange die Maschine
noch einen langsamen Gang hat, mehr
Dampf gebildet wird, als ver-
mittelst der Maschine aus dem Kessel
entfernt wird. Die Spannung des
Dampfes muß daher bis zu einem ge-
wissen Grade anwachsen. Es wird
z. B. nachdem das Schwungrad die erste
Umdrehung gemacht hat, der Druck
des Dampfes auf jeden □cm: 3,6 Kg
nach der 2ten Umdrehung 3,3, nach der
nach der 3ten 4,6 nach der 4ten 4,1 Kg
betragen. Ist aber einmal die
Geschwindigkeit der Maschine so groß
geworden ist, daß die Dampfmenge
welche durch die Maschine bei einer
Umdrehung aus dem Kessel entfernt
wird, ebenso groß ist, als diejenige, die
in dieser Zeit producirt wird, so kann in
der Spannung des Dampfes, so wie
auch in der Geschwindigk. der Maschine

(in der Zeit einer Umdrehung) keine Änderung mehr eintreten, obschon dann der Beharrungszustand eingetreten, der aber nicht gleichförmig, sondern periodisch veränderlich ist, indem zwar alle Umdrehungen des Schwungrades in gleicher Zeit geschehen, die Geschwind. der einzelnen Stücke der Maschine aber nicht constant sein können.

Wir können uns durch graphische Darstellung die Erscheinungen, welche bei der Bewegung einer Maschine vorkommen, versinnlichen.

Da es hinlänglich ist die Bewegung eines einzelnen Stückes zu kennen, um die aller übrigen zu bestimmen, so wollen wir die Bewegung eines Stückes des Zapfens deutlich zu machen suchen.

Zu diesem Behufe vergleichen wir nur zwei Curven, indem wir den Weg, den der Zapfen zurücklegt, als Abscisse auftragen, u. in der einen Curve den Druck des Motors auf den Zapfen, in der andern die Geschwindigkeit des letzteren, als Ordinate auftragen.

In Fig. 1 ist das Gesetz dargestellt, nach welch. sich bei e. Masch., die zuletzt einen gleichförmigen Beharrungszustand annimmt, der Druck des Motors auf den Zeugpt. ändert.

Fig. 2 stellt das Gesetz der Geschwind. des Zeugpkts dar.

Der Druck wächst zuerst von 0 bis od ehe daß sich die Maschine bewegt. Sobald die Bewegung beginnt, wächst der Druck noch weiter fort. Es wird ein Maximum, wenn der Zeigpkt. den Weg ob zurückgelegt, u. nimmt dann wieder allmählig ab. Ist der Weg des Zeigpkts = oc geworden, so ändert sich der Druck bei der Fortsetzung der Bewegung nicht mehr, (daher ist yz eine zur Abscissenlinie ∥ Linie.) u. es ist der gleichförmige Beharrungszust. eingetreten.

Die Geschwind. des Zeugpt. ist anfangs 0, nimmt allmählig zu bis der Beharrungszust. eingetreten ist, u. ändert sich dann nicht mehr. daher ist su ∥ zur Abscissenlin.

Fig. 3. stellt d. Gesetz dar, nach welch. sich im Allgem. der Druck des Motors auf den Zeugpt. ändert, wenn zuletzt ein period. Beharrungszustand eintritt.

In Fig. 4.) stellen d. beiden Curven die Geschwindigkeitsänderungen von 2 verschied. Maschinen mit period. Beharrungszustand der.

Die Geschwindigk. des Motors auch der Dampfm. schwanken um einen gewissen mittleren Zustand, der durch die punktirte L. Fig. 3 dargestellt ist.

Auch die Geschw. bei derj. Masch., deren Bewegungs- durch Fig. 4 dargestellt ist, schwanken um gewisse mittlere Werthe herum, welche durch die punkt. L. angedeutet sind. Beide Masch., auf welche sich die oberen Curve bezieht, wird die Geschw. des Zst. nie mehr gleich 0 wenn einmal die Bewegung eingetreten ist. Bei der Maschine, deren Beweg. durch die untere Curve dargestellt, wird die Geschwind. des Zst. im Beharrungsst. period. = 0.

Fig. 5

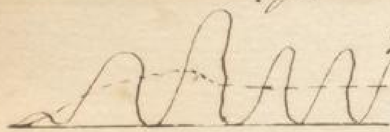


Fig 6.

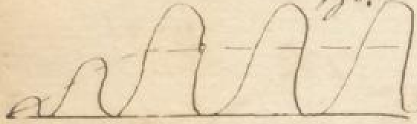


Fig. 5 stellt das Bewegungsgesetz einer Masch. dar, bei welcher d. Zst. nicht nur im Beharrgsz. sond. auch während der Einleitung der Bewegung abwechselnd seine Geschwind. verliert. Das Gleiche ist der Fall bei der Maschine, deren Bewegungszustand Fig. 6 darstellt.

Die Zeit, welche verfließt bis der Beharrungszustand der Bewegung eintritt, hängt vorzüglich von der Größe der Massen der Maschine ab, u. von den Kräften u. Widerstd., welche in der Zeit der Bewegung auf die Masch.

einwirken. In der Regel tritt der Ge-
brauchsfall ... auch einigen Wänden ein.

Obgleich es nicht möglich ist die Bewegung der Maschine bis zum Gebrauchsort in jedem Falle genau zu verfolgen, so wird es doch zweckmäßig sein, durch einige Beispiele den Gegenstand zu erläutern.

Eine gew. Wassermühle wird durch Wasser vermittelst eines unterschlächt. Wasserrades getrieben, es soll die Bewegung betrachtet werden.

Es sei k der auf d. Umfang des Rades reduc. zusammengesetzte Widerstand der Masch., welcher demnach gleich ist dem Druck, der am Umfang des Rades wirken muß, um die Widerstände der Maschine zu überwinden.

M die auf den Umfang des Rades reduc. Masse aller beweglichen Bestandtheile der Masch.. Man denke sich diese Masse einerseits durch das auf die Schaufeln strömende Wasser, andererseits den Widerst. k wirkend gemacht werden könnte, würde sie sich genau so bewegen wie die Schaufeln des Rades. Dem Rade strömen unter gleichem Wasser zu u. es sei m die in jeder Sec. auf das

Rad mittelst Wasserkraft.

V die Geschw., mit welcher das Wasser gegen die Schaufeln strömt.

v die Geschw. der Schaufeln, nachdem die Bewegung eine Zeit t gedauert hat.

P der Druck, welcher auf die Schaufeln ausgeübt wird, der Wassermenge m u. der Differenz (V−v) der Geschw. des Wassers u. der Schaufeln proportional, wir können daher setzen:

$$P = A \cdot m(V-v)$$

wobei A als eine Constante zu betrachten ist.

Die Schaufeln werden sich eben ganz so bewegen, wie die Masse, wenn auf sie die Kraft P u. der Widerstand R einwirkt.

Bezeichnen wir durch dv die Änderung der Geschw. des Rades, in dem Zeitelement dt, welches auf die Zeit t folgt (t vom Anfang der Bewegung an gerechnet) so ist die Diff-gleich. der Bewegung:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{P-R}{M} = \frac{1}{2}\,\frac{A\cdot m\,(V-v)-R}{M}$$

hieraus folgt:

$$\frac{dv}{Am(V-v)-R} = \frac{dt}{2M} \quad \text{od.} \quad \frac{dt}{2M} = \frac{dv}{(AmV-R)-Amv}$$

Das Integral dieser Gleich. ist

$$\frac{t}{2M} = -\frac{1}{Am}\,\lg nat\left[(AmV-k)-Amv\right]+C$$

für $t=0$, ist aber $v=0$, demnach

$$0 = -\frac{1}{Am}\,\lg nat\,(AmV-k)+C$$

Diese Gleich. von der vorhergeh. abgezogen folgt:

$$\frac{t}{2M} = \frac{1}{Am}\,\lg nat\,\frac{AMV-k}{AmV-k-Amv}$$

u. hieraus findet man:

$$v = \left(V-\frac{k}{Am}\right)\left(1-e^{-\left(\frac{Am}{2M}\right)t}\right)$$

Nachdem die Beweg. einige Zeit gedauert hat, wird $e^{-\left(\frac{Am}{2M}\right)t}$ sehr klein, vorzüglich dann, wenn M ~~sehr~~ klein u. m sehr groß. Ist dieser Zeitpunkt eingetreten, so kann man ohne merklichen Fehler setzen:

$$v = V - \frac{k}{Am}$$

Diese Gleich. drückt also die Geschwind. aus, welcher sich die Geschw. des Rades ohne Ende nähert, aber sie doch nie vollkommen erreicht.

Streng genommen tritt also der gleichförmige Beharrungsz. gar nicht ein, sond. dieser ist nur die Grenze, welcher sich die Beweg. ohne Ende nähert.

Wenn aber einmal bei dem Wasser

nun t $e^{-\left(\frac{Am}{2M}\right)t}$ nur noch $\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ ... beträgt, kann m. für die Praxis annehmen, daß der Beharrungszustand wirklich eingetreten sei. Theoretisch betrachtet ist es aber auf jeden Fall, daß m. kein Moment angeben kann, in welchem der Beharrungszustand wirklich eintritt.

Aus der letzteren Gleichung folgt:

$$K = Am(V-v)$$

woraus m. sieht, daß sich der Druck des Wassers auf die Schaufeln [illegible] dem Widerstande nähert, od. mit andern Worten: Kraft u. Widerstand nähern sich immer mehr u. mehr dem Gleichgewichtszustand.

Ueber die Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand.

Bedingungen, unter welchen ein solcher Zustand eintritt.

Damit ein gleichförm. Beharr. der Masch. eintreten kann, (d. h. m. die Geschwind. in jed. Augenblick unveränderl. bleibt) muß der gewonn. [illegible] von der Art sein, -

daß das Verhältniß der Geschwind. zweier Punkte nur allein von den constant. Verhältn. der Maschinenbestandtheile abhängt.

Ist eine solche Masch. außer der Einwirk. eines Motors u. gewisser Widerstände in Bewegung gesetzt u. tritt nach Verlauf einer gewissen Zeit, zwischen dem Drucke des Motors auf den Recept. u. den verschied. Widerständ., welche der Beweg. der Maschin. u. der zu bearbeitend. Körper entgegensetzen, ein bleibender Gleichgewichtszustand ein, so beginnt von diesem Augenblick an eine durchaus gleichförmige Bewegung aller Theile.

Es ist zwar denkbar, daß in diesem Gleichgewichtszustande die Kräfte u. Widerst. mit veränderl. Kraft wirken (wenn z. B. die Kraftmaschine mit einem sehr empfindlichen Regulator versehen wäre, welcher mehr od. weniger Wasser od. Dampf auf sie einwirken läßt, je nachdem sich die Widerstände ändern). In der Wirklichkeit ist dies aber nicht der Fall, sondern sowohl die Kräfte als die Widerstände, wirken bei dieser Maschine im Beharrungszustande immer mit unveränderter Intensität.

Nennen wir nun P den Druck, welchen der Motor auf den Rec. ausübt.

k_1 k_2 k_3 ..... die verschied. Widst., welche die Reibung der Maschinenbestandth. verursachen.

Q der Hauptwiderstand, den der zu verwendende Körper verursacht,

V, w_1, w_2 w_3 ... u die Geschwind. der Angriffspunkte, so ist nach dem Princ. der mechan. Geschw. die Bedingungsgleich. zwischen jener Kraft u. jenen Widerständen:

$$Pv = k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 w_3 \ldots Qu.$$

Diese Gleichg zeigt, daß wenn bei einer Maschine ein gleichförm. Beharrungszustand eingetreten ist, der Effect des Motors gleich der Summe der Effecte sämtlicher Widerstände ist.

Wären keine Nebenhindernisse der Bewegg vorhanden, wäre also $k_1 = k_2 = k_3 \ldots = 0$ so würde jederzeit

$Pv = Qu$ sein, d. h. der Effect welchen die Werkzeuge hervorbringen ist gleich dem Effect, welchen der Motor dem Rec. abgibt. Da aber die Nebenhindernisse nie ganz beseitigt werden können, so kann die Maschine nie den totalen Effekt, welchen sie vom Motor empfangen hat, auf die Werkzeuge übertragen, sondern nur ein Theil desselben.

Wir sehen hieraus, daß in der Maschine selbst keine Wirkungsfähigkeit enthalten ist, denn diese werden durch den Effekt gemessen u. der Effekt kann durch die Maschine nicht vergrößert werden, sondern im Gegentheil vermindert sie durch ihre Reibungen einen Theil des ihr mitgetheilten Effektes u. gibt nur den übrig bleibenden Rest an die Werkzeuge ab. Es ist also unmöglich eine Maschine zu construiren, vermittelst welcher z. B. ein Pferd eine große Spinnerei treiben könnte, weil hiezu ein vielmal größerer Effekt nothwendig ist, als jener ist, den ein Pferd hervorbringt, u. weil eine Maschine, wie sie auch eingerichtet, einen ihr mitgetheilten Effekt nie vergrößern kann. Eine Maschine ist in Bezug auf die Art u. Weise wie sie einen ihr mitgetheilten Effekt auf die Maschine arbeitenden Stelle überträgt, ohne denselben zu vergrößern, mit einer Wasserleitung zu vergleichen, welche

das aufgenommene Wasser fortleitet u.
an verschied. Stellen in größerer oder kleinerer Quantität mit größerer od. kleinerer Geschwind. wieder abgibt.
In einer Wasserleitung fließt das Wasser in den verschied. communicirenden Röhren von dem Reservoir nach den verschieden Punkten hin, wo man desselben bedarf.
Bei der Masch. fließt gewissermaßen der Effect durch die verschied. Maschinenbestandtheile von der Kraftquelle (dem Motor) nach allen den Punkten hin, an welchen Widerstände überwunden werden müssen.
Würde m. eine Wasserleitung so ganz anlegen, daß an den Verbindungsstellen der Röhren, oder durch die Röhrenwände selbst gar kein Tropfen Wasser entweichen würde, so würden gewiß aus allen den Öffnungen, die zum Abfluß des Wassers bestimmt sind, ebenso viel ausfließen, als in dieselbe hineingeleitet wird. Ebenso würde eine Masch. ohne Nebenhindernisse den ganzen Effect, welchen sie empfangen hat, auf die Punkte übertragen, an welchen die Werkzeuge arbeiten.

Die Vortheile, welche eine Maschine gewährt.

Diese bestehen blos darin, daß sie den Effect von der Effectsquelle nach den arbeitenden Punkten hinleitet, den empfangenen Effect in Partialeffecte auflöst, die Faktoren dieser Partialdifferentiale (Druck u. Geschwind.) gehörig vergrößert od. verkleinert; u. endlich zugleich die Bewegung des Receptors in jene der Werkzeuge verwandelt.

Aber der größte Vortheil, den die Masch. gewähren, liegt in der Möglichkeit, durch sie die verschied. Motoren der unorganischen Natur für alle Arbeiten dienstbar machen zu können. Mit einer Masch. wird es möglich durch eine sehr schwache Kraft einen ungeheuren Druck hervorzubringen; es ist hiezu nur nothwendig einen geometrischen Zusammenhang zu erfinden, bei welchem ein gewisser Punkt eine äußerst langsame Bewegung macht, während ein anderer sich schnell

bewegt. Läßt man auf letztern selbst eine schwache Kraft wirken u. steht man den ersten mit dem Körper in Berührung, auf welchen ein heftiger Druck ausgeübt werden soll, so wird geschehen, was man gewünscht hat.
Mit einer Maschine wird es ferner möglich eine sehr langsame Bewegung in sehr schnelle zu verwandeln; man muß sich aber gefallen lassen, daß da wo die schnelle Bewegung entsteht, nur ein schwacher Widerstand überwunden werden kann.

Jeder natürl. od. künstl. Motor ist sozusagen eine Kraftmagazin.

Die letztern werden gewöhnlich benützt, wenn man nur ganz unbedeut. kleine Wirkungen continuirlich oder in aufeinanderfolgenden Zeitintervallen bedarf. Dies geschieht durch Mechanismus, welcher aus dem Kraftmagazine die Wirkung nur ruckweise austreten läßt, wie dies z.B. bei einer Uhr durch die Hemmung geschieht.

Ein sehr wichtiger Vortheil,

213. den die Maschine gewähren besteht auch darin, daß man durch sie eine große Anzahl Werkzeuge derselben Art gleichzeitig funktioniren lassen kann, wie dies z. B. bei der Spinn- u. Nähmaschine der Fall ist.

Vortheilhafteste Geschwindigkeit des Receptors.

Da die Masch. selbst keinen Effect produciren kann, u. sich nach der Größe des Effectes, welche die Masch. empfangen hat, die Größe der Arbeit richtet, welche sie verrichten kann; so ist es von sehr großer Wichtigkeit die Einrichtung u. Bewegung des Recept. so anzuordnen, daß demselben durch eine gewisse Quantität von dem thätigen Motor ein möglichst großer Effect mitgetheilt wird.

Nennen wir v die Geschwind. des Recept., f(v) den Druck des Motors auf den Receptor, E den Effect, der dem Recept. mitgetheilt wird,

$$E = f(v).v.$$

da nun dieser Ausdruck bei einer Zunahme von v, wegen des Factors v wächst, aber wegen des Factors $f(v)$ abnimmt, weil, wie wir sehen werden, der Druck des Motors auf den Rezeptor abnimmt, wenn die Geschwindigkeit desselben wächst u. sogar verschwindet, wenn $f(v) = 0$ sowie der Fall ist, wenn die Geschwindigkeit des Rezeptors eine gewisse Grenze erreicht; so muss er eine gewisse Geschwindigkeit haben, bei welcher E ein Maximum wird. Um diese vortheilhafteste Geschwindigkeit ausfindig zu machen, muss für jeden einzelnen Motor u. Rezeptor der Factor $f(v)$ bekannt sein. Ist dies der Fall, so ergibt sich die vortheilhafteste Geschwind., wenn man den Ausdruck für E differentiirt u. $\frac{dE}{dv} = 0$ setzt, demnach durch die Auflösung der Gleichung

$$f(v) + v.\frac{d.f(v)}{dv} = 0$$

Vortheilhafteste Anordnung eines Maschinensystems hinsichtlich der Benutzung des Motors.

Die absolute Wirkungsfähigkeit, welche in einem Motor enthalten ist, soll so viel wie möglich in ihrer Gänze auf die arbeitenden Stellen übertragen werden; es ist aber der absolute Effekt, welcher in d. Motor enth. ist, gleich dem Effekt, welchen der Receptor empfängt, mehr dem Effekt, welcher noch in dem Motor enthalten ist, wenn er aufgehört hat auf die Maschine zu wirken u. dieselbe verläßt. Dies gilt auch für thierische Motoren. Dieser letztere Effekt soll also so klein als möglich ausfallen, damit der erstere so groß als möglich wird. Der Motor soll daher den Receptor an dem tiefsten Punkt u. ohne alle Geschwindigkeit verlassen. Der Dampf soll, nachdem er die Maschine verläßt, nur noch eine möglichst schwache Spannkraft besitzen.

Der Effekt den der Recept. empfangen hat, ist gleich dem Effekt, der durch die Reibung verloren geht, mehr dem, der durch Stöße u. Vibrationen verloren geht, mehr dem Effekte, welcher auf die arbeitenden

Punkte der Werkzeuge übertragen wird. Damit also der letztere möglichst genau ausfalle, muß man die Reibungen, Stöße, Vibrationen zu vermeiden suchen.

Vortheilhafteste Geschwindigkeit des Werkzeuges.

Die Quantität des Produktes, welches die Maschine liefert, hängt theils von der Einrichtung, theils von der Geschwindigkeit der Werkzeuge ab.

Es ist z. B. bei einer Mehlmühle die Geschwindigkeit der Steine für die Güte des Mehles nicht gleichgültig. Gehen die Steine zu langsam, so entsteht nur ein Quetschen der Körner, u. es wird kein feines Mehl gebildet; gehen die Steine zu schnell, so entsteht zwischen denselben eine Erhitzung wodurch das Mehl einen unangenehmen Geruch erhält. In manchen Fällen ist auch die Quantität der Produkte, die eine Maschine mit einem gewissen dem Zeuge mitgetheilten Effekte liefert, von der Geschwind. der Werkzeuge abhängig. Eine langsam gehende Brettersäge liefert z. B. mit dem gleichen Kraftaufwand weniger als eine schneller gehende.

Bedingungen, welche erfüllt werden müssen, damit bei einer Maschine im Beharrungszustand der Receptor u. das Werkzeug die vortheilhaftesten Geschwind. annehmen.

Damit der Recept. u. das Werkzeug die vortheilhafteste Bewegung annehmen, sind im Allgem. 2 Hauptbedingungen zu erfüllen.

1.) Muss ein Mechanismus erdacht werden, welcher den Receptor mit dem Werkzeug verbindet, daß die Wege, welche sie zurücklegen, wenn m. die Maschine durch irgend eine Kraft verschiebt, sich so verhalten wie die Geschwindigkeiten, die der Receptor u. das Werkzeug im Beharrungszustand annehmen sollen.

Nennen wir V u. U die beiden letzteren Geschwindigkeiten u. u die Geschw., mit welcher sich das Werkzeug bewegt, wenn jene des Recept. v ist, so muss also

$$\frac{v}{u} = \frac{V}{U} \text{ sein.}$$

Wenn z. B. eine Mahlmühle durch ein unterschlächtiges Wasserrad zu treiben ist, so soll der Erfahrung zu Folge, die Geschwind. des Läufers am Umfange 10^m betragen, um eine gute Qualität Mehl zu erhalten. Es ist also $U = 10$ gegeben.

Ferner zeigt die Theorie u. bestätigt die Erfahrung, daß die Schaufeln des Wasserrades mit einer Geschw. gehen sollen, die halb so groß als jene dagegen die Schaufeln strömenden Wassers. Ist also letztere $= 4^m$, so müssten die Schaufeln mit 2^m sich bewegen, es ist also $V = 2^m$.

Nun muß man ein Räderwerk ersinnen, welches das Wasserrad so mit dem Mühlstein verbindet, daß das Verhältniß der Umfangsgeschwind. dieser beiden Bestandtheile nämlich $\frac{v}{u} = \frac{V}{U} = \frac{10}{2} = 5$ wird, d. h. es muß ein Pkt am Umfang des Steines immer 5mal schneller gehen, als ein Pkt am Umfang des Rades.

2.) Muß man auf den Recept. eine solche Quant. des Motors einströmen lassen, bis derselbe die verlangte Geschwindigkeit annimmt. Diese Quantität des Motors wird durch die Bedingung bestimmt, daß der Effect des Motors der Summe aller Effecte der Widerstände gleich sein muß. Ist nun z. B. die Summe der Effecte aller Widerstände bei einer Mahlmühle (mit 3 Steinen) 900^{km} beträgt, muß der Effect

$A m (C-c) c$, welchen das Wasser dem Rad mittheilt, wenn ersteres eine Geschw. C u. u. letzteres eine Geschw. c besitzt, u. pr Secund. eine Wassermenge m zuwirkt, jenem 900^{km} gleich sein; man hat daher

$$A m (C-c) c = 900, \text{ woraus}$$

$$m = \frac{900}{A(C-c)c}$$

Ist aber (nach der Lehre vom Stoße des Wassers gegen eine Schaufel) $A = 2$ u. für den vortheilhaftesten Bewegungszustand $C = 4$; $c = 2$. demnach

$$m = \frac{900}{2.(4-2)^2} = 112,5$$

Bezeichnen wir durch Q das Gewicht der Wassermenge, deren Masse $= m = 112$ ist, so ist

$$m = \frac{Q}{2g} \text{, also } Q = 2\,mg = 2197 \text{ Kilogr.}$$

d. h. es müssen in jeder Sek. 2,197 Kubikmeter Wasser dem Rade zugeleitet werden, u. dann wird dieses die verlangte Hubhöhe von 2^m an u. ... am Umfang des Rades eine Geschw. von 10^m.

Das Wasserrad muß natürlich die hinreichend große Abmessungen erhalten, damit auch dieselbe jene Wassermenge gut einziehen kann.

Verfahren, welches bei der Construction einer Maschine zu beobachten ist.

Wenn eine Maschine construirt werden soll, welche zur Verrichtung irgend einer mechanischen Operation dienen soll, ist zunächst nur gegeben:

1.) der Motor
2.) der zu verändernde Stoff
3.) was aus dem Stoff entstehen soll, oder welche er geschafft werden soll, u. die Maschine muß genau erfunden werden.

Um nun eine Übersicht zu verschaffen, von den Verfahren, welches bei der Construction einer Maschine zu beobachten ist, wollen wir zunächst 3 Fälle unterscheiden:

1.) Fall. Wenn die Operation, welche die Maschine verrichten soll, so einfach ist, daß ein einziges Werkzeug hinreichend ist.

2.ter Fall. Wenn die Operation mehr zusammengesetzt ist, so daß eine Arbeitsmaschine nothwendig wird.

3.ter Fall. Wenn eine sehr complicirte Operation ausgeführt werden soll, welche ein System von Arbeitsmaschinen nothwendig macht.

Über die Maschinen mit periodischem Beharrgszustand.

Wenn d. gemeins. Gang der Masch.bestandth. von der Art ist, daß das Verhältniß der Geschwindigkeiten nicht von je zwei beliebig. Punkten der Masch. constant ist, wenn dieselbe durch irgend eine Kraft bewegt wird, sondern wenn dies. Verhältniß entweder von je 2 Punkten od. von einigen Paaren von Punkten, im Laufe der Bewegung sich ändert, welche von der relativen Stellung der Maschbestandth. abhängt, so tritt in der Wirklichkeit immer ein period. wiederkehrender

Beharrungszustand ein. Dieser Zustand tritt auch ein, wie auch die Maschine construirt sein mag, wenn die Kräfte u. Widerst. mit periodisch veränderl. Intensität wirken, u. sich nicht in jedem Augenblick das Gleichgewicht halten.

Um uns nun den Beharrg. einer solchen Masch. im Beharrungszstd eine klare Vorstellung zu machen, können wir uns sämmtliche Widerstände, die der Beweg. entgeg. wirken, wegdenken u. dafür auf den Zeiger einen gewissen Widerstand wirkend annehmen, der so gross ist als die Kraft, welche in jedem Augenblick auf den Zeiger wirken müsste, um sämmtlichen Widerstdn das Gleichgewicht zu halten. Dieser Widerstand, den wir mit R bezeichnen wollen, kann mech. statisch. Grunds. u. am zweckmässigst vermittelst des Princips der virt. G. leicht gefunden werden.

Es sei P der Druck, den der Motor auf d. Zei. in dem Mom. ausübt, in welchem der auf den Zei. reduc. Widerstand = R ist. Wir können also die Maschine nun als ein träges Massensystem ansehen, auf welches 2 im Allgem. period. veränderl. Kräfte P u. R wirken, die

/.

einen gemeinsch. Angriffspunkt oder verschied. Richtungen haben.

Es ist allerdings theoretisch denkbar, daß P u. K im Augenblick der Bewegung gleich groß wären. In diesem Fall würden sich die Kräfte P u. K in jedem Augenblick aufheben, u. die Beweg. der Masch. würde bloß durch die Trägheit so fortgehen, als wirken gar keine Kräfte auf sie ein. Die lebend. Kräfte der Masch. bleiben daher immer gleich groß, obgleich sich die Geschw. einzelner od. auch aller Theile beständig ändern können.

In der wirklich. Ausführung ist bei Masch. mit gleichförm. Beharrungszustand der Fall, daß in jedem Augenbl. P = K (u. überdieß P u. K constant).

Nehmen wir nun an, daß P u. K veränderl. sind, aber immer wieder dieselben Werthe annehmen, wenn der gemeinsch. Angriffspunkt u. dass. Stück seine Bahn zurückgelegt. Dann entwickelt die Kraft P während jed. dieser Perioden eine gleichgroße Wirkung u. K eine gleichgroße Gegenwirkung, u. diese beiden Wirk. müssen gleich sein, indem auch überdieß am jeder Periode die Massen der Masch. wiederum dieselbe Geschwindigkeit (od. wenigstens dieselbe totale lebendige Kraft) besitzen müssen;

Denn wenn in einer Periode eine Geschwindigkeitszunahme der Maschine entstünde, so müßte dies auch in allen folgenden Perioden geschehen, u. die Geschwind. der Masch. müßte fortwährend wachsen, was gegen die Voraussetzung ist, daß ein Beharrungszustand eingetreten sei.

Ist also ein Beharrungszustand vorhanden, so ist die Wirk., welche der Motor dem Zeug. während einer Periode ertheilt, gleich der Gegenwirk., welche der Widerst. R in gleich. Zeit entwickelt, u. die Geschwind. aller Theile der Masch. sind im Anfang jeder Periode dieselben.

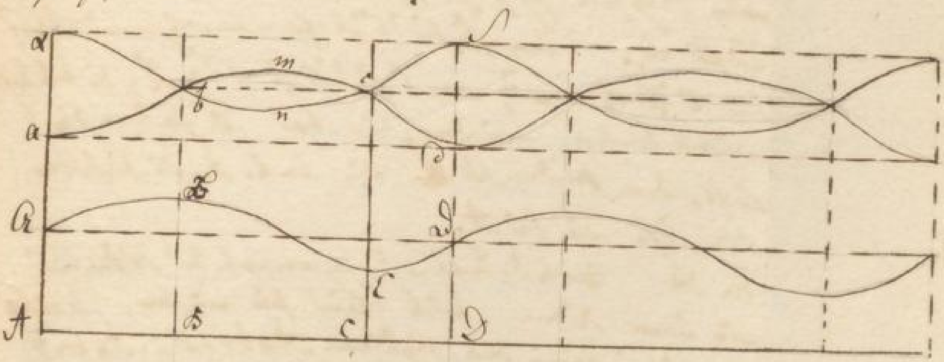
Innerhalb der Periode, wird abwechselnd $P \gtrless R$ sein, denn fortwährend kann P weder größ. noch kleiner als R sein, weil im ersten Fall die Geschwind. der Maschine während der ganzen Periode wachsen; im letztern Fall abnehmen müßte. Es könnten also am Ende der Periode nicht dies. Geschwind. vorhanden sein, die am Anfang vorhanden waren.

So lange $P > R$, wirkt auf die Masch. eine Kraft $(P - R)$ zu Gunsten der Bewegung. Die Massen der Maschine werden also beschleunigt; es wird die Wirkungsfähigkeit des Massensystems erhöht. Während $K > P$ ist, also die Last nicht im Stande den Widerstand zu überwinden, wirkt der Bewegung der Maschine eine Kraft $(K - P)$ entgegen; die Geschw. der Masch. nimmt ab, u. die Massen verlieren wieder an Wirkungsfähigkeit.

Zwischen den Momenten, in denen $P > K$ u. $K > P$ wird, ist auch $P = K$; Last u. Widerstand halten sich also das Gleichgewicht, u. die Maschine bewegt sich in diesem Augenblick vermöge ihrer Trägheit fort, als wenn gar keine Kraft auf sie einwirkte.

Da nun, so lange $P > K$ ist, die Geschwind. der Masch. wächst, u. dem Aug. aber, in welch. $K > P$ wird, langsamer zu gehen anfängt, so tritt in diesem Moment (in welchem $P = K$ ist) ein Max. der Geschw. ein. Da ferner so lange $P < K$, die Geschw. der Masch. beständig abnehmen muß, bis P wieder $= K$ geworden ist, u. wiederum anfängt größer als K zu werden, so tritt in diesem Übergangsmomente ein Minim. der Geschwind. ein. Innerhalb einer ganzen Periode können mehrere Max. u. Minim. der Geschw. vorkommen, u. in diesem Falle wird es im Allgemein. ein absolutes Max. u. ein absol. Minim. geben.

225. Um die Erscheinungen, welche bei der Bewegung der Masch. mit periodischem Beharrungszustd eintreten, anschaulich zu machen, kann folgende Fig. dienen, welche sich auf eine Masch. bezieht, bei welcher innerhalb der Periode ein Max. u. ein Min. der Geschwdgk. eintritt.



Die Curve 𝔄𝔅ℭ𝔇 repräsentirt das Gesetz, nach welchem sich die lebendige Kraft des Maschinensystems ändert. Die Abscissen sollen den Weg ausdrücken, den der Angriffspunkt vom Anfg der Bewegg zurückgelegt hat, u. die Ord. die entsp. leb. Kraft. αbcS sei die Curve, welche das Gesetz darstellt, nach welchem sich der Druck des Motors auf den Zeiger ändert.
abcd soll das Gesetz darstellen, nach welchem sich der auf d. Zeigerpkt. reduc. Widerst. der Masch. ändert.
Wir wollen diese Curven der Kürze halber mit J, P u. K bezeichnen, um damit anzuzeigen,

ein druck anzuzeigen, daß sich die erste auf die Geschw., die zweite auf die Kraft, die 3te auf den Widerstand bezieht.

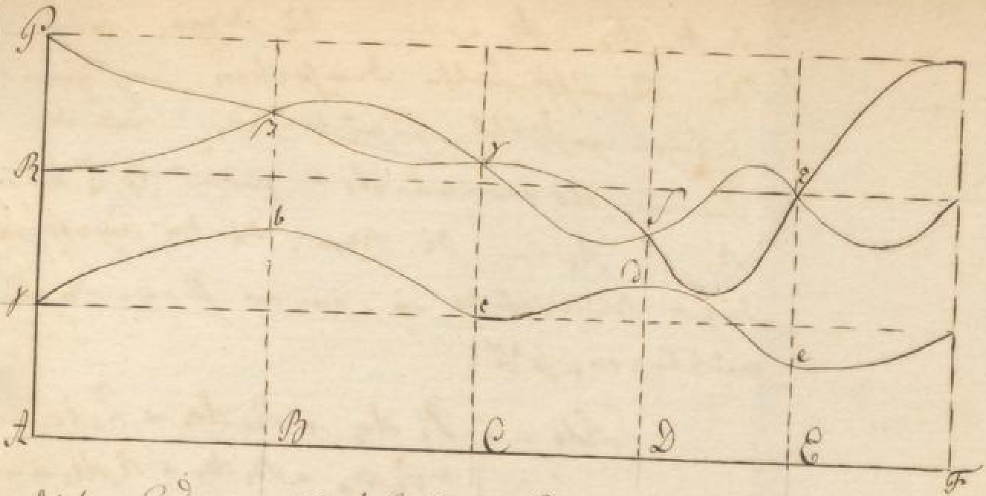
Von A bis B ist P > K u. die lebendige Kraft nimt daher immer zu. In B beginnt K > P zu werden, die Curven K u. P durchschneiden sich daher in b u. d. leb. Kraft ist bei B ein Maximum. Wenn der Körper den Weg AC zurückgelegt hat, tritt das Minim. der leb. Kraft ein. Von B bis C ist fortwährend K > P, bei C ist K = P; von C bis D ist P > K; die leb. Kraft wächst daher wieder, u. bei D haben die Kraft, der Widerstand u. die leb. Kraft dieselben Werthe wie bei A.

Da die Wirk. d. Kraft u. d. Gegenwirk. des Widerstands für einen jeden Punkt gleich sein müssen, so müssen die Flächenräume der Figuren AabcdD u. AabcD gleich groß sein, es muß daher sein:

$$\text{fläche } \alpha a b + \text{fläche } c d \delta = \text{fläche } b m c n.$$

Man würde sich sehr irren, wenn man glaubte, daß das Max. der leb. Kraft in dem Momente eintreten müßte, wenn P – K den größten Werth, u. das Minim. wenn P – K den kleinsten Werth hat. Die Minima u. Max. treten ein, wenn P = K ist, wie wir früher gesehen haben, u. wie auch die Fig. erweist.

227.



Diese Curve zeigt das Bewegungsgesetz innerhalb einer Periode, von 2 Minim. u. Maxima.

Nennen wir l den Weg, den der Zac. in der Periode zurücklegt, so ist $\int_0^l Pds$ die u. $\int_0^l Rds$ die Gegenwirk. des auf den Zac. reduc. Gesamtwiderstandes u. die Bedingungsgleichung der period. Bewegung ist:

$$\int_0^l Pds = \int_0^l Rds, \text{ und } \frac{\int_0^l Pds}{l} = \frac{\int_0^l Rds}{l}.$$

Bei einer Masch. mit period. Bewegung ist daher der mittlere Druck des Motors reduz. Zac. gleich dem mittleren auf den Zac. reducirten Widerstand der Maschine.

Nennen wir R_0, R_1, R_2 ... die verschied. Nebenwiderstände u. K_0, K_1, K_2 ... die Hauptwiderstände der Masch., durch deren Überwindung die nützliche Arbeit hervorgeht. Ferner dx_0, dx_1, dx_2 ...

(w)

u. $dr_0\ dr_1\ dr_2 \dots$ die Wege, welche die Angriffspunkte derselben, auf ihren Richtungen geschätzt, zurücklegen, wenn der Zeiger um ds fortrückt. Endlich $l_0\ l_1\ l_2 \dots$ $r_0\ r_1\ r_2 \dots$ die Wege, die die Angriffspunkte dieser Widerstände in einer Periode zurücklegen, so ist:

$$K\,ds = \begin{cases} Q_0\,dr_0 + Q_1\,dr_1 + Q_2\,dr_2 + \dots \\ + R_0\,dr_0 + R_1\,dr_1 + R_2\,dr_2 + \dots \end{cases}$$

$$\int_0^{l} K\,ds = \begin{cases} \int_0^{l_0} Q_0\,dr_0 + \int_0^{l_1} Q_1\,dr_1 + \int_0^{l_2} Q_2\,dr_2 + \dots \\ + \int_0^{r_0} R_0\,dr_0 + \int_0^{r_1} R_1\,dr_1 + \int_0^{r_2} R_2\,dr_2 + \dots \end{cases}$$

Die erste dieser Gleich. bestimmt den auf den Zeiger reducirten Widerstd K, die letztere zeigt, daß die Gegenwirkung des Gesammtwiderstandes K gleich ist der Summe der Gegenwirkungen aller Partialwiderstände.

Vergleichung der Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustande, mit den Masch., die einen periodischen Beharrgszustand annehmen, hinsichtlich der Art, wie sie den Effect übertragen.

Bei den Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustande ist (in diesem Zustand) die auf den Zeiger wirkende Kraft in jedem Augenblicke der Bewegung mit den Widerst. im Gleichg., u. d. Beweg. der Masch. erfolgt so, als wirkten gar keine Kräfte auf sie ein. der Druck des Motors auf den Zeiger wird durch den auf d. Zei. reduc. Gesammtwiderstd der Masch. u. die Geschwg. im Beharrgszstd, durch die Quantität des wirksamen Motors bestimmt.

Die Massen der Masch. haben nur einen Einfluß auf die Zeit, nach welcher der Beharrgszust eintritt. die Geschwind. in diesem Zustd. ist aber von den Massen der Masch. ganz unabhängig.

Bei diesen Maschinen wird in jedem Zeitmoment von d. sämtl. Widerständen

eine ebensogroße Wirkung abge- 230.
geben als der Recep. empfängt. Aus der
Maschine fließt also sozusagen in jedem Augen-
blick eine ebensogroße Wirkung ab, als jene
ist, welche hineingeleitet wird. Die Art
u. Weise, wie diese Maschine diese Wirkung,
welche der Rec. empfängt an die arbeitende
Stelle überträgt, kann man sich durch die Be-
wegung des Wassers eines Flusses veranschaulichen,
der durch einen See geht. Hat der See einen
gleichförmigen Wasserzufluß, so fließt in jed.
Augenblick ebensoviel Wasser aus demselben,
als in den Augenblick hineinfließt u. die
Wassermenge des Sees bleibt ungeändert.

Bei einer Maschine mit period. Bewegungszustand gibt diese immer in jeder Periode
eine ebensogroße Wirkung ab, als sie
während einer Periode empfängt. Wenn sie
mehr empfängt als sie abgibt, sammelt sich der
Unterschied in der Masse der Masch. an, ihre
leb. Kraft, od. ihre Wirkungsfähigkeit nimmt zu,
u. zwar gerade um ebensoviel als
der Unterschied zwischen d. empf. u. abgegeb.
Wirkg. beträgt. Wenn sie mehr abgibt
als empfängt, geschieht dies auf Unkosten
der lebendigen Kraft der Masse, indem
ihre Wirkungsfähigkeit um ebensoviel ab-
nehmen muß, als die Differenz zwischen

231. der abgegeb. u. empf. Wirkg beträgt.

Bei diesen Masch. haben d. Massen nicht nur einen Einfluss auf die Zeit, welche verfließt, bis der Beharrungszustand eintritt, sondern auch auf den Grad der Ungleichförmigkeit der Bewegung im Beharrungszustande. Ja selbst die Wirkung, welche d. Rec. innerhalb einer Periode empfängt, hängt von den Massen der Maschine ab. Nur die Differenz zwischen der während einer ganzen Periode empfangenen u. abgegeben Wirkung ist von den Massen unabhängig u. immer gleich 0, wenn durch die Vergrößerung der Massen die Widerstände der Maschine nicht geändert werden.

Bei diesen Maschinen ist der Druck P des Motors auf den Recept. nicht in jed. Augenblick gleich dem Widerstande R, sond. bald größer, bald kleiner als dieser Widerstand. Dagegen ist der mittlere Druck: $\frac{\int_0^l P ds}{l}$, der auf den Rec. wirkt, gleich dem mittleren Widerstand $\frac{\int_0^l R ds}{l}$, welcher dem Recept. entgegen wirkt.

Nennt man t die Zeit einer Periode, so ist der mittlere Effekt, welcher in jeder Sec. dem Recept. mitgetheilt wird, gleich $\frac{1}{t}\int_0^l P ds = \frac{1}{t}\int_0^l R ds$ demnach auch:

$$\frac{\int_0^l P\,ds}{t} = \frac{\int_0^l R\,ds}{t} = \frac{\int_0^{l_0} Q_0\,dr_0}{t} + \frac{\int_0^{l_1} Q_1\,dr_1}{t} + \frac{\int_0^{l_2} Q_2\,dr_2}{t} \ldots$$

d. h. es ist der mittlere Effekt, welchen der Recept. empfängt, gleich der Summe der mittleren Effekte sämmtlicher Widerstände.

Beide Arten von Maschinen übertragen also die ihnen mitgetheilten Effekte an die verschied. Widerstandspunkte, ohne im Stande zu sein, aus sich selbst einen Effekt zu produciren. Es liegt also in keiner Maschine ein aktives Princip, sondern dieses ist nur in dem Motor vorhanden. Die Mechanismen der Maschine sind ebenso wenig im Stande eine Wirkung zu produciren, als die Röhren einer Wasserleitung Wasser zu erzeugen.

Der mittlere Druck und die mittlere Geschwindigkeit des Receptors.

Der mittlere Druck des Motors auf den Recept. richtet sich bei der zweiten Art v. Masch. nach dem mittl. auf d. Rec. reduc. Gesammtwiderstand u. die mittl. Geschwind. d. Rec. wird durch die Leistung der auf denselb. einwirkenden motorischen Thätigkeit bedingt.

Wenn z. B. bei einer Mahlmühle, die vermittelst eines unterschlächt. Wasserrades bewegt wird, continu. eine gewisse Wassermenge einwirkt, so tritt nach einiger Zeit d. Beharrungszst. ein, u. in diesem ist der Druck des Wassers auf die Schaufeln genau gleich dem ges. auf d. Schaufeln reduc. Widerstand der Masch. Läßt man nun zweimal so viel Wasser wirken auf das Rad [illegible], so wird die Geschw. der Masch. zu bis neuerdings ein Beharrgszstd eintritt. In diesem ist aber der Druck des Wassers genau ebensogroß als in d. erstern Fall, obgleich nun die doppelte Wassermenge auf das Rad wirkt.

Gleiches zeigt sich auch bei einer Dampfmaschine, wenn z. B. jene Mahlmühle durch Dampf getrieben wird u. es wird in dem Kessel in jeder Sec. 1 ℔ Wasser in Dampf verwandelt, so tritt ein Beharrgszst. ein, in welch. d. mittlere Druck d. Dampfes gegen den Kolben dem gesammten auf denselben reducirten Widerstand gleich ist, u. der Kolben wird eine Geschw. annehmen, so daß das vom Kolben per 1'' beschriebene Volumen, gleich Dampf-Vol. ist, welches ein ℔ Dampf bei einer Spannung die im Cylinder herrscht, gleich ist. Wenn nun im Kessel stärker geheizt wird, u. z. B. in jeder Sec. 2 ℔ Wasser in Dpf verwandelt werden, so wird nach einiger Zeit wieder einer ein neuer Beharrungszustand eintreten, in welchem aber die Spannung d. Dampfes genau ebenso groß ist als im ersten. Dagegen wird nur die mittlere Geschwind. des Kolbens ungefähr doppelt so groß sein. Man mag also auch so viel Dampf erzeugen, so wird dies (wenn d. Beharrungszustand eingetreten ist) keinen Einfluß haben auf die Spannung des Dampfes, also keinen auf den Druck der auf den Kol. (den Kolben) wirkt indem dieser immer dem mittleren Widerstande gleich bleibt, dagegen wird aber die mittlere Geschwind. des Kol. zunehmen, um je größere Quantitäten mot. Substanz auf denselben einwirkt.

Es ist der mittlere Effekt, welcher dem Kolben mitgetheilt wird

$$= \frac{\int_0^l P\,ds}{t} = \frac{\frac{1}{l}\int_0^l P\,ds}{\frac{t}{l}} = E\mathfrak{P},$$ wenn der mittlere Druck $\frac{1}{l}\int_0^l P\,ds = \mathfrak{P}$ u. die mittlere Geschwind. $= \frac{l}{t} = E$ gesetzt wird.

Der mittlere Druck, d. dem Kol. mitgetheilt wird, ist also gleich dem Produkt aus dem mittleren Druck des Motors auf den Kol. u. die mittl. Geschw. desselben.
Der mittl. Druck hängt nur von der gegeb. Einrichtung, von dem ganzen Zuschnitt u. von den Widerständen ab, welche der Bewegung entgegen wirken; ist aber unabhängig von der Quantität der motor. Substanz, d. auf d. Masch. wirkt. Dagegen wird die mittlere Geschw. E durch diese Geschwindigkeit zunächst bestimmt.

Die Massen
als
Regulatoren der Bewegung.

Bei der Construction einer Masch. wird verlangt, daß ein Mechanismus, dessen Zusammensetzung gegeben, od. nach der Natur der auszuführenden Operation ermittelt worden ist, auf eine vorgeschriebene Weise bewegt werde. Die Curven, welche die Punkte beschreiben u. d. Verhält. der Geschwind. der einz. Punkte werden schon durch den genannten Zus. bestimmt. Damit aber eine Masch. vollk. ihrem Zwecke entspreche, wird ferner verlangt, daß ihre absoluten Geschwind. eine gewisse Größe habe. Die Beweg. der Masch. ist also in aller u. jeder Beziehung vorgeschrieben u. die Umstände (vorzüglich der Kräfte u. Massen) müssen bestimmt werden.
Das Problem der Constr. ist also gerade das Gegentheil von dem Problem der Physik u. Astronomie, bei welcher verlangt wird, die Beweg. v. Massen zu berechnen, auf welche gegebene Kräfte einwirken. Hier sind die Kräfte u. Massen gegeben u. die Gestalt der Bahnen, der einzelnen Punkte, so wie ihre Geschwind. müssen ausgemittelt werden; dort sind die Bahnen u. die Geschwind. gegeben u. die

Kräfte, so wie auch die Massen müssten bestimmt werden.

Um eine genau bestimmte Beweg. u. Effekten hervorzubringen, sind die Massen sehr nothwendig. Bei einer Masch. mit gleichförm. Beharrungszustand hätten zwar die Massen der Maschine (als solche) keinen Einfluss auf die Bewegung im Beharrungszust., wenn in der That immer gleich viel motor. Arbeit auf den Bew. einwirkt u. die Widerstände von den verarbeitenden Arbeiten vollkommen unverändert bleiben. Allein in der Wirklichkeit ist dies nur annäherungsweise der Fall.

Wenn nun eine Änderung in der Wirkung d. Motors od. in den Widerständen zufällig eintritt, so wird die Geschw. der Maschine grösser od. kleiner werden, als sie im Beharrungszustande ist, u. da es sowohl für die Benützung des Motors als für die Thätigkeit der Werkzeuge nachtheilig ist, wenn sich die Geschwind. von der vortheilhaften (welche im Beharrungszustand vorhanden sein soll) entfernt; so muss man Mittel anwenden um jede merkliche Abweichung von jener vortheilhaftesten Geschwind. zu beseitigen. Dies geschieht aber durch die Massen der Maschine; denn je grösser die Massen sind, (od. genauer gesprochen, je grösser die auf den Zapfen reducirte Masse ist) desto kleiner wird die Änderung der Geschwind. ausfallen, wenn

237. Kraft u. Widerstand sich auf einige Zeit nicht das Gleichgewicht halten

Nennen wir für eine Maschine, die einer gleichförmigen Umdrehungsbewegung fähig ist, V die Geschw. des Zeigers, u die Geschw. irgend eines Massenpunktes, so ist $\frac{u}{V}$ nur allein von den constanten Abmessungen der Maschinenbestandtheile u. denjenigen Abmessungen abhängig, die den Ort des Punktes, dessen Geschw. u ist, in dem Körper, welchem er angehört, bestimmen. Setzen wir $\frac{u}{V} = i$, so ändert sich i nicht mit der Zeit, sondern nur, wenn man zu einem andern Punkte der Masch. übergeht. Für eine solche Masch. ist daher die leb. Kraft

$$\int mu^2 = \int mV^2 i^2 = V^2 \int mi^2$$ u. es ist $\int mi^2$ die auf den Zeiger reducirte Gesammtmasse. Nennen wir wie früher P den Druck des Motors auf den Zeiger; R den Gesammtwiderstand der Masch. auf d. Zei. reduc.; c die Geschw. des Zei. im Anfangszustd; v die Geschw. dieses Punktes, nachdem durch einen Weg s die Kraft P mit dem Widerstand R nicht im Gleichgewicht geblieben ist, so hat man:

$$\int_0^s (P-R)ds = v^2 \int mi^2 - c^2 \int mi^2$$ mithin

$$v^2 - c^2 = \frac{\int_0^s (P-R)ds}{\int mi^2}$$

Aus dies. Gleich. ersieht m. (was auch schon vorher ich) daß die Änderung der Geschw. der Masch. die entsteht, wenn für einige Zeit die Kraft P u. der Widst. R nicht gleich groß sind, von den Massen der Maschine abhängt. Sind die Massen groß so fällt jene Änderung klein aus; sind die Massen klein, so wird sie groß. M. sieht also, daß selbst bei dieser Masch. die Massen als Regulatoren dienen. Weil aber bei denselben nur sehr kleine Schwankungen in dem Werthe von P u. R vorkomm., so bilden die zur Herstellung des gewünschten Geschw. nöthigen Bestandtheile schon eine hinreichend regulirende Masse. Nur in dem Fall, wenn ein sehr hoher Grad von Gleichförmigk. verlangt würde, ist es nothw. zu jenen vorerwähnten Massen noch eine besondere hinzuzufügen, u. dies geschieht gewöhnlich durch ein sogenanntes Schwungrad.

Bei einer Masch. mit period. Bewegung liegt es in der Regel in dem Wesen derselben, daß nicht alle Punkte gleichzeitig mit gleichförmiger Geschw. sich bewegen können. Bei der Construkt. dieser Masch. sucht man nur soviel daß wenn ein gewisser Hauptpunkt mit einer gewissen gleichförm. Geschw. sich bewegt, die Werkzeuge u. den Zweck. ihre Funktion am zweckmäßigsten verrichten. Wollte m. diese

Unterbrechung nicht machen, so würde die Geschwindigkeit außerordentlich verschieden. Um nun in jener Hauptwelle eine möglichst gleichf. Energie hervorzubringen, wenn auch abwechselnd $P_y R$ u. $P_x R$ ist, versieht man sie mit einem Schwungrade, welches man so groß macht, daß die lebendige Kraft desselben die Summe der lebendigen Kräfte aller übrigen Massen überwiegt.

Um den Einfluß eines solchen Schwungrades auf die Energie der Masch. zu bestimmen, setzen wir:

P den Druck des Motors auf den Zapfen.

R den Widerstand der Maschine auf d. Zap. reduc.

θ_0 die Winkelgeschw. des Schwungrades in irgend einem Zeitmoment einer der Perioden.

θ_1 .. .. in irgend einem andern Zeitmoment der Periode.

φ_0 den Winkel, den ein mit d. Rad beweglicher Radius mit einer Achsenlinie bildet, wenn die Winkelgeschw. θ_0 ist.

φ_1 den analogen $\angle$ für die Geschw. θ_1.

φ u. θ die ähnlichen Größen bei irgend einem Zeitmomente innerhalb derjenigen, in welchen θ_0, θ_1, φ_0 u. φ_1 gelten.

Sey $\Sigma m r^2$ das Moment der Trägh. des Schwungrads.

v die Geschw. irgend eines Massentheilchens der ganzen Masch.

ds den Weg, den der Zap. zurücklegt, wenn sich das Schwungrad um $d\varphi$ weiter bewegt.

Diese Winkelgeschwindigkeit ist $\frac{v}{\theta}$ eine Funkt. von φ
u. von den const. Abmessungen der Maschinentheile.
Setzen wir also:

$$\frac{v}{\theta} = f(\varphi) \; ; \quad v = \theta f(\varphi).$$

Ferner ist $\frac{ds}{d\varphi}$ eine ganz andere Funkt. von φ.
Wir können demnach setzen:

$$\frac{ds}{d\varphi} = F(\varphi) \; ; \quad ds = F(\varphi)\, d\varphi$$

Die leb. Kraft aller Massen, mit Ausnahme der Masse des Schwungrades, wird nun ein Ausdruck von der Form:

$$\sum m\, \theta^2 (f(\varphi))^2 = \theta^2 \sum m (f(\varphi))^2$$ sein müssen.

Wir erhalten daher:

Lebendige Kraft der Masse des Schwungrades $= \theta^2 \int \rho^2 dm$

" " aller übrigen Massen $= \theta^2 \sum m (f\varphi)^2$

totale lebende Kraft . . . $= \theta^2 \{\int \rho^2 dm + \sum m\, (f\varphi)^2\}$

Änderung der lebenden Kraft des ganzen Systems während die Geschw. θ von θ_0 in θ_1 übergeht:

$$\theta_1^2 \{\int \rho^2 dm + \sum m (f\varphi_1)^2\} - \theta_0^2 \{\int \rho^2 dm + \sum m (f\varphi_0)^2\} =$$

$$= (\theta_1^2 - \theta_0^2) \int m \rho^2 dm + \theta_1^2 \sum m (f\varphi_1)^2 - \theta_0^2 \sum m (f\varphi_0)^2$$

Wirkung der Kraft P innerhalb dieser Zeit $= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} P\, F(\varphi)\, d\varphi$

" des Widerstds R . . . . . $= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} R\, (F\varphi)\, d\varphi$

Nach dem Grundsatze der leb. Kräfte hat m. also

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (P-R)(F\varphi)\,d\varphi = (\theta_1^2-\theta_0^2)\,S\rho^2 dm + \theta_1^2 \sum m (f\varphi)^2 - \theta_0^2 \sum m (f\varphi)^2$$

u. hieraus folgt:

$$\theta_1^2-\theta_0^2 = \frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}(P-R)(F\varphi)\,d\varphi - \left[\theta_1^2\sum m (f\varphi)^2 - \theta_0^2 \sum m (f\varphi_0)^2\right]}{S\rho^2 dm}$$ oder auch

$$S\rho^2 dm = \frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}(P-R)(F\varphi)\,d\varphi - \left[\theta_1^2\sum m (f\varphi_1)^2 - \theta_0^2 \sum m (f\varphi_0)^2\right]}{\theta_1^2-\theta_0^2}$$

Hieraus sieht m., daß die Änderung der Winkelgeschwind. der Schwungr. beliebig klein gemacht werden kann, wenn das Trägheitsmoment hinlänglich groß gemacht wird; man kann also die Bewegung der Hauptwelle durch Schwungmassen regulieren u. dadurch die Bedingung eines gleichförmigen Bewegungszustandes dieser Welle mit jeder belieb. Genauigkeit erfüllen.

Berechnung der Schwungmasse für eine Maschine mit period. Beharrungszustande.

Vermittelst der zuletzt gefund. Gl. kann m. das Trägheitsmoment berechnen, welches ein Schwungrad besitzen muß, um einen bestimmten Grad der Gleichförmigkeit zu erhalten in der Bewegung der Schwungradwelle. Nehmen wir an, daß nach jeder halben Umdrehung des Schwungrades-eine neue Periode beginnt u. wenn wir den $\angle \varphi$ vom Anfang der Periode an, so ist vom Anfang d. Periode $\varphi = 0$, u. am Ende $\varphi = \pi$.

Da im Beharrungszustand der Bewegung die Wirkung welche der Zeiger in einer Periode empfängt, gleich der Gegenwirkung des totalen Widerstandes ist, so hat man die Bedingungsgleichung:

$$\int_0^{\pi} P\, F(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\pi} R\, F(\varphi)\, d\varphi \quad \ldots (1.)$$

Diese Gl. folgt aus der früher aufgestellten: denn da die Geschwind. am Anfg. u. am Ende einer u. derselben Periode gleich groß sein sollen, so ist, wenn wir θ_0 die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades für den Anfang der Bewegung nennen, für $\varphi = 0$, $\theta = \theta_0$, u. für $\varphi = \pi$, θ ebenfalls $= \theta_0$; ferner auch sein:

$$f(\varphi) = f(\pi), \text{ es ist daher:}$$

$$\theta_1^2 \sum m (f\pi)^2 - \theta_0^2 \sum m (f\varphi)^2 = 0$$

$$\theta_1^2 - \theta_0^2 = 0$$

od. die Gleich. (A) verwandelt sich demnach in (1.).

Die allgemeine Gleich. der Beweg., wenn der $\angle \varphi$ zurückgelegt worden, ist folgende:

$$\int_0^{\varphi} (P-R)\, F(\varphi)\, d\varphi = (\theta^2 - \theta_1^2) \int \varrho^2 dm + \theta^2 \sum m (f\varphi)^2 - \theta_0^2 \sum m (f\varphi)^2$$

Differentiiren wir diese Gleichung, so ergibt sich:

$$(P-R)\, F(\varphi)\, d\varphi = 2\theta\, d\theta \int \varrho^2 dm + 2\theta\, d\theta \sum m (f(\varphi))^2 + \theta^2\, d.\frac{\left(\sum m (f\varphi)^2\right)}{d\varphi}.\, d\varphi \ldots (3.)$$

für das Maximum od. Minim. der Winkelgeschwind. ist $\frac{d\theta}{d\varphi} = 0$. Wir erhalten daher zur Bestimmung der φ, bei welchen die größten u. kleinsten Geschw. eintreten, folgende Gleich:

$$(P-R)\cdot F(\varphi) = \frac{\theta^2 d.\sum m\,(f(\varphi))^2}{d\varphi} \quad \ldots (4)$$

Man vermittelst dieser Gl. die Werthe von φ zu bestimmen, welche dem Max. od. Minim. der Geschw. entsprechen, müssen aber die größten u. kleinsten Geschwindigkeiten bekannt sein. Bezeichnen wir durch φ_m u. θ_m zusammengehörige ~~Werthe~~ Werthe von φ u. θ, so müssen φ u. θ_m so wohl der Gleich. (2) als auch der Gleich. (4) entsprechen, u. man erhält daher:

$$\int_0^{\varphi_m} (P-R)\, F(\varphi)\, d\varphi = (\theta_m^2-\theta_0^2)\tfrac{1}{2}\int \rho^2 dm + \theta_m^2 \sum m\,(f(\varphi_m))^2 - \theta_0^2 \sum m\,(f\varphi_0)^2.$$

$$(P-R)\cdot F(\varphi_m) = \theta_m^2\,\frac{d.\sum m\,(f(\varphi_m))^2}{d\varphi_m}$$

u. wenn man θ_m eliminirt:

$$\int_0^{\varphi_m}(P-R)(F\varphi_m)\,d\varphi = \frac{(P-R)\,F\varphi_m}{\frac{d.\sum m (f\varphi_m)^2}{d\varphi_m}}\cdot\left\{\tfrac{1}{2}\int\rho^2 dm + \sum m\,(f\varphi_m)^2\right\} - \theta_0^2\left\{\tfrac{1}{2}\int\rho^2 dm + \sum m\,(f(\varphi_0))^2\right\} \quad (5)$$

Diese Gleich. kann aber noch nicht zur Bestimmung der größten u. kleinsten Geschw. dienen, da in derselben die vom Anfang vorhandene unbekannte Winkelgeschw. des Schwungrades, d. h. die Geschw. mit welcher sich das Schwungr. gleichförm. bewegen müßte, um in der Zeitdauer der Periode eine halbe Umdrehung zu machen. Bevor wie diese Mittelgröße $\mathfrak{L}$, heißt:

$$(6.) \quad \ldots \quad \mathfrak{L} = \frac{\pi}{\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\theta}} \quad \text{od.} \quad \pi = \mathfrak{L}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\theta}$$

Es ist aber vermöge (2.)

$$(7.) \quad \ldots\ldots \quad \theta = \sqrt{\frac{\int_0^\varphi (P-R)\, F\varphi\, d\varphi + \theta_0^2\left(\Sigma_1 m\, (f\varphi_0)^2 + \int \rho^2 dm\right)}{\int \rho^2 dm + \Sigma_1 m\, (f\varphi)^2}}$$

Diesen Werth von θ in (6.) eingeführt, gibt:

$$(8.) \quad \ldots \quad \pi = \mathfrak{L}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{\left[\frac{\int_0^\varphi (P-R)\, F\varphi\, d\varphi + \theta_0^2\left(\Sigma_1 m\, (f\varphi_0)^2 + \int \rho^2 dm\right)}{\int \rho^2 dm + \Sigma_1 m\, (f\varphi)^2}\right]}}$$

Angenommen, daß die hier angedeutete Integration ausgeführt werden könnte, erhielte man eine Gleich., aus welch. θ_0 berechnet werden könnte, wenn $\int \rho^2 dm$ bekannt wäre. Das ist aber nicht der Fall, denn zum Behufe der Bestim. dieser Größe dient ja die ganze Untersuchung. Drücken wir uns aus (8.) den Werth von θ_0^2 berechnet, so wird derselbe als Function von $\int \rho^2 m$ erscheinen.

Bezeichnen wir durch α den $\measuredangle$, welcher dem absoluten Maxim. W u. durch β den $\measuredangle$, der dem absoluten Minim. der Mittelgeschw. entspricht, so erhalten wir vermöge (2.)

$$(9.) \quad \begin{cases} \int_0^\alpha (P-R)(F\varphi)\, d\varphi = (W^2-\theta_0^2)\int \rho^2 dm + W^2 \Sigma_1 m (f\alpha)^2 - \theta_0^2 \Sigma_1 m (f\varphi_0)^2 \\ \int_0^\beta (P-R)\, F\varphi\, d\varphi = (w^2-\theta_0^2)\int \rho^2 dm + w^2 \Sigma_1 m (f\beta)^2 - \theta_0^2 \Sigma_1 m (f\varphi_0)^2 \end{cases}$$

Die Differenz dieser zwei Gleich. gibt:

$$\int_0^{\alpha}(P-R)(F\varphi)\,d\varphi = (W^2-w^2)\int\rho^2 dm + W^2\Sigma m(f\alpha)^2 - w^2\Sigma m(f\beta)^2 \ldots 10.$$

Um den Grad der Gleichförmigk. der Bewegung festzusetzen, wird man die Differenz zwischen der größten u. kleinsten Winkelgeschw. angeben. Setzen wir also:

$$W - w = \varpi \ldots \quad (11.)$$

Die vier Gleich. (5, 8, 9, 11) enthalten die vollständ. Lösung der vorgelegten Aufgabe.

Durch Elimination von θ_0 aus (5) u. (8) erhält man eine Gleich. zwischen Sm u. $\int\rho^2 dm$.

Durch Eliminat. von θ_0 aus (8) u. d. beiden Gleich. (9) ergeben sich 2 Gleich. zwischen α, W u. $\int\rho^2 dm$ u. zwischen β, w u. $\int\rho^2 dm$ u. wenn aus diesen mit Berücksichtigung von (11) W u. w eliminirt wird, resultirt eine Gleichung zwischen α, β u. $\int\rho^2 dm$. Es ergeben sich also durch alle diese Eliminationen, vorausgesetzt, daß sie ausführbar waren, zwei Endgleichungen von der Form:

$$f(Sm, \int\rho^2 dm) = 0$$

$$F(\alpha, \beta, \int\rho^2 dm) = 0$$

oder weil der ersten dieser Gleich. die Werthe α u. β genügen müssten, so erhält man

$$f(\alpha, \int\rho^2 dm) = 0$$

$$f(\beta, \int \rho^2 dm) = 0$$

$$F(\alpha, \beta, \int \rho^2 dm) = 0$$

u. aus diesen 2 Gleich. lassen sich die Unbekannten α, β u. $\int \rho^2 dm$ bestimmen.

Annaeherungsmethode zur Bestimmung der Schwungmasse.

Wir werden uns die Arbeit sehr erleichtern, wenn wir annehmen, dass die grösste u. kleinste Winkelgeschw. um gleich viel von der mittleren abweichen. Diese Annahme kann man sich erlauben, da in der Anwendung überhaupt keine merkliche Ungleichförmigkeit gestattet wird. Setzen wir also:

$$W = \varepsilon + \frac{\varepsilon}{i} = \varepsilon\left(1 + \frac{1}{i}\right)$$

$$w = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{i} = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{i}\right)$$

wobei nun i eine Zahl ist, durch welche der Grad der Gleichförmigkeit der Bewegung bestimmt wird.

Dann erhalten wir zur Bestimmung von α u. β wegen (4) folgende Gleichgn:

$$(P-R)\,F(\alpha) = \varepsilon^2\left(1+\frac{1}{i}\right)^2 \cdot \frac{d.\left[\Sigma\, m\, f(\rho)^2\right]}{d\alpha}$$

$$(P-R)\,F(\beta) = \varepsilon^2\left(1-\frac{1}{i}\right)^2 \cdot \frac{d.\left[\Sigma\, m\, (f\rho)^2\right]}{d\beta}$$

u. die Gleich. (10) gibt dann:

$$\int_\beta^\alpha (P-R)\,F\varphi\,d\varphi = \frac{4\,\mathfrak{L}^2}{i}\,S\rho^2 dm + \mathfrak{L}^2\left(1+\frac{1}{i}\right)^2 \sum\nolimits_1 m\,(f\alpha)^2 - \mathfrak{L}^2\left(1-\frac{1}{i}\right)^2 \sum\nolimits_1 m\,(f\beta)^2.$$

u. hieraus folgt:

$$S\rho^2 m = \frac{i}{4\,\mathfrak{L}^2}\left\{\int_\beta^\alpha (P-R)\,F\varphi\,d\varphi - \mathfrak{L}^2\left[\left(1+\frac{1}{i}\right)^2 \sum\nolimits_1 m\,(f\alpha)^2 - \left(1-\frac{1}{i}\right)^2 \sum\nolimits_1 m\,(f\beta)^2\right]\right\}$$

Wenn die Massen der Maschinenorgane, die den gemeinschaftl. Zusammenhang bilden, sehr klein gegen die Massen des Schwungrades sind, so können wir:

$$\sum\nolimits_1 m\,(f\varphi)^2 = 0$$

setzen, u. dann erhalten wir zur Bestimmung von α u. β vermöge (4) die Gleich. $(P-R)\,F\varphi = 0$ u. zur Bestimmung von $S m \rho^2$ erhalten wir:

$$S\rho^2 dm = \frac{i}{4\,\mathfrak{L}^2}\int_\beta^\alpha (P-R)\,F\varphi\,d\varphi.$$

Vortheile, w. e. Schwungrad bei Maschinen gewaehrt, welche sehr ungleichformige wirkende Wiederstaende zu überwinden haben.

Bei vielen Operationen ist der Widerstand, den eine Masch. zu überwinden hat, bald sehr gross, bald sehr klein, oft sogar für längere Zeit = 0.

Diese Operat. erfordern im Ganzen oft keine sehr grosse Effekte, aber die Masch. muss im Stande sein, von Zeit zu Zeit einen sehr heftigen Druck auszuüben, od. innerhalb sehr kurzer Zeit eine sehr energische Wirkung hervorzubringen. Dies ist vorzüglich bei den meisten Bearbeitungen der Metalle der Fall. Bei dies. Masch. wird gewöhnl. schon der geometr. Zus.hg, so angeordnet, daß durch einen mässig starken Druck auf den Rezeptor, ein sehr heftiger Widerstand an den Angriffspunkten der Werkzeuge überwunden werden kann.

Versieht man aber eine solche Masch. mit einem Schwungrad, so gewinnt man mehrere sehr wesentliche Vortheile:

1.) kann man einen sehr continuirlich wirkenden Motor benützen, u. dessen Wirkung in der Zeit in welcher die Masch. nur einen geringeren od. keinen Widerstand zu überwinden hat,

249. durch das Schwungrad aufzuhalten leisten.

2tens ertheilt das Schwungrad der Masch. die Eigenschaft, daß sie für kürzere Zeit auch größere Widerstände zu überwinden im Stande ist, als wenn kein Schwungrad vorhanden ist. Denn vermag z. B. der Motor dem Receptor in jeder Sec. regelmäßig nur einen Effekt v. 75 K.m. ertheilt, so würde natürlich die Maschine ohne Schwungrad nur im Stande sein, einen Widerstand von 1000K zu überwinden. Versieht man sie aber mit einem Schwungrad, so wird m. es leicht dahin bringen, daß die Masch. einen Widerstand von 2000K bis 5000K u. auch mehr für kurze Zeit zu überwinden vermag. Dann braucht man die Masch. längere od. kürzere Zeit leer laufen zu lassen, bis sich eine hinreichend große Wirkungsfähigkeit im Schwungrade angesammelt hat.

3.) Kann m. mit derselben Masch. u. mit dem. vielleicht nicht sehr kräftigen Motor, Widerstände von sehr verschiedener Größe überwinden, wie aus den Walzwerken erhellt.

4tens wird durch das Schwungrad der Gang der Masch. regelmäßiger. Die Geschwind. des Zeugtheils entfernt sich nicht so viel von der vortheilhaftesten Geschwind.; eine gleich große Quantität motorischer Substanz wird daher der Masch. eine größere Wirkung ertheilen, d. h. es wird dadurch der Motor vortheilhafter benutzt werden. Die größte Wirkungsfähigkeit, die das Schaufelrad auszuüben vermag, wird durch die Geschwind. des Zuflusses bestimmt, bei welcher der Druck auf dasselbe ganz aufhört, od. mit den Widerständen, welche der Masch. entgegen wirken, ins Gleichgewicht gekommen ist.

Wenn z. B. die Masch. durch ein oberschlächt. Wasserrad getrieben wird, so ist die größte Geschw., welche die Schaufeln annehmen können, etwas kleiner als die Geschw. des Wassers. Bei einer Dampfmaschine wird die größte Geschw. des Kolbens sein, wenn die Spannung des Dampfes im Kessel nur noch etwas größer ist, als der Druck, welcher von Seite des Condensators od. von der atmosphärischen Luft der Bewegung des Kolbens entgegenwirkt.

Da es aber für die Benützung der Kraft, nicht gut ist, wenn die Geschw. des Schaufelrades zu sehr wächst, so muß sein Geschwindigkeitsmoment eine angemessene Größe haben, die sich auf folgende Weise berechnen

251. Beispl.

Die Masch. beginne immer nach Verlauf von T Sec. zu arbeiten u. arbeitet innerhalb jedes solchen Zeitintervalles durch t Sec. Zu Anfang der Zeiten T u. t ist das Max. u. am Ende der Zeit t das Minim. der Winkelgeschw. vorhanden.

Ersteres sei θ', letzteres θ u. die mittlere sei Ω.

Der Effekt, welchen per 1 sec. die Masch. vom Recept. empfängt, sei E.

Das Trägheitsmoment des Schwungrads sei $\Sigma r^2 m$.

Wenn wir annehmen, daß die Geschw. der Masch. sich nicht bedeutend von ihrer mittl. verhältnißmäßig entfernt, können wir die Wirkungen, welche die Masch. v. d. Motor empfängt, der Zeit proportional machen.

In der ganzen Periode empfängt die Masch. einen Effekt TE u. dieser Effekt wird, wenn wir von den Reibungen der Masch. abstr., in der Zeit t von den arbeitenden Punkten verrichtet.

Während der Zeit t empfängt aber die Masch. einen Effekt tE ~~u. dieser Effekt wird, wenn wir von den Reibungen der Maschine abstrahiren, in der Zeit t von den arbeitenden Punkten [illegible]~~. Es ist demnach:

(1.) $$T\mathfrak{E} = t\mathfrak{E} + (\theta_1^2 - \theta_0^2)\int \rho^2 dm.$$

Während der Zeit $T-t$ verliert die Masse keinen Effekt, empfängt aber eine Wirkung $= (T-t)\mathfrak{E}$, u. diese bewirkt eine Änderung $(\theta_1 - \theta_0)$ der Winkelgeschw. des Schwungradkranzes, man hat daher:

(2) $$(T-t)\mathfrak{E} = (\theta_1^2 - \theta_0^2)\int \rho^2 dm$$

welche Gleich. mit (1) identisch ist.

Aus (1) folgt nun:

$$\int \rho^2 dm = \frac{(T-t)\mathfrak{E}}{\theta_1^2 - \theta_0^2}$$

Setzen wir
$$\theta_1 = \varepsilon\left(1 + \frac{1}{i}\right)$$
$$\theta_0 = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{i}\right)$$

indem wir uns die Annahme erlauben, daß die mittlere Geschwind. mit dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(\theta_0 - \theta_1)$ aus der größten u. kleinsten Geschwind. übereinstimmt, was im allgem. nur annähernd der Fall ist, so erhalten wir:

$$\theta_1^2 - \theta_0^2 = \varepsilon^2 \frac{4}{i}$$

u. es wird: $$\int \rho^2 dm = \frac{\mathfrak{E}(T-t)}{4\varepsilon^2}\, i$$

das Trägheitsmoment, welches das Schwungrad erhalten muss, damit die Diff. aus der größten u. kleinsten Geschwind. nur das $\frac{2}{i}$ fache der mittleren Geschwind. betrage, ist also proportional:

1.) der Zeitdifferenz $(T-t)$, in welcher die Masch. nicht arbeitet.

2.) dem Effekt E, welchen die Masch. zu leisten hat.

3.) der Zahl i, welche den Grad der Gleichförm. bedingt, u. umgekehrt proportional dem Quadrat der mittleren Winkelgeschw.

Nennen wir Q das Gewicht des Schwungrades u. R den Halbmesser desselb., so ist näherungsw. $\int \rho^2 dm = \frac{Q}{2g}\cdot R^2$; wir erhalten daher auch:

$$\frac{Q}{2g}\cdot R^2 = \frac{(T-t)E}{4\mathcal{L}^2}\cdot i \text{ u.}$$

hieraus:

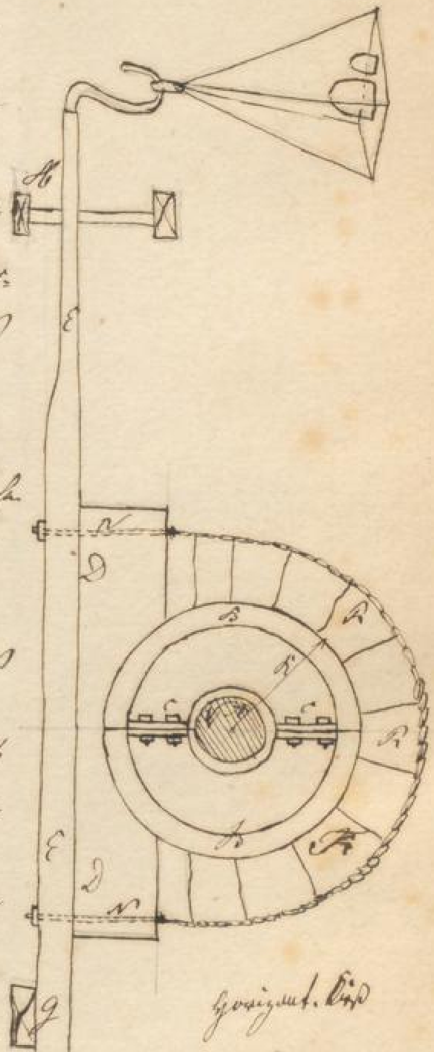
$$Q = \frac{(T-t)E g \cdot i}{2\mathcal{L}^2 R^2}$$

wodurch das Gewicht des Schwungrades bestimmt wird.

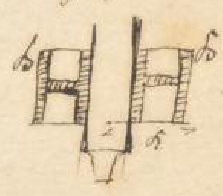
Lehre von der Anwendung des Dynamometers

Beschreibung des Dynamometers.

Auf die Welle A einer Maschine, wird eine zweitheilige (feste) Scheibe B von Holz B vermittelst der Schrauben C, C befestigt; darauf wird vermittelst des Balkens E E, der in Hinterstück F, ein nach der Scheibe geformtes Holz angepreßt. Bewegt sich nun die Welle durch Drehung um ihre Axe, so wird der Apparat die Bewegung mit zu machen geneigt sein, d. h. der Arm EE wird an den oberen Pflock H anschlagen, u. die Welle wird in Folge der Feinheit des Motors die Reibung überwinden. Auch durch die Keile u. Schraubenbolzen N, N, werden die Hölzer F an die Scheibe angepreßt. Legt man Gewichte in die Wagschale, so wird man es dahin bringen können, daß der Wagebalken wieder die horizontale Lage einnimmt.



Horizont. Schn.



Beispielsweise wurde ein solcher Versuch an der Hauptwelle einer Mahlmühle gemacht u. zu dem Ende mußte die Reibung

Verbindung des Zaumes mit den Wellzapfen aufgehoben werden.

Es sei R der Reibungswiderstand,

L die Länge des Hebelarmes am Wagebalken vom Mittelp. der Welle bis zum Aufhängepunkt der Wagschale.

Q das Gewicht auf der Wagschale.

q das Gewicht des Wagebalkens, des Holzes

q_1 das Gewicht der Wagschale u. der Schnüre.

l die Entfernung des Schwerpunkts des Wagebalkens u. der angeschraubten Holzstücke vom Mittelpunkt der Welle.

n die Anzahl der Umdrehungen der Welle in der Minute.

Es ergibt sich nun für die vorige Stellung:

$$rR = ql + (Q+q_1)L$$

$$R = \frac{ql + (Q+q_1)L}{r}$$

$$E^{km} = \frac{(ql + (Q+q_1)L) \cdot 2r\pi \cdot n}{r \cdot 60}$$

$$N \text{ (Anz. d. Pferdekräfte)} = \frac{E^{km}}{75} = \frac{2\pi}{60 \cdot 75} \cdot n(ql + (q_1+Q)L)$$

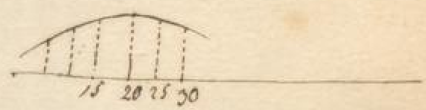
Wird durch ein G angehängte Gewichte der Schwerpunkt des Wagebalkens in die ~~Mitte~~ Axe der Welle gebracht, so fällt l weg u. es ergibt sich

$$N = \frac{2\pi}{60 \cdot 75} n(q_1 + Q)L$$

Theoretisch genommen ist K beliebig, aber in der Praxis erreicht es nur ?.

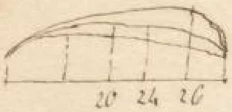
Erläuterungen über die Resultate die m. hiebei erhält.

Wenn der Wagebalken horizont. gestanden u. man schraubt den Zaum fest, so wird, ~~so wird~~ der Balken wieder oben anschlagen, u. das Rad langsamer gehen; man legt Gewicht in Wagsch. bis der Balk. wieder horizontal, beobachtet sich dies Gewicht u. die Anzahl der Umdrehungen. Auf ähnliche Weise stellt m. noch mehr Versuche an u. kann nun die erhaltenen Resultate graphisch darstellen, wenn m. nämlich einen Centimet. als Einheit nimmt, die Anzahl der Umdrehungen als Abscissen, u. die Effecte als Ordinaten aufträgt. Es würde sich z. B. ergeben daß bei 20 Umdrehungen ein Max. von Effect statt findet.



Ferner kann m. mit diesem Apparat untersuchen, bei welchen Wassermengen der beste Nutzeffect zum Vorschein kommt; gewöhnlich beträgt der Nutzeffect nur 20 bis 75 % des absoluten Effects, der von den Wassermengen u.

u. dem Gefälle abhängt. Man ersieht aus den Beobachtungen wiederum Curven, wobei der absolute Effect als Abscisse u. der Nutzeffect als Ord. aufgetragen sind. Aus allem dem geht hervor, wie wichtig dieser Apparat für genauere Untersuchungen der Wirkungen der Maschinen ist u. daß es allein hierdurch möglich, sich von der Richtigkeit einer Theorie u. ihrer Anwendbarkeit auf die Praxis, zu überzeugen.



M. Eigentlich sollten wir jetzt die Lehre von den Motoren u. Receptoren vornehmen; da aber letztere selbst schon Maschinentheile in sich schließen, deren Kenntniß vorausgesetzt werden muß, so gehen wir zunächst zur Theorie der einzelnen Maschinentheile über.

Hierbei dient als Grundlage die Lehre von der Festigkeit der Material. diese ist für den Maschinenbauer wichtig, weil er sonst entweder zu viel Masse, wodurch mehr Reibungen entstehen, verwendet, u. das [illegible] Material verschwendet; oder er hält die einzelnen Theile zu schwach, 261 was jedoch selten geschieht, wodurch die ganze Maschine un-brauchbar, leichter zerstörbar wird.

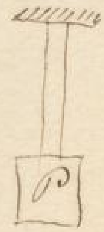
1.) Ueber die Ausdehnung u. das Zusammenziehen elast. Stäbe.

Ein Stab sei in verticaler Richtung oben befestigt u. trage unten ein Gewicht P. Es sei l seine Länge,

Ω der Querschnitt

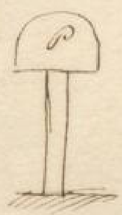
Δl die Verlängerung

ε der Elasticitätscoeffic.



Die Versuche zeigen, daß

$$\Delta l = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Pl}{\Omega} \qquad (0.)$$



Diese Formel gilt wenigstens innerhalb gewisser Grenzen auch für das Zusammenpressen.

Bei größeren Belastungen ist die Ausdehnung größer, als die Zusammendrückbarkeit.

Wenn man an einen solchen Stab ein Gewicht anhängt, so wird er sich ausdehnen; nimmt man es wieder weg, so zieht er sich wieder zusammen. Die Last, nach deren Wegnahme er seine ursprüngliche Gestalt vollkommen wieder annimmt, nennt man Elasticitätsgrenze; die

Belastung bei der ein Stab reißt, bestimmt seine absolute Festigkeit. Als Maßeinheit wird die Kraft in Kilogramm ausgedrückt, die an einem Stab vom Querschnitt eines Quadratcentimeters zu zerreißen nöthig ist.

Nennen wir z. B. die betreffende absolute Festigkeit eines Materials p, so ist für einen Körper vom Querschnitt Ω

$$P = p\Omega$$

NB. Beim Maschinenbau kann man gewöhnlich von dem Gewichte des Körpers abstrahiren.

Aus obiger Formel ergibt sich auch:

$$P = \frac{\varepsilon\,\Omega\,\Delta l}{l} = \varepsilon\,\Omega\,\frac{\Delta l}{l}$$

$$l = \frac{\varepsilon\,\Omega\,\Delta l}{P}$$

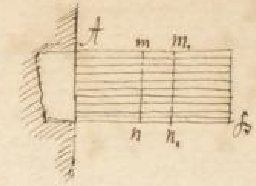
Relative Festigkeit

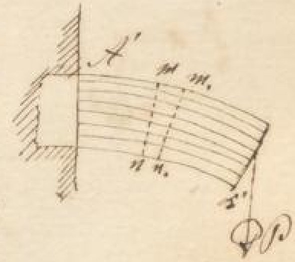
oder Festigk. gegen das Zerbrechen.

(S. Kayser Statik §§. 188 ....)

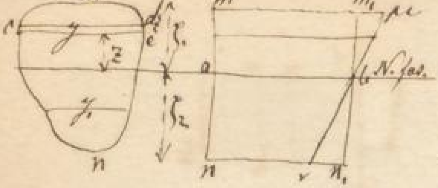
Das Zerbrechen kann auf mannigfaltige Weise geschehen; wir betrachten jedoch hier nur stabähnliche Körper.

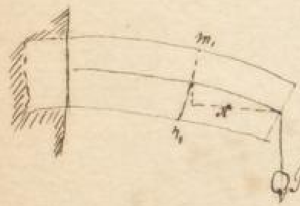
Ist ein in einer Wand befestigter Balken ursprüngl. horizontal, nimmt er durch Anbringung einer Last P die gekrümmte Gestalt A'B' an. Denkt m. sich nun diesen Stab in unzählige sehr kleine parallelepipedische Würfelchen od. Fasern zerlegt, so werden innerhalb der ursprüngl. ‖ Querschnitten mn, m_1n_1, nach der Biegung aber zusammenlaufenden Querschnitten, die Fasern sich theils ausgedehnt, theils verkürzt haben, u. weil deshalb P, es wird in einem Theil Kräfte geben, die die Moleküle zusammenzuziehen d. h. in ihre ursprüngliche Lage zurück zu bringen streben; im andern Theil aber werden abstoßende, auseinanderdrückende Kräfte wirken. Mit diesen beiden Arten von Kräften muß nun die Kraft P im Gleichgewicht sein. Offenbar muß es aber zwischen den beiden Theilen von Fasern eine geben, die unverändert geblieben u. diese nennen wir Neutralfaser.





Die Bedingungsgleichungen fürs Gleichgewicht sollen nun vermöge des Princips der virtuellen Geschwindigkeit hergeleitet werden.





Wir könnten zu dem Zwecke sehr mannig-
faltige Verschiebungen vornehmen;
doch nehmen wir nur zwei, wenn wir
uns folgendes vorausgeschickt haben:
Wir denken uns die übrige Masse des
Stabes starr u. nur innerhalb der beiden
Querschnitte die besprochenen Kräfte
thätig.

Ferner seien die Kräfte fürs Zusammen-
pressen ebensogroß als fürs Ausdehnen.

Ferner sind die Annahmen gemacht:

L die Länge des Stabes

$ce = y$

p die auf die Flächeneinheit des Querschn. bezogene Spannung, welche in dem ~~Schnitte~~ Punkte m_1 entspricht u.

π dies. auf die Flächeneinh. bezogene Spannung, welche dem Querschnitte $m_1 n_1$ entspricht.

Man hat daraus

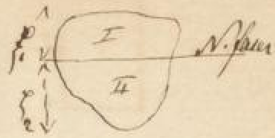
$$p : \pi = \zeta_1 : z$$

$$\pi = \left(\frac{p}{\zeta_1}\right) z \quad \text{u.}$$

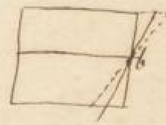
$$y\,dz\,\pi = y\,dz \left(\frac{p}{\zeta_1}\right) z$$

Wir verschieben nun das Ganze in
horizontaler Richtung nach der rechten Seite,

so daß also das virtuelle Moment von $P = 0$ ist; dagegen für die Kräfte im Querschnitt hat man:



$$\int_0^{\zeta_1} y\,dz\,\overset{(I)}{\left(\frac{p}{\zeta_1}\right)} z = \int_0^{\zeta_2} y_1\,dz\,\overset{(II)}{\left(\frac{p}{\zeta_1}\right)} z$$



$$\int_0^{\zeta_1} yz\,dz = \int_0^{\zeta_2} y_1\,z\,dz$$

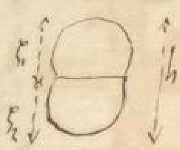
Ferner drehen wir das abgeschnittene Stück um den Punkt b, so werden die einen Fasern noch ein wenig ausgedehnt, die andern zusammengepreßt. Hierfür erhält man:

$$\int_0^{\zeta_1} y\,dz\left(\frac{p}{\zeta_1}\right)z^2 + \int_0^{\zeta_2} y_1\,dz\left(\frac{p}{\zeta_1}\right)z^2 = Px$$

$$\frac{p}{\zeta_1}\left\{\int_0^{\zeta_1} y\,dz\,z^2 + \int_0^{\zeta_2} y_1\,dz\,.\,z^2\right) = Px = M \quad (2)$$

d.h. die Summe der statischen Momente der Elasticitätskräfte muß immer gleich sein dem stat. Moment der Last P.

Unsere ferneren Untersuchungen werden sich nur auf stabförmige Körper beziehen, deren Querschnitte sich immer in zwei congruente Theile zerlegen lassen, so daß $\zeta_1 = \zeta_2 = \frac{1}{2}h$ ist:



$$\frac{p}{\zeta_1} = \frac{2p}{h}$$

$$\frac{2p}{h}\int_0^{\frac{1}{2}h} y z^2\,dz = Px \quad (3)$$

Für ein Parallelepiped hat man

$$M = \frac{4p}{b}\int_0^{\frac{b}{2}} a\, z^2\, dz$$

$$= \frac{p}{6}\, a\, b^2 \qquad (4)$$

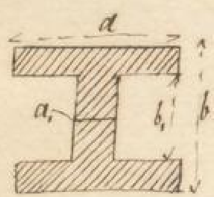
Für einen Körper, dessen Querschnitt ein Kreis, hat man, da

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - z^2$$

$$y = \sqrt{d^2 - 4z^2}$$

$$M = \frac{4p}{d}\int_0^{\frac{d}{2}} z^2\sqrt{d^2-4z^2}\, dz$$

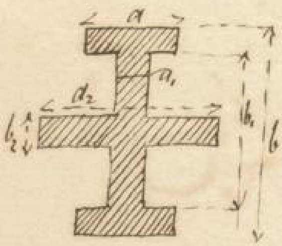
$$= \frac{p\pi}{32}\, d^3 \qquad (5)$$



Für nebenstehenden Querschnitt hat man:

$$M = \frac{4p}{b}\int_0^{\frac12 b_1} a_1 z^2 dz + \frac{4p}{b}\int_0^{\frac12 b} a\, z^2 dz$$

$$= \frac{p}{6b}\left\{a_1 b_1^3 + a(b^3 - b_1^3)\right\} \qquad (6)$$

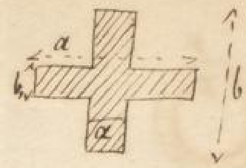


Für beistehende Fig. ergibt sich folgendes:

$$M = \frac{4p}{b}\left\{\int_0^{\frac12 b_2} a_2 z^2 dz + \int_{\frac12 b_2}^{\frac12 b_1} a_1 z^2 dz + \int_{\frac12 b_1}^{\frac12 b} a\, z^2 dz\right\}$$

$$(7)\quad M = \frac{p}{6b}\left\{a_2 b_2^3 + a_1(b_1^3 - b_2^3) + a(b^3 - b_1^3)\right\}$$

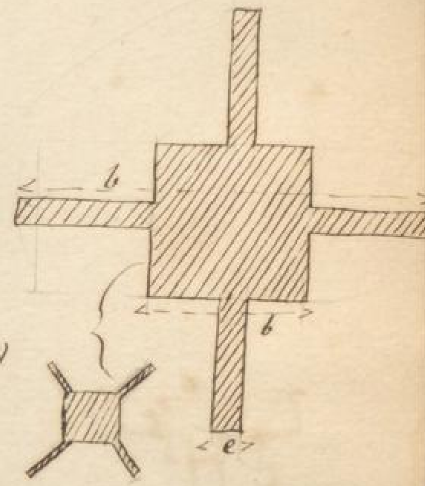
Für diesen Querschnitt hat m. nur in die vorige Formel zu substituiren:



$$\begin{array}{l|l} a = a & b = b \\ a_1 = a & b_1 \;\; b \\ a_2 = a_1 & b_2 = b_1 \end{array}$$

$$M = \frac{p}{6b}\left\{ a_1 b_1^3 + a(b^3 - b_1^3) \right\} \quad (8)$$

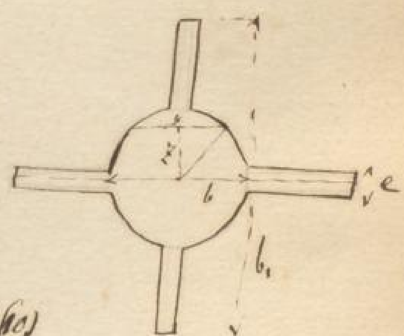
Für Stäbe von beistehendem Querschnitt ist:



$$M = \frac{4p}{b_1}\left\{ \int_0^{\frac{1}{2}e} b_1 z^2 dz + \int_{\frac{1}{2}e}^{\frac{1}{2}b} b z^2 dz + \int_{\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b_1} e z^2 dz \right\}$$

$$M = \frac{p}{6}\left\{ \frac{b^4 + (b_1^3 - b^3)e + (b_1 - b)e^3}{b_1} \right\} \quad (9)$$

Für Stäbe von diesem Querschnitt ist, da

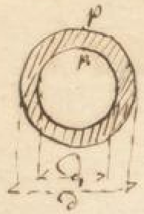


$$y = 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - z^2}$$

$$M = \frac{4p}{b_1}\left\{ \int_0^{\frac{b}{2}} 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - z^2}\cdot z^2 dz + \int_0^{\frac{1}{2}e} (b_1 - b) z^2 dz + \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b_1}{2}} e z^2 dz \right\}$$

$$M = \frac{p}{6}\left\{ 0{,}589\, b^4 + (b_1^3 - b^3)e + (b_1 - b)e^3 \right\} \quad (10)$$

Für einen hohlen Cylinder erhält man



$$M=\frac{4p}{Cd}\int_0^{\frac{1}{2}d}2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-z^2}\,.\,z^2dz-\frac{4p_1}{Cd_1}\int_0^{\frac{1}{2}d_1}2\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2-z^2}\cdot z^2dz$$

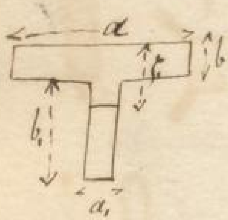
u. da $p : p_1 = d : d_1$

$p_1 = \frac{p d_1}{d}$ so ist

$$M=\frac{4p}{Cd}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}d}2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-z^2}\cdot z^2dz-\int_0^{\frac{1}{2}d_1}2\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2-z^2}\cdot z^2dz\right\}$$

$$M=\frac{\pi}{32}\;\frac{d^4-d_1^4}{d_1}\qquad(11.)$$

Für unsymmetrische Körper muss zuerst die Lage der Neutralachse bestimmt werden, hierfür z.B. die Entfernung derselben von der oberen Kante.



$$\zeta_1=\frac{1}{2}\;\frac{ab^2+a_1b_1^2+2a_1bb_1}{ab+a_1b_1}\qquad(12)$$

Es muss nun:

$$\int_0^{\zeta_1-b}a_1\,z\,dz+\int_{\zeta_1-b}^{\zeta_1}a\,z\,dz=\int_0^{b_1+b-\zeta_1}a_1\,z\,dz \quad \text{sein.}$$

$$M=\frac{p}{\zeta_1}\left\{\int_0^{\zeta_1-b}a_1\,z^2dz+\int_{\zeta_1-b}^{\zeta_1}a\,z^2dz+\int_0^{b_1+b-\zeta_1}a_1\,z^2dz\right\}$$

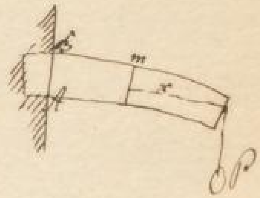
$$M=\frac{p}{3}\left\{\frac{a\zeta_1^3-(a-a_1)(\zeta_1-b)^3+a_1(b_1+b-\zeta_1)^3}{b_1+b-\zeta_1}\right\}\qquad(12')$$

Bestimmung der Bruchfläche oder des Maxim. der Spannung.

Es handelt sich hier bloß um Körpern von constantem Querschnitt.

Oben schon haben wir gesehen, daß man

$M = Px$ sei; aber bei Betrachtung aller aufgestellten Formeln sehen wir, daß p (die Spannung im Pkt m) überall als Factor erscheint, so daß also auch



$Px = p$ Funct. (der Querschnittsdimens.)

Da diese Function constant ist, so wird Px am größten, wenn x am größten; x erreicht aber bei (seinem Wachsen bis zur) der Ebene AB (Befestigungsebene) seinen größten Werth, folglich hat in dieser Fläche die größte Spannung statt, u. daher ist dies die Bruchfläche.

Um den Stab an dieser Stelle abzubrechen, muß daselbst die absolute Festigkeit des Materials überwunden werden. (Da aber hier zum Zusammendrücken eine größere Kraft erforderlich, als zum Auseinanderziehen, so ist im Allgem. auch eine größere Kraft als bloß zur Überwindung der ~~d~~ absoluten Festigkeit erforderlich.)

Es sei der größte Werth $p = K$, die Länge des Stabes $= c$, so ist:

$P c = k$ Funkt (der Querschnittsabmessungen).

Gewöhnlich will man aber wissen, welche Last, kann der Stab mit Sicherheit tragen, also fragt es sich, den wie vielten Theil der gemeinten größten Belastung kann m. ihm auf die Dauer auflegen!
Bei Guß u. Schmiedeisen weist man, daß es $\frac{1}{12}$ dessen; bei Holz $\frac{1}{20}$; bei Bauholz aber nie über $\frac{1}{30}$.
Gewöhnlich wird dem der Witterung ausgesetzten Holze vielleicht nicht mehr als $\frac{1}{100}$ aufgebürdet.
Nennen wir P die Belastung, welche wir einem Stabe wirklich auflegen, u. iP die Belast. bei welcher der Bruch erfolgt, so ist

$$\left.\begin{aligned} iPc &= k \text{ Fkt(Querschnittsabmess.)} \\ Pc &= \frac{k}{i} \text{ Fkt(....)} \end{aligned}\right\} (13)$$

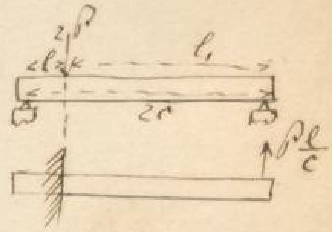
Für einen an beiden Enden unterstützten u. in der Mitte belasteten Balken kann m. die Sache auf den vorigen Fall zurückführen, wie folgt.
Nehmen wir eine Stütze weg u. bringen wir eine Kraft P aufwärts dafür an,

u. denken wir uns den Balken in der Mitte eingemauert, so haben wir

$Pc = iKc = k$ fest (der Ausschlagt-Abweich.)

$Kc = \frac{k}{i}$ fest (d. Aussch...) (14.)

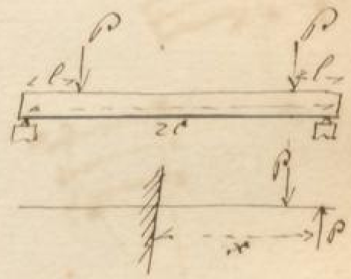
Wenn der auf beiden Seiten unterstützte Balken die Last nicht in der Mitte, sondern in der Entfernung l od. l_1 von den Stützpunkt. zu tragen hat, so erhält man



$\frac{Pl}{c} l_1 = k$ fest (d. Ausschlt.Abweich.)

$K\frac{l l_1}{c} = \frac{k}{i}$ fest. (d. Ausschlt.Abw.) (15.)

Fragen wir bei einer Belastung, wie sie die Figur zeigt, wie gross ist die Spannung in irgend einem Punkte? so ergibt sich



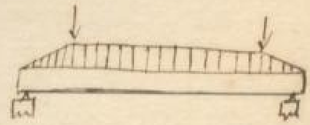
$Px - P(x-l) = \varphi$ fest (der Ausschlagbeanspr.)

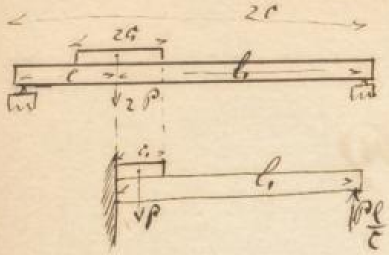
$Pl = \varphi$ fest (d. A. Abw.)

$Pl = k$ fest (...)

$Kl = \frac{k}{i}$ fest (d. A. Abweich.) (16.)

Wenn man die Spannungen graphisch darstellt erhält m. beistehende Figur.





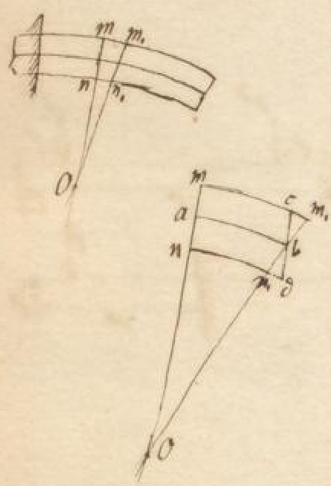
Für bestehenden Fall, wo die Belastung nicht in einem Punkt, sondern auf einer ausgedehnten Fläche ruht, hat man

$$M = \frac{Pl}{c} \cdot l_1 - \frac{Pc_1}{2}$$

$$= P\left(\frac{ll_1}{c} - \frac{c_1}{2}\right)$$

(17.) $Q\left(\frac{ll_1}{c} - \frac{c_1}{2}\right) = \frac{K}{i}$ Fst. (der Tragfähigkeit).

Untersuchungen über die Gestalt eines gebogenen Körpers.



Kennen wir die Gestalt der Neutralfaser, so ist das übrige auch bekannt. Trägt man die Neutralfaser ab, giebt das auch das Maß der ursprünglichen Länge der übrigen Fasern an. Ziehen wir durch b die Linie $cd \# mO$, so ist cm_1 die Größe, um die sich die obersten Fasern ausgedehnt; und das Stück, um das die untersten verkürzt wurden.

Es ist nun

$$\Delta\, Oab \sim bcm_1 \qquad \text{daher}$$

$$Oa : ab = bc : cm_1$$

und da $Oa = \rho$, dem Krümmungshalbmesser ist, bc nach der früheren Bezeichnung $= e_1$; auch: ./.

$$\rho : ab = \zeta_1 : cm_1$$

$$cm_1 = (ab)\frac{\zeta_1}{\rho}$$

früher hatten wir aber

$$\Delta l = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Pl}{\Omega} \text{, daher}$$

$$(cm_1) = \frac{1}{\varepsilon}(ab)p$$

weil $\frac{P}{\Omega}$ = der Spannung in der Flächeneinheit = p ist.

u. folglich $\frac{1}{\varepsilon}(ab)p = (ab)\frac{\zeta_1}{\rho}$ oder

$$\frac{p}{\zeta_1} = \frac{\varepsilon}{\rho}$$

führen wir diesen Werth von $\frac{p}{\zeta}$ in die Gleich. (2) u. (3) ein, so erhalten wir für einen Stab von irgend einem Querschnitt

$$\frac{\varepsilon}{\rho}\left\{\int_0^{\zeta_1} y z^2 dz + \int_0^{\zeta_2} y_1 z^2 dz\right\} = Px$$

$$\frac{2\varepsilon}{\rho}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}h} y z^2 dz\right\} = Px$$

Setzen wir $\int_0^{\zeta_1} y z^2 dz + \int_0^{\zeta_2} y_1 z^2 dz = \alpha$

u. $2\int_0^{\frac{1}{2}h} y z^2 dz = \beta$

so ergibt sich:

$$\frac{\varepsilon}{\rho}\alpha = Px$$

$$\frac{\varepsilon}{\rho}\beta = Px$$

Vorausgesetzt, daß α u. β d.h. daß die Querschnitte constant sind.

Wir wollen jetzt bloß die letztere in der Anwendung häufiger vorkommende Gleichung halten.

Zunächst, wissen wir, daß

$$\rho = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y}$$

Hiebei nehmen wir dx als constant an u. die Curve sei convex gegen die Abscissenachse, daher der Ausdruck negativ.

Nun ist $\frac{1}{\rho}\varepsilon\beta = -\frac{dx\,d^2y}{ds^3}\beta\varepsilon$ oder

$$Px = -\varepsilon\frac{dx\,d^2y}{ds^3}\beta$$

Die Integration würde auf Funkt. von besonderer Art führen, aber, da der Balken vorausgesetzt sich nur sehr wenig biegt, so dürfen wir $dx = ds$ setzen u. erhalten somit

$$Px = -\varepsilon\beta\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$Px\,dx = -\varepsilon\beta\,d.\frac{dy}{dx}$$

$$-\varepsilon\beta\frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2} + C \quad (n)$$

Für die Bestimmung der Constanten haben wir, da die Tgte an die Curve im Pkt b # der Abscissenachse, $\frac{dy}{dx}$ für den Pkt b $= 0$ u. $x = c$ der Länge des Stabes, folglich

$$0 = \frac{Pc^2}{2} + C$$ dies von (n) abgezogen

gibt $-\varepsilon\beta\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}P(x^2 - c^2)$ u. daraus

$$\frac{1}{2}P(x^2dx - c^2dx) = -\varepsilon\beta\,dy$$

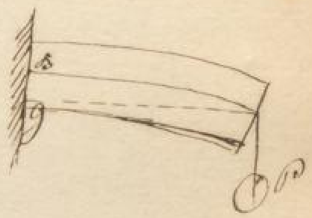
$$\frac{1}{2}P\left(\frac{x^3}{3} - c^2x\right) = -\varepsilon\beta y + C$$

für $x = 0$ ist $y = 0$, daher $C = 0$

$$y = \frac{P}{2\varepsilon\beta}\left(c^2x - \frac{1}{3}x^3\right) \quad \text{------} \quad (18)$$

Dies ist die Gleichung einer der elastischen Linien.

In der Anwendung kommt jedoch häufiger die Frage vor, welche Dimensionen muß man einem Balken oder Stab geben, damit er sich bei gegeb. Belastung nur um eine gewisse Größe senkt?

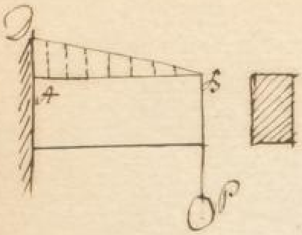


Setzen wir $BD = Y$, für $x = c$, so ist $y = Y$ u. daher

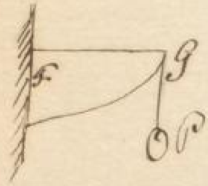
$$Y = \frac{P}{2\varepsilon\beta}\left(c^3 - \frac{1}{3}c^3\right) = \frac{1}{3}\frac{Pc^3}{\varepsilon\beta} \quad (19)$$

wenn nämlich der Querschnitt des Balkens constant ist, u. dann setzen wir auch, daß die Spannung dem Zuwachs der Länge proportional ist.

Über die Körperformen die in allen Querschnitten eine gleiche Festigkeit gegen das Zerbrechen darbieten.



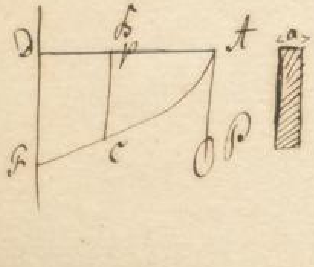
Für den Balken AB haben wir gefunden, daß die Spannung, od. die Kraft, welche den Balken abzubrechen strebt, wächst von B bis A, wie es die Ordinat. der geraden Linie BD darstellen. Folgt also offenbar je näher an A desto mehr od. je näher an B desto weniger Masse ist nothwendig u. man ist daher auf die Form gekommen, wie sie obige Fig. zeigt.



Wir haben aber gehabt

$$Px = p \text{ Stbl(der Querschnittsfläche)}$$

diese Gleich. bleibt auch für die neue Form, wenn die Linie als Spannungen u. Pressungen von G bis F proportional mit x wächst.



Nehmen wir AB = x, BC = y, AD = c, DF = b u. setzen wir voraus, daß p für jeden Pkt von AD dasselbe als constant sei, so erhalten wir aus Gleich. (14)

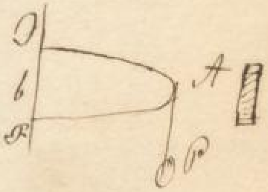
$$Px = \frac{p}{6} a y^2$$ folgende zeigts

zwischen x u. y :

$$y^2 = \frac{6P}{a\rho} x \qquad (20.)$$

welche die Gleich. der Curve darstellt, nach welcher der Balken od. Stab abgeschnitten, u. zwar ist es die Gleich. einer Parabel.

Nebenstehende Form kommt gewöhnlich bei hebelartigen Theilen; bei Balanciers, etc. Wir stellen nun die Frage, welche Dimensionen muß der Stab an der Befestigungsstelle DE haben?



Für diesen Durchschnitt hat man nur in die Formel (20) für $y = b$, u. $x = c$ zu substituiren, so ergibt sich:

$$b^2 = \frac{6P}{a\rho} c \qquad (21)$$

Hat man nun b, respect. den Durchschnitt, der zum voraus gewisse Verhältnisse bei verschied. Mater. zwischen der Höhe u. Dicke stets finden (z. B. bei Stein circa 1:2, 1:3, bei Gußeisen 1:5, 1:10, 1:16 Dicke : Höhe) so kann man zur Construkt. der Parabel übergehen.

Ein Zahlenbeispiel soll die Durchschnittsbestimmung vorerst näher beleuchten.

Es soll für einen Gußeisenmaßstab

$P = 5000$ Kgr., $c = 150^{ctm}$

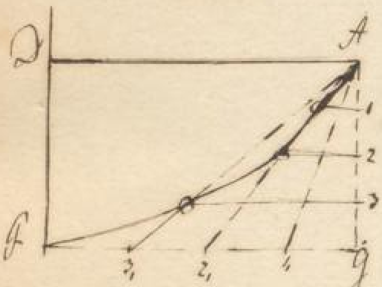
$p = \frac{a}{12} = 236$ sein, so hat man

wenn die Höhe $b = 12a$ angenommen wird:

$$144a^2 = \frac{6 \cdot 5000}{a \cdot 236} \cdot 150$$

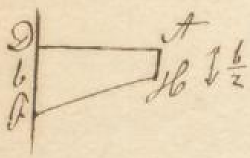
$$a^3 = \frac{30000}{144 \cdot 236} \cdot 150$$

$a = 5{,}02^{\text{Centim.}}$ u. $b = 62^{\text{ctm.}}$



Construction der Parabel.

Von D aus wird bis A die Länge u. bis F die Höhe aufgetragen, das Parallelogramm DG beschreiben; die Linie AG in beliebig viele gleiche Theile u. FG in ebensoviele unter sich gleiche Theile getheilt, dann die Punkte wie 1, 2, 3, mit A durch gerade Linien verbinden, aus den Punkten 1, 2, 3 ... # FG Linien gezogen, welche auf den vorigen Curvenpunkte abschneiden.



Da aber die Ausarbeitung nach einer genauen Curve oft zu umständlich wäre, so wählt man eine annähernde ferner, durch gerade Linien begrenzt, welche man erhält, wenn man an die Parabel im Punkt B eine Tangente zieht u. $\frac{b}{2}$ von A senkrecht aufwärts trägt.

Aus den beiden Gleich.

$$y^2 = \frac{6P}{a\beta} x$$

$$b^2 = \frac{6P}{a\beta} c$$

erhält man durch Division

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{c}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{c} x$$

eine Gleichung für die Parabel, deren Parameter durch die einfachen Dimensionen des Balkens od. Stabes gegeben ist.

Um jene Construct. als richtig nachzuweisen, welche wir oben als die gradlinige Begrenzungsform bezeichneten, erwägen wir nun, daß $\frac{dy}{dx}$ die trig. Tangente des Winkels ist d. h. eines Winkels, den die Tangente an einem belieb. Parabelpunkt mit der Abscisse macht u. daß, wenn wir die Gleich. $y^2 = \frac{b^2}{c} x$ differentiiren

$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{2c} \cdot \frac{1}{y}$ erhalten.

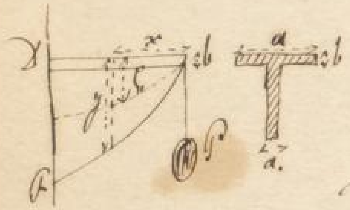
Für den Fall b = c des Befestigungsquerschnitt ist

$$tg\alpha = \frac{b}{2c}$$

Nun ist $AB = b - FK$

$$= b - c\,tg\alpha = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$$

also $AB = \frac{b}{2}$ (22.)



Für beistehende Form würde die genaue Rechnung auf große Schwierigkeiten führen, oder man nimmt für denn Versuchsfall günstige Annahmen machte, so würde das Resultat in der Ausführung zu schwer zu erreichen. Zwar aus den Gleich. (12) u. 12'

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{ab^2 + a_1 y^2 + 2a_1 by}{ab + a_1 y}$$

$$Px = \frac{k}{3}\,\frac{a\zeta_1^3 - (a-a_1)(\zeta_1 - b)^3 + a_1(y+b-\zeta_1)^3}{y+b-\zeta_1}$$

könnte auf Annahme eines x, y bestimmt werden.

In den meisten Fällen aber kann man genügend wie folgt verfahren:

Man nehme zwischen den Querschnitts-dimensionen der Befestigungsfläche DF passende Verhältnisse an, u. berechne nach den Formeln (12) u. (12') die Dimensionen des Querschnittes, u. bezeichnen dann den letzten Form bis zu dem Endpunkt des Stabes eine Parabel.

<u>Beispiel.</u>

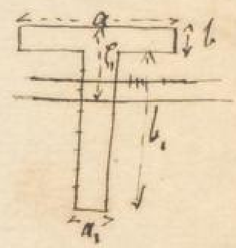
Es sei

$b = b$

$a_1 = b$

$a = 4 b$

$b_1 = 8 b$ daher



aus (12) $\zeta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{ab^2 + a_1 b_1^2 + 2 a_1 b b_1}{ab + a_1 b_1}$

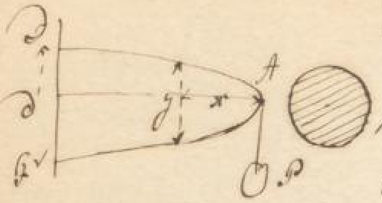
$\zeta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{4\cdot 1^2 + 1\cdot 8^2 + 2\cdot 1\cdot 1\cdot 8}{4\cdot 1 + 1\cdot 8}\cdot b = 3{,}5\, b$

ferner $P_c = \frac{p}{3}\,\frac{a\zeta_1^3 - (a-a_1)(\zeta_1 - b)^3 + a_1(b_1 + b - \zeta_1)^3}{b_1 + b - \zeta_1}$

$= \frac{p}{3}\cdot\frac{4\cdot 3{,}5^3 - (4-1)(3{,}5-1)^3 + 1(8+1-3{,}5)^3}{8+1-3{,}5}\cdot b^3$

$= 17{,}6\; p\, b^3$

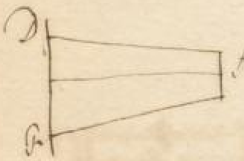
$b = \sqrt[3]{\frac{P_c}{17{,}6\, p}}$ (23.)



für andern Zwecken vorhandene ist beistehende, deren Durchschnitte Kreise sind.

Für einen Cylinder hatten wir oben

$$Px = \frac{\pi}{3}\frac{p}{2}\cdot y^3.$$



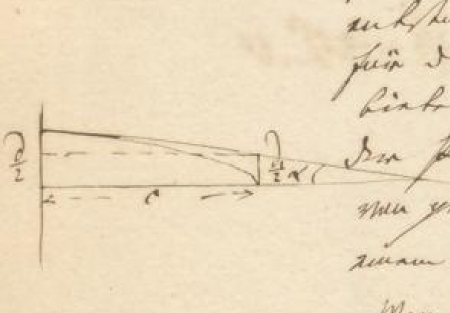
u. wenn die Spannungen in jedem Durchschnitt gleich sein sollen, so ist p constant u. wenn c die Länge des Körpers u. d der Durchm. im Befestigungsquerschnitt ist:

$$Pc = \frac{\pi}{3}\frac{p}{2}\cdot d^3 \qquad (24)$$

u. ferner $\frac{x}{c} = \frac{y^3}{d^3}$

$$y = d\sqrt[3]{\frac{x}{c}} \qquad (25.)$$

Die Gleichung für eine Parabel, daher ist der Körper ein aus der Parabel entstandener Rotationskörper, der jedoch für die Ausführung Schwierigkeiten darbietet. Deshalb ist man auch hierbei in der Praxis auf eine annähernde Form von geraden Linien begrenzt (ähnlich einem abgestumpften Kegel) gekommen.



Man erhält diese Form, wenn man in D u. F Tangenten u. von A die Senkrechte zieht. Aus der Zeichnung erhält man $\frac{\frac{1}{2}dy}{dx} = tg\,\alpha$. Nun ist

$$\frac{\frac{1}{2}dy}{dx} = \frac{1}{6}\,\frac{d^3}{cy^2}, \text{ u. ferner}$$

$$1 : tg\alpha = 2c : \frac{d}{2}$$

$$tg\alpha = \frac{d}{4c}$$ daher

$$\frac{d}{4c} = \frac{1}{6}\,\frac{2d^3}{cg^2}$$ u. da

$$c : \frac{d_1}{2} = 1 : tg\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{d_1}{2c}$$ folglich daraus

$$\frac{d_1}{2c} = \frac{1}{6}\,\frac{2d^3}{c\,d^2} = \frac{2}{6}\,\frac{d}{c}$$

$$d_1 = \frac{4c\;d}{6\;c} = \frac{2}{3}\,d \qquad (26.)$$

oder kürzer da

$$\frac{d}{2} = \frac{d_1}{2} + c\,tg\alpha$$

$$d = d_1 + 2c\,tg\alpha$$

$$= d_1 + 2c\,\frac{1}{6}\,\frac{d^3}{cd^2}$$

$$= d_1 + \frac{1}{3}\,d$$ somit

$$d_1 = d - \frac{1}{3}\,d = \frac{2}{3}\,d.$$

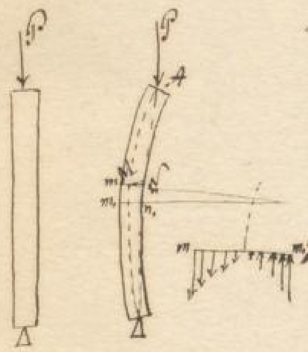
Absolute rückwirkende Festigkeit.

Stäbe von unbedeutender Länge werden bei zu großer Belastung zusammengedrückt u. am Ende zerquetscht. Derartige Fälle kommen doch selten im Maschinenbau, wohl aber im eigentlichen Bauwesen vor.

Es ist hiebei einfach die drückende Kraft

entgegenwirkende Widerstand dem
Querschnitt des Stabes proportional.

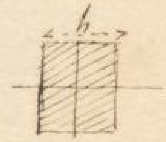
Relative rückwirk. F. Anders verhält es sich bei längeren
Stäben, die durch Schieben z. B. einen Wider-
stand überwinden müssten. Wenn der
Querschnitt eines solchen Stabes in Bezug
auf 2 senkrecht aufeinanderstehende Ebenen
symmetrisch, das Material durchaus
homogen wäre, u. die Richtung der Last
genau mit der Axe des Stabes zusammenfiele,
so könnte nur ein Zusammendrücken desselben
statt finden. Da aber besonders das
Letztere nie so genau eintrifft, so
wird der Stab in der Mitte sich etwas
ausbiegen u. dabei ein Theil der Fasern
ausgedehnt, der andere verkürzt werden.
Die Summe der statischen Momente dieser
Spannungen u. Pressungen ist gleich wie
oben dem statischen Moment der Kraft,
die auf den Stab wirkt. Bezeichnen wir
jene Summe mit $\mathfrak{M}$ u. $AN = x$, $MN = y$
so ist



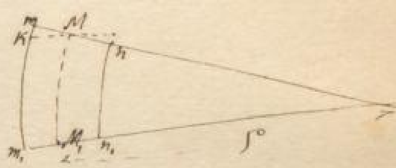
$$p\,\mathfrak{M} = Py \quad (a)$$

Zu bemerken ist, daß gerade dieses Problem
der relat. rückw. Festigkeit noch von
keinem Schriftsteller genau gelöst wurde;

284, 285. Um alle, uns schwer zu behandelnde Differentialgleichungen zu umgehen, vorausgesetzt, dass der Stab bei symmetr. Querschnitte in Bezug auf 2 senkrecht auf einander stehenden Ebenen in der Mitte eine neutrale Faser enthalte, die weder verlängert noch verkürzt. Dies ist aber nur bei sehr starken Biegungen der Fall.



Diese Neutralfaser stelle also nach wie vor die ursprüngliche Länge des Stabes dar u. sei blos gekrümmt u. wir wollen sie jetzt untersuchen.



Wir haben

$$\rho : MM_1 = KM : km$$

$$= \tfrac{1}{2} h : km$$

$$km = \frac{MM_1 \cdot \tfrac{1}{2} h}{\rho}$$

nach der Gl. (a) ist $km = MM_1 \frac{p}{\varepsilon}$ daher

$$\frac{\tfrac{1}{2} h}{\rho} = \frac{p}{\varepsilon},$$

$$p = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{h}{\rho} \quad (b)$$

Diesen Werth von p in die Gl. (a) substituirt gibt

$$\mathfrak{M} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{h}{\rho} = Py$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2P}{\mathfrak{M} \varepsilon h} \cdot y \quad (c)$$

Nun ist auch

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{dx\, d^2y}{ds^3}$$

welche Gleich. aber schwer aufzulösen wäre, u. ungeachtet des Widerspruchs müssen wir jetzt annehmen, die Biegung sei so schwach, daß $dx = ds$ genommen werden kann, daher

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{u. dieß substit.}$$

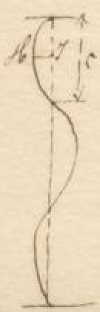
gibt $\frac{2P}{Meh} \cdot y = -\frac{d^2y}{dx^2}$ oder wenn wir $\frac{2P}{Meh} = K^2$ setzen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + K^2 y = 0 \quad (d)$$

Wenn man diese Gleich. zweimal integrirt so soll die Funktion selbst mit dem Zeichen – zum Vorschein kommen; dieß ist aber beim ~~sin~~ sin u. cos der Fall, daher können wir gleich die allgemeine Form anschreiben

$$y = A \sin Kx + B \cos Kx$$

für $x = 0$ ist $y = 0$ folglich muß $B = 0$ sein.



u. $y = A \sin Kx$ (e.)

Aus dieser Gleich. folgt nebenstehende Form der Wellenlinie, da der sin auf diese Weise mit x wächst, 0 u. dann negativ wachsend wird.

Um die Länge einer eingebogenen Partie einer solchen Krümmung kennen zu lernen, wissen wir, daß auch $kc = 0$

$$kc = \pi, \quad c = \frac{\pi}{k}$$

Ferner haben wir

$$\frac{dy}{dx} = A k \cos kx,$$

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$s = \int dx \sqrt{1 + A^2 k^2 \cos^2 kx}$$

Nennen wir die ursprüngliche Länge der Saite $= l$, die Anzahl der Partien $= i$, so ergibt sich:

$$l = i \int_0^{c=\frac{\pi}{k}} \sqrt{1 + A^2 k^2 \cos^2 kx} \, . \, dx$$

Dies ist aber eine elliptische Funkt. die wir nicht so leicht zu integriren im Stande waren.

Aber wir können auch die Sache erleichtern, indem A u. k sehr kleine Größen sind, so daß wir uns auch mit den ersten beid. Gliedern der Reihe begnügen können:

$$\sqrt{1 + A^2 k^2 \cos^2 kx} = 1 + \tfrac{1}{2} A^2 k^2 \cos^2 kx$$

$$\text{u. } \cos^2 kx = \frac{1 + \cos 2kx}{2},$$

daher $\sqrt{1 + A^2 k^2 \cos^2 kx} = 1 + \tfrac{1}{2} A^2 k^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2kx}{2}\right)$

u. endlich

$$l = i\int_0^{\frac{\pi}{k}} \left(1 + \tfrac{1}{4}\alpha^2 k^2 + \tfrac{1}{4}\alpha^2 k^2 \cos 2kx\right) dx$$

$$= i\left(1 + \tfrac{1}{4}\alpha^2 k^2\right)\frac{\pi}{k} + 0$$

$$\frac{kl}{i\pi} - 1 = \tfrac{1}{4}\alpha^2 k^2$$

$$\alpha = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{kl}{i\pi} - 1}$$

Wenn nun k u. l d.h. die Belastung u. die Länge des Stabes nicht so groß ist, daß $\frac{kl}{i\pi} > 1$, so wird α (d.h., die größte Ordinate) imaginär u. deshalb auch y, was zwar sehr ungereimt, aber durch obige widersprechende Vereinfachungen leicht zu erklären ist. Streng genommen sollte der Ausdruck für α längere Zeit 0 bleiben u. dann immer mehr wachsen.

Übrigens genügt diese Gleichung um für die Praxis wichtige Schlüsse zu bilden. Fragen wir z.B. welches die größte Belastung, bei welcher der Stab noch nicht eine Biegung annimmt, so erhalten wir diese aus dem ~~Zustand~~ Übergang vom Imaginären in den reellen Zustand d.h. wo $\frac{kl}{\pi} = i$ od. $\frac{k^2 l^2}{\pi^2} = i$

$$\frac{2P_1}{\delta W e h}\cdot\frac{l^2}{\pi^2} = 1 \quad (27.)$$ die Gleich., wenn / Biegung stattfindet

Ferner wächst ist die kleinste Belastung, bei welcher eine zweifache Biegung eintreten kann; also bei $i = 2$. hat man.

$$\frac{kl}{2\pi} = 1; \quad \frac{2P_2}{M\varepsilon h}\cdot\frac{l^2}{4\pi^2} = 1$$

für dreifache Biegung ist $i = 3$ also

$$\frac{kl}{3\pi} = 1, \quad \frac{2P_3}{M\varepsilon h}\cdot\frac{l^2}{9\pi^2} = 1$$

u. s. w.

Die größte Last, die man einem solchen Stab aufbürden kann, ohne daß derselbe sich biegt, bestimmt sich aus Gleich. (27) wie folgt:

$$P_1 = \frac{M\varepsilon h\pi^2}{2l^2} \qquad (28.)$$

und aus dieser lassen sich für verschiedene Längen die verschiedenen Querschnitte finden. z. B. für einen rechteckigen Stab hat man aus Gleich. (4)

$M = \frac{ab^2}{6}$ ferner für

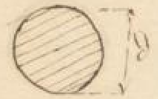
$h = b$; ($a > b$ vorausgesetzt)

$l = c$ zu substituiren,

so ergiebt sich $P_1 = \frac{ab^2}{6}\cdot\frac{\varepsilon b\pi^2}{2c^2}$

$$= \varepsilon\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{ab^3}{c^2} \qquad (29)$$

Für einen Cylinder erhält man,



wenn $l = c$

$h = d$

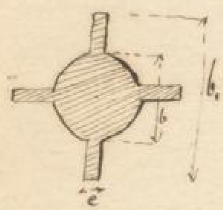
$\mathfrak{M} = \dfrac{d^3 \pi}{32}$;

$$P_1 = \frac{d^3\pi}{32} \cdot \varepsilon \frac{d\pi^2}{2c^2}$$

$$= \varepsilon \frac{d^4}{64} \cdot \frac{\pi^3}{c^2} \qquad (30.)$$

Man sieht hieraus, daß die Last der Zerknickung des Säulenschaftes od. umgekehrt dem Quadrat der Länge proportional ist.

Für kreuzförmigen Cylinder mit Rippen ergibt sich, wenn



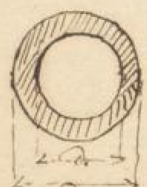
$l = c$

$h = b_1$

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{6}\, \frac{0{,}589\, b^4 + (b_1^3 - b^3)e + (b_1 - b)e^3}{b_1} ;$$

$$(31.) \quad P_1 = \frac{1}{12}\, \varepsilon \cdot \frac{\pi^2}{c^2} \left\{ 0{,}589\, b^4 + (b_1^3 - b^3)e + (b_1 - b)e^3 \right\}$$

Für einen hohlen Cylinder erhält man:



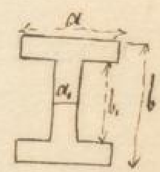
wenn $h = d$

$l = c$ u. $\mathfrak{M} = \dfrac{\pi}{32}\, \dfrac{d^4 - d_1^4}{d}$

$$(32.) \quad P_1 = \frac{\varepsilon \pi^3}{64 . c^2} (d^4 - d_1^4)$$

Nun mögen nachträglich einige specielle Fälle folgen über die Querschnittsdimensionen bei Stäben, deren Elasticitätsmoment in Anspruch genommen wird.

Für beistehende Form, für die wir oben Gleich. (6) aufgestellt, ergibt sich, da



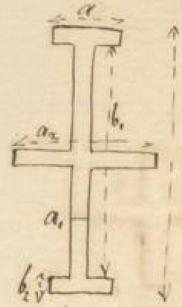
$$M = p\mathfrak{M} = \frac{p}{6b}\left\{a_1 b_1^3 + a(b^3 - b_1^3)\right\}$$

wenn

1)	2)	3)
$b = 5a_1$	$b = 8a_1$	$b = 12a_1$
$b_1 = 3a_1$	$b_1 = 6a_1$	$b_1 = 10a_1$
$a = 3a_1$	$a = 4a_1$	$a = 4a_1$;

$$\left.\begin{aligned} 1.)\ M &= 10{,}7\ p a_1^3 \\ 2.)\ M &= 29{,}16\ p a_1^3 \\ 3.)\ M &= 54{,}33\ p a_1^3 \end{aligned}\right\} \quad (33.)$$

Für einen Stab von beistehendem Querschnitt erhalten wir, da Gl. (7)



$$M = \frac{p}{6b}\left\{\underset{(I)}{a_2 b_2^3} + \underset{(II)}{a_1(b_1^3 - b_2^3)} + \underset{(III)}{a(b^3 - b_1^3)}\right\}$$

wenn die Querschnittsdimensionen folgende sind:

1)	2)
$a = 2a_1$	$a = 2a_1$
$a_2 = 5a_1$	$a_2 = 5a_1$
$b = 12a_1$	$b = 16a_1$
$b_1 = 10a_1$	$b_1 = 14a_1$
$b_2 = a_1$	$b_2 = a_1$

$$M = p a_1^3 \frac{5 + (10^3 - 1) + 2(12^3 - 10^3)}{6 \cdot 12}$$

u. für (2) $$M = p a_1^3 \frac{5 + (14^3 - 1) + 2(16^3 - 14^3)}{6 \cdot 16}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & M = 34{,}17\, p a_1^3 \\ (2) & M = 56{,}79\, p a_1^3 \end{array}\right\} \quad (34.)$$

Diese Form ist bei den Balanciers gewöhnlich. Wir sehen zugleich aus der Betrachtung der Ausdrücke (I)(II)(III) in der Formel, welche sich ~~auf~~ die mittlere Rippe, ~~auf~~ den Längenschnitt b, u. ~~auf~~ die untere u. obere Rippe a beziehen, daß die mittlere Rippe nur unbedeutenden Einfluß auf die Festigkeit des Balanciers ausübt, weil sie zunächst der neutralen Faser liegt; am meisten zur Festigkeit aber die Rippen a beitragen. Die Masse der Mittelrippe ist hauptsächlich da, um Verbiegung zu verhüten.

Für den kreuzförmigen Querschnitt erhält man, da Gl. (8)

$$M = \frac{p}{6b} \{(a_1 b_1^3 + a(b^3 - b_1^3)\}$$

wenn $b = 6a$, $a_1 = 6a$, $b_1 = 0{,}8a$

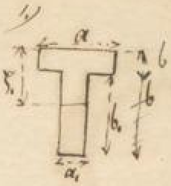
$$M = p a^3 \frac{6 \cdot (0{,}8)^3 + (6^3 - (0{,}8)^3)}{6 \cdot 6}$$

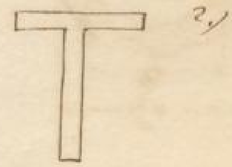
$$M = 6{,}071 \cdot p a^3 \quad (35.)$$

Für die drei bestehenden Formen ergibt sich nach Gl. (12 u. 12')

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\,\frac{ab^2 + a_1 b_1^2 + 2a_1 b b_1}{ab + a_1 b_1}$$

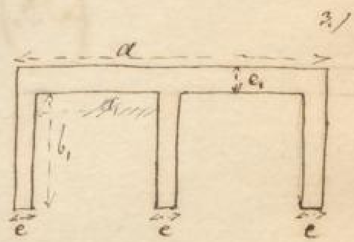
$$M = \frac{p}{3}\,\frac{a\xi_1^3 - (a-a_1)(\xi_1 - b)^3 + a_1(b_1+b-\xi_1)^3}{b_1 + b - \xi_1}$$





wenn folgende Annahmen gemacht werden:

für 1) $b_1 = 5a_1$	für 2) $b_1 = 8a_1$	für 3) $a_1 = 3e$
$b = a_1$	$b = a_1$	$b_1 = 15e$
$a = 3a_1$	$a = 4a_1$	$a = 40e$
		$b = e_1 = 1{,}5e.$



1.) $\xi_1 = \frac{1}{2}\,\frac{3 + 25 + 2.5}{3+5}\,a_1 = 2{,}375\,a_1$

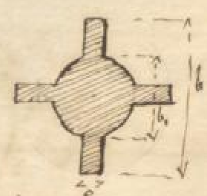
2.) $\xi_1 = \frac{1}{2}\,\frac{4 + 8^2 + 2.8}{4.8}\,a_1 = 3{,}5\,a_1$

3.) $\xi_1 = \frac{1}{2}\,\frac{40(1{,}5)^2 + 3.15^2 + 6.1{,}5.15}{40.1{,}5 + 3.15}\,e = 4{,}28\,e$

a',

$$\left.\begin{aligned} &1.)\ M = p\,a_1^3 \cdot 7{,}598 \\ &2.)\ M = p\,a_1^3 \cdot 17{,}636 \\ &3.\ M = p\,e^3 \cdot 212{,}42 \end{aligned}\right\}(36.)$$

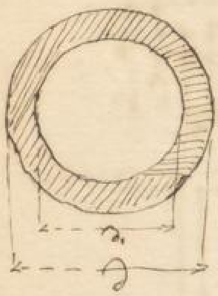
Specielle Werthe für bestehenden Querschnitt geben, wenn



1.) $b_1 = 12e$	2.) $b_1 = 12e$
$b = 4e$	$b = 3e$

$$\left.\begin{aligned} &1.)\ M = pe^3 \cdot \frac{0{,}589.4^4 + (12^3 - 4^3) + (12-4)}{6.12} = 25{,}3\,e^3 p \\ &2.)\ M = pe^3 \cdot \frac{0{,}589.3^4 + (12^3 - 3^3) + (12-3)}{6.12} = 24{,}412\,pe^3 \end{aligned}\right\}(37)$$

Für einen hohlen Cylinder od. eine Röhre erhalten wir, wenn



1.) $d_1 = 0,5\, d$ $\qquad$ u. $M = \frac{p\,\pi}{32} \cdot \frac{d^4 - d_1^4}{d}$

2.) $d_1 = 0,6\, d$

3.) $d_1 = 0,7\, d$

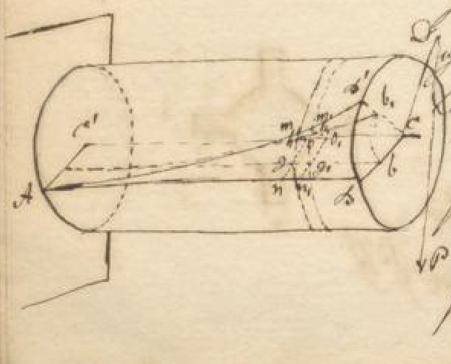
4.) $d_1 = 0,8\, d$

$$
(38.)\begin{cases}
1.)\ M = p . d^3 \frac{3,142}{32} . \left(1-(0,5)^4\right) = 0,0920 . p d^3 \\
2.)\ M = p\, d^3 . \frac{3,142}{32} . \left(1-(0,6)^4\right) = 0,0853 . p d^3 \\
3.)\ M = p\, d^3 . \frac{3,142}{32} \left(1-(0,7)^4\right) = 0,0746 . p d^3 \\
4.)\ M = p . d^3 . \frac{3,142}{32} \left(1-(0,8)^4\right) = 0,0579 . p d^3 .
\end{cases}
$$

Von der Torsions-festigkeit oder der Festigkeit, welche die Körper dem Verdrehen entgegensetzen.

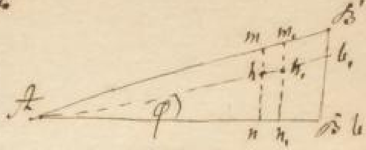
Wir betrachten hier einen Cylinder der bei C' festgehalten u. in C um seine Axe gedreht werden soll.

Zuerst fragt es sich, welche Veränderung erfolgt bei dem Verdrehen in der relativen Lage der einzelnen Theilchen an sich.



Denken wir uns einen horizontalen Längenschnitt Ab CC' durchgelegt, so wird nach einer kleinen Drehung der Pkt b nach b' gekommen sein, u. die gr. Linie Ab wird in die Schraubenlinie

295. AB u. die Ebene ACBC in die windschiefe Fläche AC'B'C umgewandelt sein.



Wir sehen voraus, daß alle Punkte auch der Drehung noch dieselbe radiale Entfernung von der Axe haben wie zuvor.

Es sei der Torsionswinkel $BCB' = \theta$. im Ganzen

Offenbar ist dieser Winkel der Entfernung von AC' proportional; ebenso ist es die Länge eines Bogenstückchens der Entfernung von A.

Im Ganzen sehen wir, daß, wenn wir z. B. eine Faser in der Entfernung ρ von der Axe betrachten, dass Faserstückchen gg_1 auch hh_1 in eine ähnliche Schraubenlinie übergehen würde.

Es sei $BC = B'C' = r$, $CD = R$; d = Durchmesser d. Cyl.

$$og = oh = o_1g_1 = o_1h_1 = \rho \text{ u.}$$

$CC' = l$. | δ sei der Modul der Festigkeit des Materials

$\angle b_1Ab = \varphi$

Nun ist $\text{arc}\, bb_1 = \rho\theta$ u. wie sich aus der nebenstehenden Figur ergibt auch

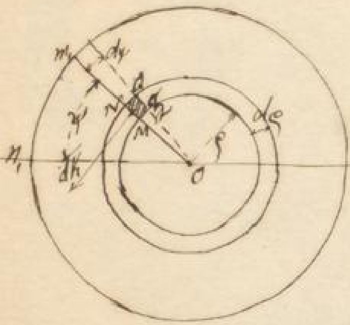
$$\text{arc}\, bb_1 = AB \cdot tg\varphi \quad \text{daher}$$

$$l\, tg\varphi = \rho\theta$$

$$tg\varphi = \rho\frac{\theta}{l}$$ u. da Drehung nur schwach

also φ sehr klein auch $\varphi = \rho\frac{\theta}{l}$

Um nun die Bedingungen für den Gleichgewichtszustand ausfindig zu machen, betrachten wir nur mit Bezug auf das Prinz. d. mat. Gesetz. die Bewegung der Fasern in einem aus der Scheibe ausgeschnittenen kleinen Stücke, u. denken uns alles übrige am Cylinder wegfallen u. bleibt die Scheibe starr. An diesem Flächenstückchen



MNRZ, dessen Inhalt $= \rho\, d\varphi \cdot d\rho$, ist nun eine Kraft thätig (dK), die dem Ablenkungsbogen u. dem Querschnitt d. h. dem Flächeninhalt proportional ist. daher

$$dK = T\rho\, d\varphi \cdot d\rho \cdot \rho\frac{\theta}{l} \quad \text{u.}$$

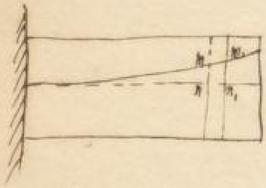
$$S\, dK \cdot \rho = Pk \quad \text{oder}$$

$$T\frac{\theta}{l}\int_0^r\int_0^{2\pi}\rho^3\, d\rho\, d\varphi = Pk$$

$$\frac{1}{32}\pi T\frac{\theta}{l} d^4 = Pk \qquad (39.)$$

Hieraus läßt sich hauptsächlich der Torsionscoeffic. bestimmen.

Das Torsionsvermögen eines Cylinders.



Diese Aufgabe kann bis jetzt nur annäherungsweise gelöst werden. Offenbar wird, wenn der Drehungswink. eine gew. Größe erreicht hat, in den Fasern ein max. einer Spannung statt finden, die von dem Torsionswink. u. v. der Elastic. des Mat. abhängt. Bezeichnet t das Max. der Spannung, wodurch der Bruch od. das Abdrehen erfolgt, so hat man:

$$t = T\,\mathrm{arc}\, d'Ak = Tr\frac{\theta}{l} = T\frac{d\theta}{2l} \quad \text{u. aus (39) folgt}$$

$$T\frac{d\theta}{l} = \frac{16kP}{\pi d^3} \quad \text{daher}$$

$$t = \frac{16kP}{\pi d^3} \quad \ldots\ldots (40.)$$

Auffallend ist in dieser Gleich. daß l daraus verschwunden.

Von der Festigkeit der Gefäßwände gegen den Druck von Flüssigkeiten in Beziehung auf das Zerreißen.

Wir betrachten zuerst ein cylindrisches Gefäß. Es sei hiebei:

q der Druck, den d. Flüssigk. auf eine Fläche von einem 0,01 □m ausübt.

p die absolute Festigkeit des Materials

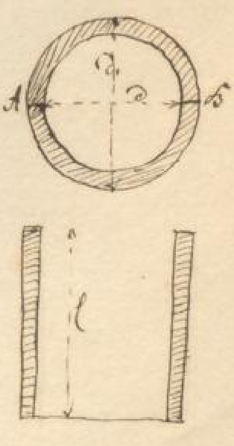
l die Höhe des Gefäßes

s die Dicke der Wände

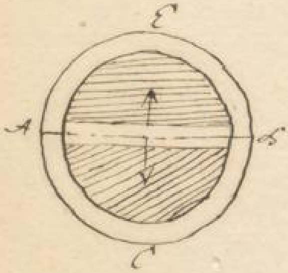
d der innere u.

$d.$ der äußere Durchmesser

Es ist klar, daß bei vollkommen homogenem Material das Gefäß bei fortwährendem Wachsen des Druckes an allen Punkten zugleich reißen müßte, so zu sagen staubartig. Dies findet aber in der Wirklichkeit nicht statt, sondern an irgend einer weniger festen Stelle reißt die Wand u. diametral gegenüber folgt, wenn nicht ein Zerreißen, doch ein Verbiegen. Wir setzen aber voraus, daß der Cylinder immer nach einer die Axe desselben in sich schließenden Ebene platze (z.B. nach AB).



Denken wir uns nun den Druck, der das Zerreißen der Wände nach AB bewirkt, bloß in dem engen Raume zwischen den Flächen wirkend u. die schraffirte Partie der Flüssigkeit auf beiden Seiten starr, gleichsam mit der Wand eine Masse bildend, so ist es, als ob mit zwei entgegengesetzten Kräften die Masse auseinander gedrückt würde. Diesen Kräften muß also die Festigkeit des Materials das Gleichgewicht halten; daher muß sein:



$$d l . q = (d_1 - d) l . p \quad \text{u.}$$

$$d_1 p = dq + dp$$

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \frac{d(p+q)}{p} \quad \text{oder} \\ \delta &= \frac{d_1 - d}{2} = \frac{1}{2}\frac{dq}{p} \end{aligned}\right\} (41.)$$

Für ein kugelförmiges Gefäß erhalten wir das entsprechende Resultat auf analoge Weise wie das für den Cylinder. Die Voraussetzungen u. Annahmen gelten wie oben, daß nämlich die Bruchfläche eine Ebene sei, die durch den Mittelpunkt geht.

Es ergeben sich daher folgende Gleichungen:

$$\frac{d^2\pi}{4}\cdot q = \frac{d_1^2\pi - d^2\pi}{4}\cdot p$$

$$d_1 = d\sqrt{\left(\frac{p+q}{p}\right)} \qquad (42)$$