Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1884

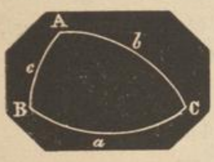
Zehntes Buch. Beispiele zur numerischen Berechnung eines sphärischen Dreiecks

urn:nbn:de:bsz:31-273442

Zehntes Buch.

Beispiele zur numerischen Berechnung eines sphärischen Dreiecks.

91.



Aufgabe. Es sind alle drei Seiten eines sphärischen Dreiecks gegeben: $a = 72^0\,14'\,26''$, $b = 110^0\,18'\,20''$, $c = 48^0\,50'\,42''$. Man suche die Winkel A, B, C.

Auflösung. Zufolge § 72 hat man:

$$tg\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - b)\,\sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin\frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - a)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a)\,\sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin\frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a)\,\sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin\frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}}$$

$$\begin{array}{rl} a = & 72^0\,14'\,26'' \\ b = & 110 \cdot 18 \cdot 20 \\ c = & 48 \cdot 50 \cdot 42 \\ \hline s = & 231 \cdot 23 \cdot 28 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \frac{1}{2}s = & 115^0\,41'\,44'' \\ \frac{1}{2}s - a = & 43 \cdot 27 \cdot 18 \\ \frac{1}{2}s - b = & 5 \cdot 23 \cdot 24 \\ \frac{1}{2}s - c = & 66 \cdot 51 \cdot \ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log\sin(\frac{1}{2}s - b) = & 8{,}9728253 \\ \log\sin(\frac{1}{2}s - c) = & 9{,}9635435 \\ \hline & 18{,}9363688 \\ & 19{,}7922306 \\ \hline & 0{,}1441382 - 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log\sin\frac{1}{2}s = & 0{,}9547781 \\ \log\sin(\frac{1}{2}s - a) = & 9{,}8374525 \\ \hline & 19{,}7922306 \end{array}$$

(:2 [Algebra § 281]

$$\log tg\,\tfrac{1}{2}A = 9{,}5720691 - 10$$

$$\tfrac{1}{2}A = 20^0\,28'\,15'',9.$$

Ebenso findet man $\frac{1}{2}B$ und $\frac{1}{2}C$, mithin ist:

$$A = 40^0\,56'\,31'',8;\quad B = 139^0\,48'\,35'',4;\quad C = 31^0\,12'\,13'',5.$$

92.

Aufgabe. Es sind zwei Seiten, b, c, und ein Gegenwinkel, B, gegeben. Man sucht den anderen Gegenwinkel C. Es sei z. B. $b = 110^0\,18'\,20''$, $c = 48^0\,50'\,42''$, $B = 139^0\,48'\,35'',4$.

Auflösung. In diesem Falle gebraucht man immer die Regel der vier *sinus*. Diese giebt: $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin b}$, hieraus:

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin b} \cdot \sin B.$$

Anmerkung. Da hier der Winkel C durch seinen *sinus* bestimmt wird und deshalb sowohl spitz als stumpf sein kann, so ist klar, daſs durch zwei Seiten und einen Gegenwinkel im allgemeinen ein sphärisches Dreieck nicht bestimmt ist (vergl. § 29).

Weil aber $B + C$ mit $b + c$ gleichartig ist (§ 78 Anmerkung), so können wir jedoch folgendes festsetzen:

1) Ist $b + c = 180^0$, so ist auch $B + C = 180^0$, mithin:

$$\begin{aligned} C &= 90^0, \text{ wenn } B = 90^0 \\ C &> 90 \quad \text{„} \quad B < 90 \\ C &< 90 \quad \text{„} \quad B > 90. \end{aligned}$$

2) Ist $b + c < 180^0$, also auch $B + C < 180^0$, so ist:

$$C < 90^0, \text{ wenn } B \geqq 90^0.$$

Ist aber $B < 90$, so ist C unbestimmt. Kann jedoch C nur auf eine Weise so genommen werden, daſs $B + C < 180$, so ist C bestimmt.

3) Ist endlich $b + c > 180$, also auch $B + C > 180$, so ist:

$$C > 90, \text{ wenn } B \leqq 90.$$

Wäre aber $B > 90$, so ist C wieder unbestimmt, es sei denn, daſs C nur auf eine Weise so genommen werden kann, daſs $B + C > 180^0$.

$$\begin{aligned} \log \sin B &= 9{,}8097796 \\ \log \sin c &= \underline{9{,}8767558} \\ &\ 19{,}6865354 \\ \log \sin b &= \underline{9{,}9721358} \\ \log \sin C &= 9{,}7143996 \\ C &= 31^0\,12'\,13'',5. \end{aligned}$$

93.

Aufgabe. Es sind alle drei Winkel gegeben, zum Beispiel $A = 40^0\,56'\,31'',8$, $B = 139^0\,48'\,35'',4$, $C = 31^0\,12'\,13'',5$. Man sucht die Seiten.

Auflösung. Nach § 75 hat man:

$$tg\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}S\cdot\cos(\tfrac{1}{2}S - A)}{\cos(\tfrac{1}{2}S - B)\cos(\tfrac{1}{2}S - C)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}S\cdot\cos(\tfrac{1}{2}S - B)}{\cos(\tfrac{1}{2}S - A)\cos(\tfrac{1}{2}S - C)}}$$

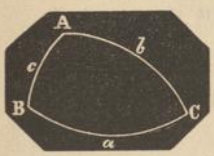
$$tg\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}S\cdot\cos(\tfrac{1}{2}S - C)}{\cos(\tfrac{1}{2}S - A)\cos(\tfrac{1}{2}S - B)}}$$

$$\begin{array}{ll}
A = \ \ 40^0\,56'\,31'',8 & \tfrac{1}{2}S \quad\quad = 105^0\,58'\,40'',4 \\
B = 139\cdot48\cdot35,\ 4 & \tfrac{1}{2}S - A = \ \ 65\cdot\ 2\cdot\ 8,\ 6 \\
C = \ \ 31\cdot12\cdot13,\ 5 & \tfrac{1}{2}S - B = -33\cdot49\cdot55. \\
\hline
S = 211^0\,57'\,20'',7 & \tfrac{1}{2}S - C = \ \ 74\cdot46\cdot26,\ 9
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log -\cos\tfrac{1}{2}S = 9{,}4397531 & \log\cos(\tfrac{1}{2}S - B) = 9{,}9194308\ (\S\,56) \\
\log\cos(\tfrac{1}{2}S - A) = \underline{9{,}6253671} & \log\cos(\tfrac{1}{2}S - C) = \underline{9{,}4193355} \\
19{,}0651202 & \qquad 19{,}3387663 \\
\underline{19{,}3387663} & \\
0{,}7263539 - 1\ (:2 & \\
0{,}8631769 - 1 & \\
\log tg\,\tfrac{1}{2}a = 9{,}8631769 - 10 & \\
\tfrac{1}{2}a = 36^0\,7'\,13''. &
\end{array}$$

Ebenso findet man nach den beiden anderen Formeln $\tfrac{1}{2}b$ und $\tfrac{1}{2}c$ und daraus dann: $a = 72^0\,14'\,26''$; $b = 110^0\,18'\,20''$; $c = 48^0\,50'\,42''$.

94.



Aufgabe. Es sind zwei Winkel, A und B, und eine Gegenseite, a, gegeben. Man sucht die andere Gegenseite b.

Auflösung. Aus der Sinus-Regel

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A} \text{ folgt:}$$

$$\sin b = \frac{\sin a\cdot\sin B}{\sin A}.$$

Die Fälle, wo die durch ihren *sinus* gefundene Seite b bestimmt ist, ergeben sich wieder aus § 78, Anmerkung. Es ist nämlich:

1, Wenn $A + B = 180^0$, also auch $a + b = 180^0$:

$$b \lesseqgtr 90, \text{ wenn } a \gtreqless 90.$$

2, Wenn $A + B < 180^0$, so ist:

$$b < 90, \text{ wenn } a \geqq 90.$$

Wäre $a < 90^0$, so kann b sowohl spitz als stumpf sein etc.

3, Wenn $A + B > 180^0$, so ist:

$$b > 90, \text{ wenn } a \leqq 90.$$

Wäre $a > 90$, so kann b sowohl spitz als stumpf sein etc.

95.

Aufgabe. Von einem sphärischen Dreieck sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel a, b, C gegeben, zum Beispiel $a = 72^0\,14'\,26''$, $b = 110^0\,18'\,20''$, $C = 31^0\,12'\,13'',5$. Man sucht die übrigen Stücke c, A, B.

Auflösung. In diesem Falle gebraucht man immer die Napier'schen Gleichungen und berechnet zuerst die Winkel A und B. Nach § 79 ist, wenn man, weil $b > a$, um negative Winkel zu vermeiden, a mit b und A mit B verwechselt:

$$tg\,\frac{B + A}{2} = cot\,\tfrac{1}{2}\,C \cdot \frac{cos\,\frac{b - a}{2}}{cos\,\frac{b + a}{2}}$$

$$tg\,\frac{B - A}{2} = cot\,\tfrac{1}{2}\,C \cdot \frac{sin\,\frac{b - a}{2}}{sin\,\frac{b + a}{2}}$$

$$\begin{array}{rlrl}
log\,cot\,\tfrac{1}{2}\,C &= 10{,}5540220 & log\,cot\,\tfrac{1}{2}\,C &= 10{,}5540220 \\
log\,cos\,\frac{b - a}{2} &= 9{,}9755852 & log\,sin\,\frac{b - a}{2} &= 9{,}5133567 \\
\hline
 & 20{,}5296072 & & 20{,}0673787 \\
log\,cos\,\frac{b + a}{2} &= 8{,}3466888\,(n) & log\,sin\,\frac{b + a}{2} &= 9{,}9998928 \\
\hline
log\,tg\,\frac{B + A}{2} &= 12{,}1829184\,(n) & log\,tg\,\frac{B - A}{2} &= 10{,}0674859
\end{array}$$

$$\frac{B + A}{2} = 90^0\,22'\,33'',6 \qquad A = 40^0\,56'\,31'',8$$

mithin:

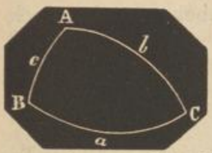
$$\frac{B - A}{2} = 49 \cdot 26 \cdot 1,\,8 \qquad B = 139 \cdot 48 \cdot 35,\,4.$$

Die Seite c findet man jetzt nach der Sinus-Regel: $\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}$, woraus:

$$\sin c = \frac{\sin C \cdot \sin a}{\sin A}.$$

Ob die völlig bestimmte Seite c spitz oder stumpf ist, entscheidet man nach der Regel, dafs $a + c$ mit $A + C$ und $b + c$ mit $B + C$ immer gleichartig ist. Hier ist also $c = 48^0\, 50'\, 42''$. Weil nämlich $A + C < 180$, so mufs $c < 90^0$ sein.

96.



Aufgabe. Von einem sphärischen Dreieck, ABC, ist eine Seite, c, und die beiden anliegenden Winkel A, B gegeben; man sucht die übrigen Stücke C, a, b.

Auflösung. In diesem Falle gebrauche man immer die Napier'schen Gleichungen und suche zuerst die beiden Seiten a, b. Man hat:

$$tg\,\frac{a+b}{2} = tg\,\tfrac{1}{2}c \cdot \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$tg\,\frac{a-b}{2} = tg\,\tfrac{1}{2}c \cdot \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}.$$

Den völlig bestimmten Winkel C findet man nun nach der Sinus-Regel, nämlich:

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a} \sin A = \frac{\sin c}{\sin b} \cdot \sin B.$$

Ob C spitz oder stumpf ist, entscheidet man nach der Regel, dafs $A + C$ mit $a + c$ und $B + C$ mit $b + c$ gleichartig ist.

97.

Aufgabe. Es sind von vier aufeinander folgenden Stücken, A, b, C, a, eines sphärischen Dreiecks zwei Seiten, a, b, und ein Gegenwinkel, A, gegeben; man sucht den andern Winkel C.

Auflösung. Statt den Winkel C vermittelst der Formel:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

direkt oder durch Einführung eines Hilfswinkels zu berechnen, ist es bequemer, zuerst nach der Sinus-Regel den zweiten Gegenwinkel B zu suchen, nämlich:

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \sin A;$$

alsdann findet man den Winkel C nach der ersten oder zweiten Napier'schen Formel:

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \cdot tg \frac{A-B}{2}.$$

Wollte man auch noch die Seite c haben, so ist nach Formel 3 oder 4, § 79:

$$tg \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} \cdot tg \frac{a-b}{2}.$$

Anmerkung. Die Fälle, wo der zuerst zu findende Winkel B bestimmt oder zweideutig ist, ergeben sich daraus, dafs $A+B$ mit $a+b$ gleichartig ist.

Will man aber zuerst C mittelst eines Hilfswinkels, φ, nach der Formel:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

berechnen, so verfahre man nach § 65 (4. Fall).

Aus vorstehender Gleichung folgt:

$$\frac{\cot A}{\cos b} \cdot \sin C + \cos C = \cot a \cdot tg\, b,$$

setzt man nun: $\frac{\cot A}{\cos b} = \cot \varphi$, so hat man, weil $\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot \sin C + \cos C = \cot a \cdot tg\, b$$

$$\sin C \cdot \cos \varphi + \cos C \sin \varphi = \cot a \cdot tg\, b \cdot \sin \varphi$$

$$\sin (C + \varphi) = \cot a \cdot tg\, b \cdot \sin \varphi.$$

Diese Formel ist dann brauchbar, wenn man, wie es in der Praxis der Fall ist, im voraus weifs, ob $\angle C$ spitz oder stumpf ist.

98.

Aufgabe. Von vier aufeinander folgenden Stücken, A, b, C, a, eines sphärischen Dreiecks sind zwei Winkel, A, C, und eine Gegenseite, a, gegeben; man sucht die zwischen liegende Seite b.

Auflösung. Man hat aus:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

$$\cot a \cdot \sin b - \cos C \cdot \cos b = \cot A \cdot \sin C$$

$$\frac{\cot a}{\cos C} \cdot \sin b - \cos b = \cot A \cdot tg\, C$$

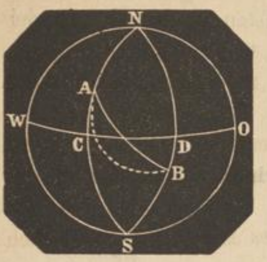
$$\cot \varphi \cdot \sin b - \cos b = \cot A \cdot tg\, C$$

$$\cos \varphi \cdot \sin b - \cos b \cdot \sin \varphi = \cot A \cdot tg\, C \cdot \sin \varphi$$

$$\sin (b - \varphi) = \cot A \cdot tg\, C \cdot \sin \varphi,$$

worin φ durch $\cot \varphi = \frac{\cot a}{\cos C}$ (oder besser $tg\, \varphi = tg\, a \cdot \cos C$) gegeben.

99.



Aufgabe. Es sind die geographischen Breiten und Längen zweier Örter, A und B, auf der Erde gegeben, nämlich $AC = b$, $BD = -b'$; $WC = l'$, $WD = l$, man sucht die Entfernung der beiden Örter A und B, d. h. den zwischen ihnen enthaltenen Bogen gröfsten Kreises $AB = x$.

Auflösung. Denkt man durch A und B die beiden Meridiane NAS, NBS gezogen, so entsteht das sphärische Dreieck ANB, in welchem der Winkel $N = l - l'$, die Seite $AN = 90 - b$ und die Seite $BN = 90 + b'$. Jetzt kann man nach § 95 verfahren. Will man aber die Seite $AB = x$ mittelst eines Hilfswinkels, φ, berechnen, so folgt aus:

$$\cos N = \frac{\cos AB - \cos AN \cdot \cos BN}{\sin AN \cdot \sin BN}$$

$$\cos (l - l') = \frac{\cos x - \cos (90 - b) \cdot \cos (90 + b')}{\sin (90 - b) \cdot \sin (90 + b')}$$

$$\cos (l - l') = \frac{\cos x + \sin b \cdot \sin b'}{\cos b \cdot \cos b'}$$

$$\cos x = \cos (l - l') \cdot \cos b \cdot \cos b' - \sin b \cdot \sin b'$$

$$\cos x = \sin b' \left[\frac{\cos (l - l') \cos b \cdot \cos b'}{\sin b'} - \sin b\right]$$

$$\cos x = \sin b' \left[\cos (l - l') \cos b \cdot \cot b' - \sin b\right]$$

$\cos (l - l') \cot b' = tg\, \varphi$ gesetzt:

$$\cos x = \sin b' \left[\frac{\sin \varphi \cdot \cos b}{\cos \varphi} - \sin b\right]$$

$$= \frac{\sin b'}{\cos \varphi} \left[\sin \varphi \cdot \cos b - \cos \varphi \cdot \sin b\right]$$

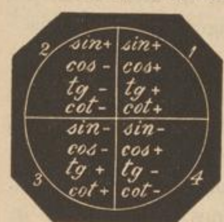
$$\cos x = \frac{\sin b' \cdot \sin (\varphi - b)}{\cos \varphi}, \text{ worin } tg\, \varphi = \cos (l - l') \cot b'.$$

Die Entfernung x findet man in Graden, die noch in Länge verwandelt werden, indem man auf einen Grad gröſsten Kreises 15 geographische Meilen rechnet.

Anmerkung. Daſs ein zwischen zwei Punkten, A, B, enthaltener Bogen gröſsten Kreises kleiner ist, als ein durch dieselben Punkte gelegter Bogen kleineren Kreises, erhellt leicht, wenn man den Bogen kleineren Kreises um die gemeinschaftliche Sehne gedreht und mit dem Bogen gröſsten Kreises in einerlei Ebene gebracht denkt, wo dann letzterer, weil mit einem gröſsern Radius beschrieben, vom erstern offenbar umgeben, folglich auch kleiner sein muſs.

100.

Zusammenstellung der goniometrischen Formeln.



$$\sec a = \frac{1}{\cos a} \qquad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$$

$$\sin 0 = 0 \qquad \sin 90 = 1$$
$$\cos 0 = 1 \qquad \cos 90 = 0$$
$$tg\, 0 = 0 \qquad tg\, 90 = \infty$$
$$\cot 0 = \infty \qquad \cot 90 = 0$$

$$\sin 180^0 = 0 \qquad \sin 270^0 = -1 \qquad \sin 360^0 = 0$$
$$\cos 180^0 = -1 \qquad \cos 270^0 = 0 \qquad \cos 360^0 = 1$$
$$tg\, 180^0 = 0 \qquad tg\, 270^0 = -\infty \qquad tg\, 360^0 = \infty$$
$$\cot 180^0 = -\infty \qquad \cot 270^0 = 0 \qquad \cot 360^0 = 0$$

$$\sin k\pi = 0 \qquad \sin (4k+1)\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \sin (4k+3)\frac{\pi}{2} = -1$$

$$\cos 2k\pi = 1 \qquad \cos (2k+1)\pi = -1 \qquad \cos (2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}; \qquad \cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$tg\, 30^0 = \cot 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30^0 = tg\, 60^0 = \sqrt{3}$$

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\, 45^0 = \cot 45^0 = 1.$$

$$\sin(-a) = -\sin a \qquad \sin(a-b) = -\sin(b-a)$$
$$\cos(-a) = \cos(+a) \qquad \cos(a-b) = \cos(b-a)$$
$$tg(-a) = -tg\, a \qquad tg(a-b) = -tg(b-a)$$
$$\cot(-a) = -\cot a \qquad \cot(a-b) = -\cot(b-a)$$

$$\sin(90-a) = \cos a \qquad \sin(90+a) = \cos a \qquad \sin(180-a) = \sin a$$
$$\cos(90-a) = \sin a \qquad \cos(90+a) = -\sin a \qquad \cos(180-a) = -\cos a$$
$$tg(90-a) = \cot a \qquad tg(90+a) = -\cot a \qquad tg(180-a) = -tg\, a$$
$$\cot(90-a) = tg\, a \qquad \cot(90+a) = -tg\, a \qquad \cot(180-a) = -\cot a$$

$$\sin(180+a) = -\sin a \qquad \sin(270-a) = -\cos a \qquad \sin(270+a) = -\cos a$$
$$\cos(180+a) = -\cos a \qquad \cos(270-a) = -\sin a \qquad \cos(270+a) = \sin a$$
$$tg(180+a) = tg\, a \qquad tg(270-a) = \cot a \qquad tg(270+a) = -\cot a$$
$$\cot(180+a) = \cot a \qquad \cot(270-a) = tg\, a \qquad \cot(270+a) = -tg\, a$$

$$\sin(360-a) = -\sin a \qquad \sin(45^0-a) = \cos(45^0+a)$$
$$\cos(360-a) = \cos a \qquad \cos(45-a) = \sin(45+a)$$
$$tg(360-a) = -tg\, a \qquad tg(45-a) = \cot(45+a)$$
$$\cot(360-a) = -\cot a \qquad \cot(45-a) = tg(45+a)$$

* $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \qquad \cos^2 a = 1 - \sin^2 a$

* $\dfrac{\sin a}{\cos a} = tg\, a \qquad \dfrac{\cos a}{\sin a} = \cot a$

* $tg\, a \cdot \cot a = 1 \qquad tg\, a = \dfrac{1}{\cot a} \qquad \cot a = \dfrac{1}{tg\, a}$

$$1 + tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \qquad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

$$\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \frac{tg\, a}{\sqrt{1+tg^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$$

$$\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 a}} = \frac{\cot a}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$$

$$tg\, a = \frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a} = \frac{1}{\cot a}.$$

$$\cot a = \frac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}} = \frac{1}{tg\, a}$$

* $\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$

* $\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$

* $tg(a \pm b) = \dfrac{tg\, a \pm tg\, b}{1 \mp tg\, a \cdot tg\, b}$

* $\cot(a \pm b) = \dfrac{\cot a \cdot \cot b \mp 1}{\cot a \pm \cot a}.$

$$* \quad \sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$* \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$* \quad tg\, 2a = \frac{2\, tg\, a}{1 - tg^2 a}$$

$$* \quad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a} = \tfrac{1}{2} (\cot a - tg\, a).$$

$$* \quad \sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$* \quad \sin a \cdot \cos a = \frac{\sin 2a}{2} \qquad \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2}.$$

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \qquad \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$tg\, 3a = \frac{3\, tg\, a - tg^3 a}{1 - 3\, tg^2 a} \qquad \cot 3a = \frac{\cot^3 a - 3 \cot a}{3 \cot^2 a - 1}.$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sin a} - \sqrt{1 - \sin a}}{2}.$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sin a} + \sqrt{1 - \sin a}}{2}.$$

$$tg\, \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$$

$$= \frac{1}{\sin a} - \cot a = \frac{\sqrt{1 + tg^2 a} - 1}{tg\, a}.$$

$$\cot \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}} = \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1 - \cos a}$$

$$= \frac{1}{\sin a} + \cot a = \cot a + \sqrt{1 + \cot^2 a}.$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \qquad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \qquad \cos a - \cos b = 2 \sin \frac{b+a}{2} \sin \frac{b-a}{2}$$

$$tg\, a \pm tg\, b = \frac{\sin (a \pm b)}{\cos a \ \cos b} \qquad \cot a \pm \cot b = \frac{\sin (b \pm a)}{\sin a \ \sin b}$$

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \cdot \sin (45^0 + a) \qquad \sin a - \cos a = -\sqrt{2} \cdot \cos (45^0 + a)$$

$$tg\, a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a} \qquad tg\, a - \cot a = -2 \cot 2a$$

$$\sin a + tg\, a = 2\, tg\, a \cos^2 \frac{a}{2} \qquad \sin a - tg\, a = -2\, tg\, a \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a + \cot a = 2 \cot a \sin^2 \left(45^0 + \frac{a}{2}\right)$$

$$\cos a - \cot a = -2 \cot a \cos^2\left(45^0 + \frac{a}{2}\right)$$

$$1 + \sin a = 2 \sin^2\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) \qquad 1 - \sin a = 2 \cos^2\left(45^0 + \frac{a}{2}\right)$$

$$* \; 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \qquad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$1 + tg\, a = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(45^0 + a)}{\cos a} \qquad 1 - tg\, a = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos(45^0 + a)}{\cos a}$$

$$1 + \cot a = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(45^0 + a)}{\sin a} \qquad 1 - \cot a = -\frac{\sqrt{2} \cdot \cos(45^0 + a)}{\sin a}.$$

$$tg\,(45^0 \pm a) = \frac{1 \pm tg\, a}{1 \mp tg\, a}$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = tg \frac{a+b}{2} \cot \frac{a-b}{2} \qquad \frac{tg\, a + tg\, b}{tg\, a - tg\, b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$$

$$\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b) \sin(a-b) \qquad \cos^2 a - \cos^2 b = \sin(b+a) \sin(b-a)$$

$$tg^2 a - tg^2 b = \frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b} \qquad \cot^2 a - \cot^2 b = \frac{\sin(b+a) \sin(b-a)}{\sin^2 a \sin^2 b}.$$

$$1 - \sin^2 a = \cos^2 a \qquad 1 - \cos^2 a = \sin^2 a$$

$$1 - tg^2 a = \frac{2\, tg\, a}{tg\, 2a} \qquad 1 - \cot^2 a = -2 \cot a \cot 2a.$$

$$\frac{1 + \cos a}{\cos a} = tg\, a \cot \frac{a}{2} \qquad \frac{1}{\cos a} + 1 = tg\, a \cot \frac{a}{2}$$

$$\frac{1 - \cos a}{\cos a} = tg\, a\; tg \frac{a}{2} \qquad \frac{1}{\cos a} - 1 = tg\, a\; tg \frac{a}{2}.$$

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2} \sin(a+b) + \tfrac{1}{2} \sin(a-b)$$

$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2} \cos(a-b) - \tfrac{1}{2} \cos(a+b)$$

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2} \cos(a+b) + \tfrac{1}{2} \cos(a-b)$$

$$arc \sin x \pm arc \sin y = arc \sin\left(x \sqrt{1-y^2} \pm y \sqrt{1-x^2}\right)$$

$$arc \cos x \pm arc \cos y = arc \cos\left[xy \mp \sqrt{(1-x)^2 (1-y^2)}\right]$$

$$arc\; tg\, x \pm arc\; tg\, y = arc\; tg \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

$$arc \cot x \pm arc \cot y = arc \cot \frac{xy \mp 1}{y \pm x}.$$

$$arc \sin(-x) = -arc \sin x \qquad arc \cos(-x) = \pi \pm arc \cos x$$

$$arc\; tg\,(-x) = -arc\; tg\, x \qquad arc \cot(-x) = -arc \cot x.$$

Pierer'sche Hofbuchdruckerei Stephan Geibel & Co. in Altenburg.