

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

**Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen
Trigonometrie**

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1884

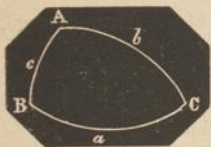
Zehntes Buch. Beispiele zur numerischen Berechnung eines sphärischen
Dreiecks

[urn:nbn:de:bsz:31-273442](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-273442)

Zehntes Buch.

Beispiele zur numerischen Berechnung eines sphärischen Dreiecks.

91.



Aufgabe. Es sind alle drei Seiten eines sphärischen Dreiecks gegeben:

$$a = 72^{\circ} 14' 26'', \quad b = 110^{\circ} 18' 20'', \quad c = 48^{\circ} 50' 42''.$$

Man suche die Winkel A, B, C.

Auflösung. Zuzufolge § 72 hat man:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - b) \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - a)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a) \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a) \sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}}$$

$$a = 72^{\circ} 14' 26'' \quad \frac{1}{2}s = 115^{\circ} 41' 44''$$

$$b = 110 \cdot 18 \cdot 20 \quad \frac{1}{2}s - a = 43 \cdot 27 \cdot 18$$

$$c = 48 \cdot 50 \cdot 42 \quad \frac{1}{2}s - b = 5 \cdot 23 \cdot 24$$

$$s = 231 \cdot 23 \cdot 28 \quad \frac{1}{2}s - c = 66 \cdot 51 \cdot 2$$

$$\log \sin(\frac{1}{2}s - b) = 8,9728253$$

$$\log \sin \frac{1}{2}s = 0,9547781$$

$$\log \sin(\frac{1}{2}s - c) = 9,9635435$$

$$\log \sin(\frac{1}{2}s - a) = 9,8374525$$

$$\hline 18,9363688$$

$$\hline 19,7922306$$

$$19,7922306$$

$$0,1441382 - 1 \quad (:2 \text{ [Algebra § 281]})$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = 9,5720691 - 10$$

$$\frac{1}{2} A = 20^{\circ} 28' 15'', 9.$$

Ebenso findet man $\frac{1}{2} B$ und $\frac{1}{2} C$, mithin ist:

$$A = 40^{\circ} 56' 31'', 8; \quad B = 139^{\circ} 48' 35'', 4; \quad C = 31^{\circ} 12' 13'', 5.$$

92.

Aufgabe. Es sind zwei Seiten, b , c , und ein Gegenwinkel, B , gegeben. Man sucht den anderen Gegenwinkel C . Es sei z. B. $b = 110^\circ 18' 20''$, $c = 48^\circ 50' 42''$, $B = 139^\circ 48' 35'', 4$.

Auflösung. In diesem Falle gebraucht man immer die Regel der vier *sinus*. Diese giebt: $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin b}$, hieraus:

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin b} \cdot \sin B.$$

Anmerkung. Da hier der Winkel C durch seinen *sinus* bestimmt wird und deshalb sowohl spitz als stumpf sein kann, so ist klar, daß durch zwei Seiten und einen Gegenwinkel im allgemeinen ein sphärisches Dreieck nicht bestimmt ist (vergl. § 29).

Weil aber $B + C$ mit $b + c$ gleichartig ist (§ 78 Anmerkung), so können wir jedoch folgendes festsetzen:

1) Ist $b + c = 180^\circ$, so ist auch $B + C = 180^\circ$, mithin:

$$C = 90^\circ, \text{ wenn } B = 90^\circ$$

$$C > 90^\circ \quad \text{„} \quad B < 90^\circ$$

$$C < 90^\circ \quad \text{„} \quad B > 90^\circ.$$

2) Ist $b + c < 180^\circ$, also auch $B + C < 180^\circ$, so ist:

$$C < 90^\circ, \text{ wenn } B \geq 90^\circ.$$

Ist aber $B < 90^\circ$, so ist C unbestimmt. Kann jedoch C nur auf eine Weise so genommen werden, daß $B + C < 180^\circ$, so ist C bestimmt.

3) Ist endlich $b + c > 180^\circ$, also auch $B + C > 180^\circ$, so ist:

$$C > 90^\circ, \text{ wenn } B \leq 90^\circ.$$

Wäre aber $B > 90^\circ$, so ist C wieder unbestimmt, es sei denn, daß C nur auf eine Weise so genommen werden kann, daß $B + C > 180^\circ$.

$$\log \sin B = 9,8097796$$

$$\log \sin c = 9,8767558$$

$$19,6865354$$

$$\log \sin b = 9,9721358$$

$$\log \sin C = 9,7143996$$

$$C = 31^\circ 12' 13'', 5.$$

93.

Aufgabe. Es sind alle drei Winkel gegeben, zum Beispiel $A = 40^\circ 56' 31'',8$, $B = 139^\circ 48' 35'',4$, $C = 31^\circ 12' 13'',5$. Man sucht die Seiten.

Auflösung. Nach § 75 hat man:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} S \cdot \cos (\frac{1}{2} S - A)}{\cos (\frac{1}{2} S - B) \cos (\frac{1}{2} S - C)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} S \cdot \cos (\frac{1}{2} S - B)}{\cos (\frac{1}{2} S - A) \cos (\frac{1}{2} S - C)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} S \cdot \cos (\frac{1}{2} S - C)}{\cos (\frac{1}{2} S - A) \cos (\frac{1}{2} S - B)}}$$

$$A = 40^\circ 56' 31'',8 \quad \frac{1}{2} S = 105^\circ 58' 40'',4$$

$$B = 139^\circ 48' 35'',4 \quad \frac{1}{2} S - A = 65^\circ 2' 8'',6$$

$$C = 31^\circ 12' 13'',5 \quad \frac{1}{2} S - B = -33^\circ 49' 55'',$$

$$S = 211^\circ 57' 20'',7 \quad \frac{1}{2} S - C = 74^\circ 46' 26'',9$$

$$\log -\cos \frac{1}{2} S = 9,4397531 \quad \log \cos (\frac{1}{2} S - B) = 9,9194308 \quad (\S 56)$$

$$\log \cos (\frac{1}{2} S - A) = 9,6253671 \quad \log \cos (\frac{1}{2} S - C) = 9,4193355$$

$$19,0651202$$

$$19,3387663$$

$$19,3387663$$

$$0,7263539 - 1 \quad (:2)$$

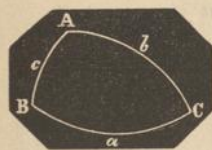
$$0,8631769 - 1$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} a = 9,8631769 - 10$$

$$\frac{1}{2} a = 36^\circ 7' 13'',$$

Ebenso findet man nach den beiden anderen Formeln $\frac{1}{2} b$ und $\frac{1}{2} c$ und daraus dann: $a = 72^\circ 14' 26''$; $b = 110^\circ 18' 20''$; $c = 48^\circ 50' 42''$.

94.



Aufgabe. Es sind zwei Winkel, A und B, und eine Gegenseite, a , gegeben. Man sucht die andere Gegenseite b .

Auflösung. Aus der Sinus-Regel

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A} \quad \text{folgt:}$$

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A}$$

Die Fälle, wo die durch ihren *sinus* gefundene Seite b bestimmt ist, ergeben sich wieder aus § 78, Anmerkung. Es ist nämlich:

1, Wenn $A + B = 180^\circ$, also auch $a + b = 180^\circ$:

$$b \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 90, \text{ wenn } a \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 90.$$

2, Wenn $A + B < 180^\circ$, so ist:

$$b < 90, \text{ wenn } a \geq 90.$$

Wäre $a < 90^\circ$, so kann b sowohl spitz als stumpf sein etc.

3, Wenn $A + B > 180^\circ$, so ist:

$$b > 90, \text{ wenn } a \leq 90.$$

Wäre $a > 90$, so kann b sowohl spitz als stumpf sein etc.

95.

Aufgabe. Von einem sphärischen Dreieck sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel a, b, C gegeben, zum Beispiel $a = 72^\circ 14' 26''$, $b = 110^\circ 18' 20''$, $C = 31^\circ 12' 13''$, 5. Man sucht die übrigen Stücke c, A, B .

Auflösung. In diesem Falle gebraucht man immer die Napier'schen Gleichungen und berechnet zuerst die Winkel A und B . Nach § 79 ist, wenn man, weil $b > a$, um negative Winkel zu vermeiden, a mit b und A mit B verwechselt:

$$\operatorname{tg} \frac{B+A}{2} = \cot \frac{1}{2} C \cdot \frac{\cos \frac{b-a}{2}}{\cos \frac{b+a}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B-A}{2} = \cot \frac{1}{2} C \cdot \frac{\sin \frac{b-a}{2}}{\sin \frac{b+a}{2}}$$

$$\log \cot \frac{1}{2} C = 10,5540220$$

$$\log \cot \frac{1}{2} C = 10,5540220$$

$$\log \cos \frac{b-a}{2} = 9,9755852$$

$$\log \sin \frac{b-a}{2} = 9,5133567$$

$$\hline 20,5296072$$

$$\hline 20,0673787$$

$$\log \cos \frac{b+a}{2} = 8,3466888 \text{ (n)}$$

$$\log \sin \frac{b+a}{2} = 9,9998928$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B+A}{2} = 12,1829184 \text{ (n)}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B-A}{2} = 10,0674859$$

$$\frac{B+A}{2} = 90^\circ 22' 33'', 6$$

$$A = 40^\circ 56' 31'', 8$$

$$\frac{B-A}{2} = 49 \cdot 26 \cdot 1, 8$$

mithin:

$$B = 139 \cdot 48 \cdot 35, 4.$$

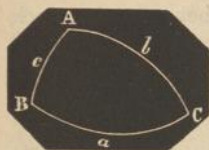
Die Seite c findet man jetzt nach der Sinus-Regel:

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}, \text{ woraus:}$$

$$\sin c = \frac{\sin C \cdot \sin a}{\sin A}.$$

Ob die völlig bestimmte Seite c spitz oder stumpf ist, entscheidet man nach der Regel, daß $a + c$ mit $A + C$ und $b + c$ mit $B + C$ immer gleichartig ist. Hier ist also $c = 48^\circ 50' 42''$. Weil nämlich $A + C < 180$, so muß $c < 90^\circ$ sein.

96.



Aufgabe. Von einem sphärischen Dreieck, ABC , ist eine Seite, c , und die beiden anliegenden Winkel A, B gegeben; man sucht die übrigen Stücke C, a, b .

Auflösung. In diesem Falle gebrauche man immer die Napier'schen Gleichungen und suche zuerst die beiden Seiten a, b . Man hat:

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}.$$

Den völlig bestimmten Winkel C findet man nun nach der Sinus-Regel, nämlich:

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a} \sin A = \frac{\sin c}{\sin b} \cdot \sin B.$$

Ob C spitz oder stumpf ist, entscheidet man nach der Regel, daß $A + C$ mit $a + c$ und $B + C$ mit $b + c$ gleichartig ist.

97.

Aufgabe. Es sind von vier aufeinander folgenden Stücken, A, b, C, a , eines sphärischen Dreiecks zwei Seiten, a, b , und ein Gegenwinkel, A , gegeben; man sucht den andern Winkel C .

Auflösung. Statt den Winkel C vermittelst der Formel:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

direkt oder durch Einführung eines Hilfswinkels zu berechnen, ist es bequemer, zuerst nach der Sinus-Regel den zweiten Gegenwinkel B zu suchen, nämlich:

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \sin A;$$

alsdann findet man den Winkel C nach der ersten oder zweiten Napier'schen Formel:

$$\cot \frac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}.$$

Wollte man auch noch die Seite c haben, so ist nach Formel 3 oder 4, § 79:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}.$$

Anmerkung. Die Fälle, wo der zuerst zu findende Winkel B bestimmt oder zweideutig ist, ergeben sich daraus, daß A+B mit a+b gleichartig ist.

Will man aber zuerst C mittelst eines Hilfswinkels, φ , nach der Formel:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

berechnen, so verfähre man nach § 65 (4. Fall).

Aus vorstehender Gleichung folgt:

$$\frac{\cot A}{\cos b} \cdot \sin C + \cos C = \cot a \cdot \operatorname{tg} b,$$

setzt man nun: $\frac{\cot A}{\cos b} = \cot \varphi$, so hat man, weil $\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot \sin C + \cos C = \cot a \cdot \operatorname{tg} b$$

$$\sin C \cdot \cos \varphi + \cos C \sin \varphi = \cot a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \sin \varphi$$

$$\sin (C + \varphi) = \cot a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \sin \varphi.$$

Diese Formel ist dann brauchbar, wenn man, wie es in der Praxis der Fall ist, im voraus weiß, ob $\angle C$ spitz oder stumpf ist.

98.

Aufgabe. Von vier aufeinander folgenden Stücken, A, b, C, a, eines sphärischen Dreiecks sind zwei Winkel, A, C, und eine Gegenseite, a, gegeben; man sucht die zwischen liegende Seite b.

Auflösung. Man hat aus:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

$$\cot a \cdot \sin b - \cos C \cdot \cos b = \cot A \cdot \sin C$$

$$\frac{\cot a}{\cos C} \cdot \sin b - \cos b = \cot A \cdot \operatorname{tg} C$$

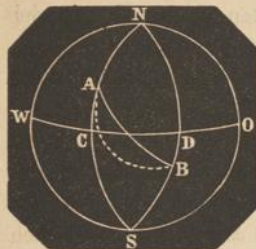
$$\cot \varphi \cdot \sin b - \cos b = \cot A \cdot \operatorname{tg} C$$

$$\cos \varphi \cdot \sin b - \cos b \cdot \sin \varphi = \cot A \cdot \operatorname{tg} C \cdot \sin \varphi$$

$$\sin (b - \varphi) = \cot A \cdot \operatorname{tg} C \cdot \sin \varphi,$$

worin φ durch $\cot \varphi = \frac{\cot a}{\cos C}$ (oder besser $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} a \cdot \cos C$) gegeben.

99.



Aufgabe. Es sind die geographischen Breiten und Längen zweier Örter, A und B, auf der Erde gegeben, nämlich $AC = b$, $BD = -b'$; $WC = l'$, $WD = l$, man sucht die Entfernung der beiden Örter A und B, d. h. den zwischen ihnen enthaltenen Bogen größten Kreises $AB = x$.

Auflösung. Denkt man durch A und B die beiden Meridiane NAS , NBS gezogen, so entsteht das sphärische Dreieck ANB , in welchem der Winkel $N = l - l'$, die Seite $AN = 90 - b$ und die Seite $BN = 90 + b'$. Jetzt kann man nach § 95 verfahren. Will man aber die Seite $AB = x$ mittelst eines Hilfswinkels, φ , berechnen, so folgt aus:

$$\cos N = \frac{\cos AB - \cos AN \cdot \cos BN}{\sin AN \cdot \sin BN}$$

$$\cos (l - l') = \frac{\cos x - \cos (90 - b) \cdot \cos (90 + b')}{\sin (90 - b) \cdot \sin (90 + b')}$$

$$\cos (l - l') = \frac{\cos x + \sin b \cdot \sin b'}{\cos b \cdot \cos b'}$$

$$\cos x = \cos (l - l') \cdot \cos b \cdot \cos b' - \sin b \cdot \sin b'$$

$$\cos x = \sin b' \left[\frac{\cos (l - l') \cos b \cdot \cos b'}{\sin b'} - \sin b \right]$$

$$\cos x = \sin b' [\cos (l - l') \cos b \cdot \cot b' - \sin b]$$

$$\cos (l - l') \cot b' = \operatorname{tg} \varphi \text{ gesetzt:}$$

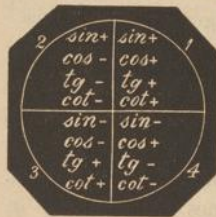
$$\begin{aligned} \cos x &= \sin b' \left[\frac{\sin \varphi \cdot \cos b}{\cos \varphi} - \sin b \right] \\ &= \frac{\sin b'}{\cos \varphi} [\sin \varphi \cdot \cos b - \cos \varphi \cdot \sin b] \\ \cos x &= \frac{\sin b' \cdot \sin(\varphi - b)}{\cos \varphi}, \text{ worin } \operatorname{tg} \varphi = \cos(l - l') \cot b'. \end{aligned}$$

Die Entfernung x findet man in Graden, die noch in Länge verwandelt werden, indem man auf einen Grad größten Kreises 15 geographische Meilen rechnet.

Anmerkung. Dafs ein zwischen zwei Punkten, A, B, enthaltener Bogen größten Kreises kleiner ist, als ein durch dieselben Punkte gelegter Bogen kleineren Kreises, erhellt leicht, wenn man den Bogen kleineren Kreises um die gemeinschaftliche Sehne gedreht und mit dem Bogen größten Kreises in einerlei Ebene gebracht denkt, wo dann letzterer, weil mit einem größern Radius beschrieben, vom erstern offenbar umgeben, folglich auch kleiner sein muß.

100.

Zusammenstellung der goniometrischen Formeln.



$$\begin{aligned} \sec a &= \frac{1}{\cos a} & \operatorname{cosec} a &= \frac{1}{\sin a} \\ \sin 0 &= 0 & \sin 90 &= 1 \\ \cos 0 &= 1 & \cos 90 &= 0 \\ \operatorname{tg} 0 &= 0 & \operatorname{tg} 90 &= \infty \\ \operatorname{cot} 0 &= \infty & \operatorname{cot} 90 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 180^\circ &= 0 & \sin 270^\circ &= -1 & \sin 360^\circ &= 0 \\ \cos 180^\circ &= -1 & \cos 270^\circ &= 0 & \cos 360^\circ &= 1 \\ \operatorname{tg} 180^\circ &= 0 & \operatorname{tg} 270^\circ &= -\infty & \operatorname{tg} 360^\circ &= \infty \\ \operatorname{cot} 180^\circ &= -\infty & \operatorname{cot} 270^\circ &= 0 & \operatorname{cot} 360^\circ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin k\pi &= 0 & \sin(4k+1)\frac{\pi}{2} &= 1 & \sin(4k+3)\frac{\pi}{2} &= -1 \\ \cos 2k\pi &= 1 & \cos(2k+1)\pi &= -1 & \cos(2k+1)\frac{\pi}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; & \cos 30^\circ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \operatorname{cot} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} & \operatorname{cot} 30^\circ &= \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \\ \sin 45^\circ &= \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \operatorname{tg} 45^\circ &= \operatorname{cot} 45^\circ = 1. \end{aligned}$$

$$\sin(-a) = -\sin a$$

$$\cos(-a) = \cos(+a)$$

$$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a$$

$$\operatorname{cot}(-a) = -\operatorname{cot} a$$

$$\sin(a-b) = -\sin(b-a)$$

$$\cos(a-b) = \cos(b-a)$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = -\operatorname{tg}(b-a)$$

$$\operatorname{cot}(a-b) = -\operatorname{cot}(b-a)$$

$$\sin(90-a) = \cos a \quad \sin(90+a) = \cos a \quad \sin(180-a) = \sin a$$

$$\cos(90-a) = \sin a \quad \cos(90+a) = -\sin a \quad \cos(180-a) = -\cos a$$

$$\operatorname{tg}(90-a) = \operatorname{cot} a \quad \operatorname{tg}(90+a) = -\operatorname{cot} a \quad \operatorname{tg}(180-a) = -\operatorname{tg} a$$

$$\operatorname{cot}(90-a) = \operatorname{tg} a \quad \operatorname{cot}(90+a) = -\operatorname{tg} a \quad \operatorname{cot}(180-a) = -\operatorname{cot} a$$

$$\sin(180+a) = -\sin a \quad \sin(270-a) = -\cos a \quad \sin(270+a) = -\cos a$$

$$\cos(180+a) = -\cos a \quad \cos(270-a) = -\sin a \quad \cos(270+a) = \sin a$$

$$\operatorname{tg}(180+a) = \operatorname{tg} a \quad \operatorname{tg}(270-a) = \operatorname{cot} a \quad \operatorname{tg}(270+a) = -\operatorname{cot} a$$

$$\operatorname{cot}(180+a) = \operatorname{cot} a \quad \operatorname{cot}(270-a) = \operatorname{tg} a \quad \operatorname{cot}(270+a) = -\operatorname{tg} a$$

$$\sin(360-a) = -\sin a \quad \sin(45^\circ - a) = \cos(45^\circ + a)$$

$$\cos(360-a) = \cos a \quad \cos(45 - a) = \sin(45 + a)$$

$$\operatorname{tg}(360-a) = -\operatorname{tg} a \quad \operatorname{tg}(45 - a) = \operatorname{cot}(45 + a)$$

$$\operatorname{cot}(360-a) = -\operatorname{cot} a \quad \operatorname{cot}(45 - a) = \operatorname{tg}(45 + a)$$

$$* \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \quad \cos^2 a = 1 - \sin^2 a$$

$$* \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a \quad \frac{\cos a}{\sin a} = \operatorname{cot} a$$

$$* \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{cot} a = 1 \quad \operatorname{tg} a = \frac{1}{\operatorname{cot} a} \quad \operatorname{cot} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \quad 1 + \operatorname{cot}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

$$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cot}^2 a}}$$

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{\operatorname{cot} a}{\sqrt{1 + \operatorname{cot}^2 a}}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a} = \frac{1}{\operatorname{cot} a}$$

$$\operatorname{cot} a = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 a}}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 a}} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

$$* \sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$$

$$* \cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$$

$$* \operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$* \operatorname{cot}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cot} a \cdot \operatorname{cot} b \mp 1}{\operatorname{cot} a \pm \operatorname{cot} b}$$

$$* \sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$* \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$* \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$* \operatorname{cot} 2a = \frac{\operatorname{cot}^2 a - 1}{2 \operatorname{cot} a} = \frac{1}{2} (\operatorname{cot} a - \operatorname{tg} a).$$

$$* \sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$* \sin a \cdot \cos a = \frac{\sin 2a}{2} \quad \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2}$$

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \quad \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a} \quad \operatorname{cot} 3a = \frac{\operatorname{cot}^3 a - 3 \operatorname{cot} a}{3 \operatorname{cot}^2 a - 1}$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sin a} - \sqrt{1 - \sin a}}{2}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sin a} + \sqrt{1 - \sin a}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$$

$$= \frac{1}{\sin a} - \operatorname{cot} a = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a} - 1}{\operatorname{tg} a}$$

$$\operatorname{cot} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}} = \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1 - \cos a}$$

$$= \frac{1}{\sin a} + \operatorname{cot} a = \operatorname{cot} a + \sqrt{1 + \operatorname{cot}^2 a}.$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \cos a - \cos b = 2 \sin \frac{b+a}{2} \sin \frac{b-a}{2}$$

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b} \quad \operatorname{cot} a \pm \operatorname{cot} b = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a \sin b}$$

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + a) \quad \sin a - \cos a = -\sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + a)$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{cot} a = \frac{2}{\sin 2a} \quad \operatorname{tg} a - \operatorname{cot} a = -2 \operatorname{cot} 2a$$

$$\sin a + \operatorname{tg} a = 2 \operatorname{tg} a \cos^2 \frac{a}{2} \quad \sin a - \operatorname{tg} a = -2 \operatorname{tg} a \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a + \operatorname{cot} a = 2 \operatorname{cot} a \sin^2 \left(45^\circ + \frac{a}{2} \right)$$

$$\cos a - \cot a = -2 \cot a \cos^2 \left(45^\circ + \frac{a}{2}\right)$$

$$1 + \sin a = 2 \sin^2 \left(45^\circ + \frac{a}{2}\right) \quad 1 - \sin a = 2 \cos^2 \left(45^\circ + \frac{a}{2}\right)$$

$$* 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \quad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$1 + \operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + a)}{\cos a} \quad 1 - \operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + a)}{\cos a}$$

$$1 + \cot a = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + a)}{\sin a} \quad 1 - \cot a = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + a)}{\sin a}$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ \pm a) = \frac{1 + \operatorname{tg} a}{1 \mp \operatorname{tg} a}$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cot \frac{a-b}{2} \quad \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$$

$$\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b) \sin(a-b) \quad \cos^2 a - \cos^2 b = \sin(b+a) \sin(b-a)$$

$$\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b} \quad \cot^2 a - \cot^2 b = \frac{\sin(b+a) \sin(b-a)}{\sin^2 a \sin^2 b}$$

$$1 - \sin^2 a = \cos^2 a$$

$$1 - \cos^2 a = \sin^2 a$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}^2 a}$$

$$1 - \cot^2 a = -2 \cot a \cot 2a$$

$$\frac{1 + \cos a}{\cos a} = \operatorname{tg} a \cot \frac{a}{2}$$

$$\frac{1}{\cos a} + 1 = \operatorname{tg} a \cot \frac{a}{2}$$

$$\frac{1 - \cos a}{\cos a} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

$$\frac{1}{\cos a} - 1 = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin(a+b) + \frac{1}{2} \sin(a-b)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$$

$$\operatorname{arc} \sin x \pm \operatorname{arc} \sin y = \operatorname{arc} \sin (x \sqrt{1-y^2} \pm y \sqrt{1-x^2})$$

$$\operatorname{arc} \cos x \pm \operatorname{arc} \cos y = \operatorname{arc} \cos [xy \mp \sqrt{(1-x)^2(1-y^2)}]$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

$$\operatorname{arc} \cot x \pm \operatorname{arc} \cot y = \operatorname{arc} \cot \frac{xy \mp 1}{y \pm x}$$

$$\operatorname{arc} \sin(-x) = -\operatorname{arc} \sin x$$

$$\operatorname{arc} \cos(-x) = \pi \pm \operatorname{arc} \cos x$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{arc} \cot(-x) = -\operatorname{arc} \cot x$$



Im Verlage von Friedr. Brandstetter in Leipzig ist ferner erschienen:

Lübsen, H. B., Ausführliches Lehrbuch der Analysis zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Siebente, verbesserte Auflage. gr. 8. (204 S.) 3,60 M.

—, **Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra** zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Einundzwanzigste Auflage. gr. 8. (261 S.) 4 M.

—, **Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung** zum Selbstunterricht. Mit Rücksicht auf das Notwendigste und Wichtigste. Mit 53 Figuren im Text. Sechste, verbesserte Auflage. gr. 8. (360 S.) 8 M.

—, **Ausführliches Lehrbuch der Elementargeometrie.** Ebene und körperliche Geometrie. Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 193 Figuren im Text. Fünfundzwanzigste, verbesserte Auflage. gr. 8. (178 S.) 3 M.

—, **Ausführliches Lehrbuch der analytischen oder höheren Geometrie.** Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf das Notwendigste und Wichtigste. Mit 122 Figuren im Text. Elfte Aufl. gr. 8. (210 S.) 4 M.

—, **Einleitung in die Mechanik.** Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 162 Figuren im Text. Vierte Auflage. gr. 8. (309 S.) 6,80 M.

Ferner:

Schurig, Rich., Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauche an niederen und höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. I. Teil. **Spezielle Zahlenlehre** (Ziffernrechnen). Zugleich ein Handbuch für Volksschullehrer. gr. 8. (286 S.) 3,60 M. II. Teil. **Allgemeine Zahlenlehre.** (Buchstabenrechnung). gr. 8. (430 S.) 6 M.

Kein gewöhnliches Lehrbuch der Arithmetik in der althergebrachten Form und den üblichen Unterrichtsmethoden sich anschliessend, sondern ein ganz eigenartiges Werk, zu welchem der Grundgedanke der durch langjährige Erfahrungen und Untersuchungen gewonnenen Überzeugung entspringen ist, dass die Lehren der Mathematik, insbesondere der Arithmetik, noch immer einer wahrhaft logischen Begründung, einer planmässigen Anordnung und einer für das stetige gesicherte Fortschreiten des Lernenden geeigneten Darstellung ermangeln. Es steht daher mit Sicherheit zu erwarten, dass die von dem Herrn Verfasser dieses Buchs eingeführte methodische Vereinfachung des arithmetischen Lehrgebäudes und dessen Zurückführung auf möglichst wenige, in strenger Folge logisch fortentwickelte Sätze sich in kurzen Bahn brechen und eine allgemeine Einführung in den mathematischen Lehrkursus finden werden.

Der III. Teil, welcher unter der Presse sich befindet und mit dem das Werk seinen Abschluss findet, wird die Algebra nebst ihrer Anwendung auf die Analysis enthalten.

Löbe, Dr. M., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik.

Für Gymnasien, Realschulen u. höhere Bürgerschulen. Zweite Aufl. 3 Hefte.

Heft I: Grundrechnungen mit ganzen, unbenannten und gleichbenannten Zahlen. — Grundrechnung mit ungleichbenannten Zahlen. 5 $\frac{1}{4}$ Bog. geh. 75 Pf.

Heft II: Rechnungen mit Decimalzahlen. — Rechnungen mit gemeinen Brüchen. 5 $\frac{1}{2}$ Bog. geh. 80 Pf.

Heft III: Prozentrechnung. — Verteilungs- und Mischungsrechnung. — Verhältnisse und Proportionen. 4 $\frac{3}{4}$ Bog. geh. 75 Pf.

—, **Auflösungen** zu den „Aufgaben aus der Arithmetik“
Heft 1—3. 3 $\frac{1}{4}$ Bog. geh. 1 M.

schienen:
um Selbst-
m Lebens.

Algebra
rationalen

istunter-
Mit 33
) 8 M.

Ebene
at auf die
Fünftai-

Höheren

igste mal
S.) 4 M.

ht, mit
Figuren

uche an
l Teil
cken für
Zahlen-

nd den
Werk, zu
rechner
rthmisch,
mit einer
aphie, in
liche die-
sktion
on fünf
weisen
den Ab-

metik.

l Hefte.
annaten
i Bog.

meinen

ng. —

etik“

