Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1884

Neuntes Buch. Rechtwinkliges sphärisches Dreieck

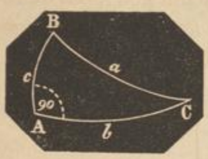
urn:nbn:de:bsz:31-273442

Neuntes Buch.

Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

80.

Erklärung. In einem bei A rechtwinkligen sphärischen Dreieck, ABC, heifsen die den rechten Winkel einschliefsenden Seiten b und c Katheten und die ihm gegenüber liegende Seite a die Hypotenuse. Es ist leicht einzusehen, dafs beim rechtwinkligen sphärischen Dreieck der Fall vorkommen kann, wo die Hypotenuse kleiner ist, als jede der beiden Katheten. (Man denke sich nur auf einem Erdglobus A als Pol und die Katheten b, c als Meridiane und beide über den Äquator hinaus verlängert, die Endpunkte dann durch einen Bogen gröfsten Kreises verbunden.)



Das rechtwinklige Dreieck kommt bei Anwendungen der sphärischen Trigonometrie am häufigsten vor und deshalb wollen wir noch die besonderen Formeln für dasselbe aufstellen. Es ist klar, dafs diese besonderen Formeln aus den vorhin gefundenen allgemeinen sehr leicht abgeleitet werden können und viel einfacher sein werden.

81.

Die vorhin gefundenen allgemeinen Formeln, in welchen der Winkel A vorkommt, sind:

$$\cos \mathrm{A} = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\frac{\sin a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\sin c}{\sin \mathrm{C}}$$

$$\cos a = \frac{\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} \cdot \cos \mathrm{C}}{\sin \mathrm{B} \cdot \sin \mathrm{C}}$$

$$\cos b = \frac{\cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{A} \cdot \cos \mathrm{C}}{\sin \mathrm{A} \cdot \sin \mathrm{C}}$$

$$\cos c = \frac{\cos \mathrm{C} + \cos \mathrm{A} \cdot \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A} \cdot \sin \mathrm{B}}$$

$$cot\,A \cdot sin\,B + cos\,B \cdot cos\,c = cot\,a \cdot sin\,c$$
$$cot\,A \cdot sin\,C + cos\,C \cdot cos\,b = cot\,a \cdot sin\,b$$
$$cot\,B \cdot sin\,A + cos\,A \cdot cos\,c = cot\,b \cdot sin\,c$$
$$cot\,C \cdot sin\,A + cos\,A \cdot cos\,b = cot\,c \cdot sin\,b.$$

82.

Setzt man nun in allen diesen vorstehenden Formeln $A = 90^0$ und beachtet, daſs $cos\,90^0 = 0$; $sin\,90^0 = 1$ und $cot\,90^0 = 0$, so erhält man die folgenden sechs, viel einfacheren Formeln für das bei A rechtwinklige sphärische Dreieck ABC:

$$cos\,a = cos\,b \cdot cos\,c \ldots\ldots (1)$$
$$sin\,a = \frac{sin\,b}{sin\,B} = \frac{sin\,c}{sin\,C} \ldots (2)$$
$$cos\,a = cot\,B \cdot cot\,C \ldots\ldots (3)$$
$$\left.\begin{array}{l} cos\,b = \dfrac{cos\,B}{sin\,C} \\ cos\,c = \dfrac{cos\,C}{sin\,B} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$
$$\left.\begin{array}{l} cos\,B = cot\,a \cdot tg\,c \\ cos\,C = cot\,a \cdot tg\,b \end{array}\right\} \ldots\ldots (5)$$
$$\left.\begin{array}{l} cot\,B = cot\,b \cdot sin\,c \\ cot\,C = cot\,c \cdot sin\,b \end{array}\right\} \ldots\ldots (6).$$

83.

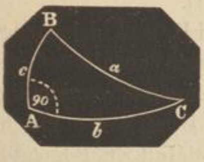
Nach vorstehenden sechs Formeln kann man also, wenn von einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck, ABC (auſser dem rechten Winkel A) irgend zwei Stücke gegeben sind, jedes der drei anderen leicht finden. Wäre z. B. b und C gegeben und B gesucht, so folgt aus der vierten Formel: $cos\,B = cos\,b \cdot sin\,C$. Um jedoch diese für den praktischen Astronomen und Steuermann wichtigen Formeln leichter behalten und anwenden zu können, merke man sich folgende, schon von Napier gegebene leichte Gedächtnisregel.

Wenn man den rechten Winkel A auſser acht läſst, so sind je drei der übrigen fünf Stücke so geordnet, daſs immer ein Stück die Mitte bildet, und dann die beiden anderen Stücke entweder unmittelbar zu beiden Seiten mit dem Mittelstücke verbunden oder noch durch ein Stück vom Mittel getrennt sind, wobei aber, wie gesagt, der rechte Winkel nicht mitzählt, die beiden Katheten also, als nicht durch ihn getrennt, sondern als unmittelbar an einander liegend zu betrachten sind. Hat man diese Ordnung unter irgend drei Stücken im sphärischen Dreieck herausgefunden, so lautet die einfache Regel: Es ist allemal der *cosinus* der Mitte gleich dem Produkt aus den *sinus* der beiden getrennten, und auch gleich dem Produkt aus den *cotangenten* der beiden verbundenen Stücke, wobei aber statt der trigonometrischen Funktion einer Kathete immer ihre Kofunktion gesetzt werden mufs.

Dafs in dieser leicht zu behaltenden Gedächtnisregel alle in § 82 aufgestellten sechs Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck wirklich enthalten sind, wollen wir jetzt nachweisen, und dabei zugleich diese Regel einüben.

84.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen den drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks zu finden.



Auflösung. Die Hypotenuse a ist hier offenbar die Mitte, die Kathete b durch den Winkel C und die Kathete c durch den Winkel B davon getrennt. Daher nach obiger Regel: $\cos a = \sin b \cdot \sin c$, also, weil b und c Katheten sind, und statt der trigonometrischen Funktionen derselben nach der Vorschrift ihre Kofunktionen gesetzt werden sollen, so erhält man die Formel (1) § 82, nämlich:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c.$$

Aus dieser unzweideutigen Formel folgt, dafs, wenn $\cos b$ und $\cos c$ einerlei Vorzeichen haben, die Hypotenuse $< 90^0$ ist.

85.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen zwei Katheten b, c und einem schiefen Winkel B zu finden.

Auflösung. Weil der rechte Winkel nicht mitzählt, so ist hier offenbar c die Mitte, B und b sind unmittelbar damit verbunden, daher: $\cos c = \cot \mathrm{B} \cdot \cot b$, mithin weil b und c Katheten sind:

$$\sin c = \cot \mathrm{B} \cdot \operatorname{tg} b, \text{ hieraus:}$$

$$\cot \mathrm{B} = \frac{\sin c}{\operatorname{tg} b} \; (= \sin c \cdot \cot b) \cdots [\S\ 82, (6)].$$

Diese Formel zeigt, dafs, weil alle Winkel und Seiten $< 180^0$, also $\sin c$ immer positiv ist, $\cot \mathrm{B}$ und $\cot b$ immer einerlei Vorzeichen haben, mithin im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ein Winkel und die ihm gegenüber liegende Seite, z. B. B und b, immer **gleichartig** sind, d. h. wenn:

$$B \lesseqgtr 90^0, \text{ auch } b \lesseqgtr 90^0.$$

Durch obige Formel: $\cot B = \sin c \cdot \cot b$ ist also sowohl B als b vollkommen bestimmt. Die aus B und b zu berechnende Kathete c aber $\left(\sin c = \frac{\cot B}{\cot b} = \frac{tg\, b}{tg\, B}\right)$ bleibt zweideutig, wenn man nicht weiſs, ob der ihr gegenüber liegende Winkel C spitz oder stumpf ist.

86.

Aufgabe. Man suche eine Gleichung zwischen der Hypotenuse a, der Kathete b und dem Winkel B.

Auflösung. Weil der rechte Winkel nicht mitzählt, so ist hier b die Mitte, a durch C, und B durch c davon getrennt, daher: $\cos b = \sin a \cdot \sin B$, mithin, weil b eine Kathete ist:

$$\sin b = \sin a \cdot \sin B \quad [\S\ 82,\ (2)].$$

Durch diese Formel sind die Gröſsen b und B, weil gleichartig, vollkommen bestimmt (§ 85). Was aber die durch ihren *sinus* gegebene Hypotenuse a betrifft, so ist sie im allgemeinen zweideutig. Weil jedoch $A + B$ oder (weil $A = 90$), $90 + B$ mit $a + b$ gleichartig ist, so sind die besonderen Fälle, wo a bestimmt ist, folgende:

1) Wenn $B = 90^0$, also auch $b = 90^0$, so ist auch $a = 90^0$.

2) Sei $B < 90$, also auch $b < 90$ und auch $a + b < 180^0$. Giebt es nun von den beiden Werten von a nur einen, der zu b addiert $< 180^0$ giebt, so ist a bestimmt.

3) Sei $B > 90$, also auch $a + b > 180^0$. Giebt es nun unter den beiden Werten für a nur **einen**, der zu b addiert $> 180^0$ giebt, so ist a bestimmt, sonst nicht.

87.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen den zwei schiefen Winkeln B, C und einer Kathete b zu finden.

Auflösung. Hier ist B die Mitte, von welcher C durch a und b durch c getrennt ist, daher $\cos B = \sin C \cdot \sin b$, mithin, weil b eine Kathete ist:

$$\cos B = \sin C \cdot \cos b \quad [\S\ 82,\ (4)].$$

Durch diese Formel sind B und b vollkommen bestimmt, C aber bleibt zweideutig.

88.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen der Hypotenuse a und den zwei schiefen Winkeln B und C zu finden.

Auflösung. Hier ist a die Mitte, B und C damit verbunden, mithin:

$$\cos a = \cot B \cdot \cot C \quad [\S\ 82,\ (3)].$$

89.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen a, c, B zu finden.

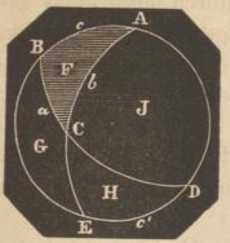
Auflösung. Hier ist B die Mitte, a und c damit verbunden, daher $\cos B = \cot a \cdot \cot c$, oder, weil c eine Kathete ist:

$$\cos B = \cot a \cdot \operatorname{tg} c \quad [\S\ 82\ (5)].$$

Man sieht also, daſs diese leichte Gedächtnisregel wirklich alle sechs in § 82 für das rechtwinklige sphärische Dreieck aufgestellten Formeln umfaſst.

90.

Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks.



Lehrsatz. Bezeichnet F den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks, ABC, und r den *radius* der zugehörigen Kugel, so ist:

$$F = \frac{A + B + C - 180}{180} \cdot \pi r^2.$$

Beweis. Der leichtern Vorstellung halber nehme man eine Kugel zur Hand und zeichne darauf ein sphärisches Dreieck, ABC, verlängere je zwei Bögen desselben vorwärts und rückwärts, bis sie sich abermals schneiden, so wird dadurch die ganze Oberfläche der Kugel in acht Dreiecke geteilt, wovon jedoch hier nur die auf der oberen Hälfte liegenden vier, F, G, H, J, zu sehen sind. Weil nun jeder gröſste Kreis ABEDA die Kugel halbiert und zwei gröſste Kreise wie ABE, ACE sich gegenseitig halbieren, so ist klar, daſs die vier Dreiecke F, G, H, J wirklich die halbe Kugelfläche ($2\pi r^2$) einnehmen; ferner, daſs die Verlängerung der beiden Seiten a, b über A und B hinaus, mit c ein Dreieck, H', auf der anderen Seite der Kugel bilden, welches dem Dreieck H, wenn auch symmetrisch, doch an Gröſse vollkommen gleich ist, weil sie aus gleichgroſsen Bögen gebildet sind. (So ist z. B. $c' = c$, weil beide zu Bogen BE addiert einen Halbkreis geben.)

Nun ist der Streifen der Kugeloberfläche, welchen die beiden Halbkreise ABE und ACE einschliefsen, das sogenannte Kugelzweieck, der eben so vielte Teil von der ganzen Kugeloberfläche, als es der sphärische Winkel A von 360° ist, daher:

$$F + G = \frac{A}{360} \cdot 4\pi r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Ebenso ist der Flächeninhalt der von den beiden Halbkreisen BAD, BCD gebildeten Zweiecks, nämlich:

$$F + J = \frac{B}{360} \cdot 4\pi r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Ferner bildet das Dreieck F mit dem auf der anderen Seite der Kugel liegenden Dreieck H' ein Kugelzweieck, dessen Fläche $F + H' = \frac{C}{360} \cdot 4\pi r^2$, daher, weil $H = H'$

$$F + H = \frac{C}{360} \cdot 4\pi r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Addiert man die Gleichungen, so ist:

$$3F + G + H + J = \frac{A + B + C}{360} \cdot 4\pi r^2.$$

Zieht man hiervon $F + G + H + J = 2\pi r^2$ ab, so ist:

$$2F = \frac{A + B + C}{360} 4\pi r^2 - 2\pi r^2$$

$$F = \left(\frac{A + B + C}{180} - 1\right) \pi r^2$$

$$F = \frac{A + B + C - 180}{180} \cdot \pi r^2$$

oder, wenn man den Überschufs der drei sphärischen Winkel A, B, C über 180°, den sogenannten „sphärischen Excefs" mit e bezeichnet:

$$F = \frac{e}{180} \cdot \pi r^2.$$