Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1884

Zweiter Teil. Sphärische Trigonometrie

urn:nbn:de:bsz:31-273442

Zweiter Teil.

Sphärische Trigonometrie.

Achtes Buch.

68.

Man denke sich von einem Punkte, S, drei gerade Linien ausgehend, wovon SA, SB in der Ebene des Papiers liegen mögen, die dritte Linie SC aber darüber hervortritt. Denkt man sich durch je zwei Linien eine Ebene gelegt, so entsteht bekanntlich eine körperliche Ecke, das sogenannte körperliche Dreieck,*) welches folgende sechs Bestandteile enthält: 1) die drei Kantenwinkel, welche je zwei der von S ausgehenden drei Linien miteinander bilden, und 2) die drei Flächenwinkel, welche je zwei der drei Ebenen miteinander bilden.**) Man setze die drei Kantenwinkel BSC $= a$, ASC $= b$ und den unteren ASB $= c$ und bezeichne die gegenüber liegenden drei Flächenwinkel mit den gleichlautenden Buchstaben A, B, C, dann ist die allgemeine Aufgabe der sphärischen Trigonometrie: allgemeine Formeln zu finden, nach welchen man aus beliebig gegebenen drei Winkeln des körperlichen Dreiecks die drei übrigen (insofern sie durch erstere drei bestimmt sind) berechnen kann.

*) Die Ecke einer dreiseitigen Pyramide.

**) Man mufs sich hier die beiden durch $\angle$ASC und $\angle$BSC gelegten Ebenen dachförmig gegen die untere durch $\angle$ASB gelegte Ebene aufgerichtet denken. Anfänger mögen sich diese Figur versinnlichen, was durch zweimalige Brechung eines Stück Papiers geschehen kann.

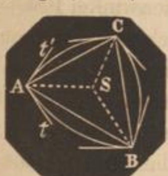
69.

Denkt man sich aus S mit einem beliebigen Radius, SA, zwischen den Schenkeln der drei Kantenwinkel *a*, *b*, *c* des körperlichen Dreiecks Kreisbögen BC, AC, AB beschrieben, so enthalten diese Bögen, in Graden ausgedrückt, ebenso viel Grade als die zugehörigen Kantenwinkel an der Spitze S und können also statt dieser gesetzt und mit denselben Buchstaben *a*, *b*, *c* bezeichnet werden. Dies pflegt man in der Regel zu thun, und da die drei Bögen *a*, *b*, *c*. weil mit demselben Radius beschrieben, offenbar einen Teil von der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt S und deren Radius SA (= SB = SC) ist, einschliefsen und Bögen gröfsten Kreises sind, so nennt man ein solches krummliniges Dreieck auf der Oberfläche einer Kugel (Sphäre) schicklicher Kugeldreieck oder sphärisches Dreieck, daher denn auch der Titel: sphärische Trigonometrie.

Unter Bögen oder Seiten eines sphärischen Dreiecks mufs man sich also nicht Längen, sondern immer die Winkel am Mittelpunkt der zugehörigen Kugel denken, welche die von den Endpunkten der Bögen dahin gezogenen Radien (Kanten) miteinander bilden, mit anderen Worten: man mufs in einem sphärischen Dreieck die Seiten (welche stets Bögen **gröfsten** Kreises sein müssen) immer in Graden ausgedrückt denken.

70.

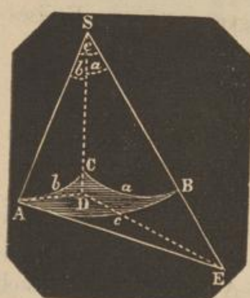
Zieht man aus dem Durchschnittspunkt A zweier Seiten (Bögen) BA, CA eines sphärischen Dreiecks die beiden Tangenten A*t*, A*t'* an dieselben, mithin senkrecht auf dem *radius* SA der Kugel, und zwar die eine in der Ebene ASB, die andere in der Ebene ASC, so stellt der Winkel *t*A*t'* = A den Neigungswinkel der beiden Bögen BA, CA gegeneinander dar. Ebenso an den beiden anderen Punkten B, C, und diese drei Winkel A, B, C, welche, wenn man sich das körperliche Dreieck S, ABC (vergl. Fig. zu § 69) denkt, offenbar die Flächenwinkel desselben sind, sind die eigentlichen Winkel des sphärischen Dreiecks ABC, weil man zur Abkürzung des Vortrags die drei anderen Winkel *a*, *b*, *c* die Seiten des sphär. Dreiecks nennt. Vergleicht man die Winkel des sphärischen



Dreiecks mit den Winkeln des Sehnendreiecks, so erhellt leicht, daſs die Summe der drei (Flächen-) Winkel A, B, C eines sphärischen Dreiecks immer gröſser als zwei und kleiner als sechs rechte Winkel ist. Auch ist klar, daſs die Summe zweier Seiten (Kantenwinkel) immer gröſser ist, als die dritte, und jede Seite (Kantenwinkel) kleiner, als 180^0 ist. Weil nämlich gröſste Kreise sich halbieren (Geometrie § 175), so folgt, daſs, wenn man durch den einen Endpunkt eines solchen Halbkreises einen Bogen gröſsten Kreises legt, er, verlängert, notwendig auch durch den anderen Endpunkt gehen muſs und mit ersterem Halbkreise ein sogenanntes Kugelzweieck bildet. Es kann folglich keine Seite in einem sphärischen Dreieck $= 180^0$ sein. Verlängert man die eine Seite eines solchen Zweiecks, so kann man durch die Endpunkte dieser zwei Bögen gröſsten Kreises legen, welche sich innerhalb des Zweiecks schneiden und mit ersterer Seite, $> 180^0$, ein Dreieck bilden, welches einen einspringenden oder überstumpfen Winkel hat; solche Dreiecke lassen wir jedoch unberücksichtigt.

71.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks ABC einen Winkel, z. B. A, berechnen kann.



Auflösung. Da der sphärische Winkel A nichts anderes ist, als die Neigung der beiden Ebenen ASC und ASB gegeneinander, so errichten wir auf ihrer Durchschnittslinie SA, im Punkte A, die beiden Perpendikel AE und AD, wovon das erstere in der unteren Ebene ASB liegt und den verlängerten Radius SB in E trifft,*) das andere in der dachförmig dagegen aufstehenden Ebene ASC liegt und den verlängerten Radius SC in D trifft, so daſs also $\angle SAE = 90^0$ und auch $\angle SAD = 90^0$, dann ist der Winkel $DAE = A$ der gesuchte (Geometrie § 155).

*) Die Fälle, wo $AE \parallel SB$ oder $AD \parallel SC$ ist, oder wo ein, zwei oder alle drei Winkel, a, b, c, rechte, oder stumpfe wären, können wir als specielle Fälle aus den allgemeinen Gleichungen ableiten. Die Schlüsse bleiben übrigens ganz dieselben, wenn z. B. der Winkel ASB stumpf wäre und der Fuſspunkt A der beiden Perpendikel AE, AD auf der Verlängerung von AS über S hinaus angenommen werden müſste.

Denkt man noch DE gezogen, so hat man aus dem Dreieck DAE:

$$\cos A = \frac{AD^2 + AE^2 - DE^2}{2 \cdot AD \cdot AE} \quad (\S\ 30).$$

Ebenso hat man aus dem gegen ASE dachförmig aufstehenden Dreieck DSE, in welchem der Kantenwinkel DSE $= a$ ist (§ 69):

$$\cos a = \frac{SD^2 + SE^2 - DE^2}{2 \cdot SD \cdot SE}.$$

Hieraus den Wert von DE^2 gezogen und in die erste Gleichung substituiert, kommt:

$$\cos A = \frac{2\,SD \cdot SE \cdot \cos a - (SD^2 - AD^2) - (SE^2 - AE^2)}{2\,AD \cdot AE}.$$

Die beiden Dreiecke DAS, EAS sind bei A rechtwinklig, SD und SE die Hypotenusen, daher $SD^2 - AD^2 = AS^2$, ebenso $SE^2 - AE^2 = AS^2$, mithin:

$$\cos A = \frac{2 \cdot SD \cdot SE \cdot \cos a - 2 \cdot AS^2}{2\,AD \cdot AE}$$

$$\cos A = \frac{SD}{AD} \cdot \frac{SE}{AE} \cdot \cos a - \frac{AS}{AD} \cdot \frac{AS}{AE}.$$

Nun ist in dem bei A rechtwinkligen Dreieck SAD, $\frac{AD}{SD} = \sin b$, mithin $\frac{SD}{AD} = \frac{1}{\sin b}$; ferner: $\frac{AS}{AD} = \cot b = \frac{\cos b}{\sin b}$. Im rechtwinkligen Dreieck SAE ist $\frac{AE}{SE} = \sin c$, also: $\frac{SE}{AE} = \frac{1}{\sin c}$; ferner: $\frac{AS}{AE} = \cot c = \frac{\cos c}{\sin c}$; dies substituiert, hat man:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}.$$

In dieser Gleichung ist von Lineargröfsen keine Spur mehr vorhanden. Für die beiden andern Winkel B und C ist offenbar ebenso:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}.$$

Wäre, als specieller Fall, jede der drei Seiten des sphärischen Dreiecks, $a, b, c, = 90^0$, so wäre $\cos A = 0$, $\cos B = 0$, $\cos C = 0$, also auch $\angle A = \angle B = \angle C = 90$; sind alle drei Seiten $a, b, c, > 90$, so sind auch alle drei Winkel A, B, C stumpf, weil dann ihre *cosinus* negativ.

72.

Die vorstehenden Formeln, nach welchen man aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks die Winkel berechnen kann, sind zwar die Fundamentalformeln der ganzen sphärischen Trigonometrie, indem alle übrigen daraus abgeleitet werden können, für die logarithmische Rechnung sind sie aber etwas unbequem und wir wollen deshalb noch eine für die numerische Rechnung bequemere daraus ableiten. Man hat aus:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin b \cdot \sin c - \cos a + \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c}, \text{ also } (\S\ 52,\ 53):$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2 \sin \frac{a + b - c}{2} \cdot \sin \frac{a + c - b}{2}}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a + b - c}{2} \cdot \sin \frac{a + c - b}{2}}{\sin b \cdot \sin c}} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin b \cdot \sin c + \cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \cdot \sin c} \quad (\S\ 52)$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2 \sin \frac{a + b + c}{2} \cdot \sin \frac{b + c - a}{2}}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a + b + c}{2} \cdot \sin \frac{b + c - a}{2}}{\sin b \cdot \sin c}} \quad \ldots\ldots (2)$$

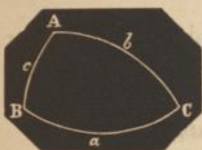
$$tg \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a + b - c}{2} \cdot \sin \frac{a + c - b}{2}}{\sin \frac{a + b + c}{2} \cdot \sin \frac{b + c - a}{2}}} \quad \ldots\ldots (3).$$

Von diesen drei Formeln ist die letztere vorzuziehen, weil die Tangenten immer die gröfsten Differenzen haben. Sie läfst sich aber noch etwas vereinfachen. Setzt man nämlich: $a+b+c=s$, also $\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}s$; $\frac{a+b-c}{2}=\frac{1}{2}s-c$ etc., so ist:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{1}{2}s-b\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}s-c\right)}{\sin\frac{1}{2}s\cdot\sin\left(\frac{1}{2}s-a\right)}}.$$

Zahlenbeispiele hierzu siehe § 91.

73.



Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreieck verhalten sich die *sinus* der Winkel, wie die *sinus* der gegenüber liegenden Seiten. In Zeichen:

$$\frac{\sin\mathrm{A}}{\sin\mathrm{B}}=\frac{\sin a}{\sin b};\qquad \frac{\sin\mathrm{A}}{\sin\mathrm{C}}=\frac{\sin a}{\sin c};\qquad \frac{\sin\mathrm{B}}{\sin\mathrm{C}}=\frac{\sin b}{\sin c}.$$

Beweis. Es folgt aus $\cos\mathrm{A}=\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}$ (§ 71):

$$1-\cos^2\mathrm{A}=1-\frac{(\cos a-\cos b\cdot\cos c)^2}{\sin^2 b.\sin^2 c}$$

$$\sin^2\mathrm{A}=\frac{\sin^2 b\cdot\sin^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c-\cos^2 b\cdot\cos^2 c}{\sin^2 b\cdot\sin^2 c}.$$

Nun ist aber $\sin^2 b\cdot\sin^2 c=(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)=1-\cos^2 b-\cos^2 c+\cos^2 b\cdot\cos^2 c$. Letzterer Ausdruck statt $\sin^2 b\cdot\sin^2 c$ gesetzt, kommt:

$$\sin^2\mathrm{A}=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 b\cdot\sin^2 c}.$$

In dieser Gleichung ist der Zähler rechter Hand offenbar eine symmetrische Funktion von a, b, c (d. h. die Verwechselung dieser Gröfsen bringt keine Veränderung hervor); setzen wir ihn Kürze halber $=z^2$, so ist:

$$\sin\mathrm{A}=\frac{z}{\sin b\cdot\sin c}\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Werden die beiden anderen Gleichungen:

$$\cos\mathrm{B}=\frac{\cos b-\cos a\cdot\cos c}{\sin a\cdot\sin c}\quad\text{und}\quad\cos\mathrm{C}=\frac{\cos c-\cos a\cdot\cos b}{\sin a\cdot\sin b}$$

ebenso behandelt, so kommt, was auch ohne Rechnung klar ist, indem der Zähler rechter Hand, weil eine symmetrische Funktion von a, b, c, in beiden Fällen offenbar ganz derselbe, wie in (1) ist:

$$\sin B = \frac{z}{\sin a \cdot \sin c} \ldots\ldots(2) \qquad \sin C = \frac{z}{\sin a \cdot \sin b} \ldots\ldots(3).$$

Die Gleichungen 1, 2, 3 paarweise durcheinander dividiert, kommt, wie behauptet, $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}$ etc., oder auch, weil die Seiten doch in Graden ausgedrückt (Winkel) sind, so geschrieben:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

74.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei Winkeln A, B, C eines sphärischen Dreiecks eine Seite, z. B. a, berechnen kann.

Auflösung. Die drei Fundamentalgleichungen (§ 71):

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$

enthalten die drei gegebenen Gröſsen, A, B, C und drei unbekannte a, b, c. Um die Unbekannte a zu finden, eliminieren wir die beiden andern b, c, oder nur $\cos b$, $\cos c$, indem, zufolge § 73, $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ und $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}$, mithin $\sin b$ durch $\sin a \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$ und $\sin c$ durch $\sin a \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$ ersetzt werden kann.

Reduzieren wir, um zuerst $\cos b$ zu eliminieren, jede der drei Gleichungen auf $\cos b$, so kommt:

$$\cos b = \frac{\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos c}$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos b = \frac{\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C}{\cos a}.$$

Diese für $\cos b$ gefundenen Ausdrücke paarweise gleich gesetzt, geben folgende zwei neue Gleichungen:

$$\frac{\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos c} = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \ldots.(1)$$

$$\frac{\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C}{\cos a} = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \ldots.(2).$$

Um aus diesen beiden Gleichungen *cos c* zu eliminieren, reduziere man jede auf *cos c*. Die erste giebt:

$$\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \cos^2 c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B$$

$$\cos a\,(1 - \cos^2 c) - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B$$

$$\cos a \cdot \sin^2 c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B$$

$$\cos c = \frac{\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A}{\sin a \cdot \cos B}.$$

Aus der Gleichung (2) folgt:

$$\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \cos^2 a \cdot \cos c + \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos c\,(1 - \cos^2 a) - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos c \cdot \sin^2 a - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos c = \frac{\cos a \cdot \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos C}{\sin a}.$$

Die beiden für *cos c* erhaltenen Ausdrücke gleich gesetzt, geben:

$$\frac{\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A}{\sin a \cdot \cos B} = \frac{\cos a \cdot \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos C}{\sin a}.$$

Aus dieser Endgleichung folgt:

$$\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin c \cdot \cos^2 B + \sin b \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$\cos a \cdot \sin c\,(1 - \cos^2 B) = \sin b \cdot \cos A + \sin b \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$\cos a \cdot \sin c \cdot \sin^2 B = \sin b\,(\cos A + \cos B \cdot \cos C)$$

$$\cos a = \frac{\sin b}{\sin c} \cdot \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin^2 B}.$$

Nach § 73 kann man aber $\frac{\sin B}{\sin C}$ statt $\frac{\sin b}{\sin c}$ setzen, mithin ist auch, nach gehöriger Reduktion:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

ebenso: $$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}.$$

75.

Vorstehende Formeln, welche mit den Grundformeln eine auffallende Ähnlichkeit haben, sind aber, ebenso wie jene, für die logarithmische Rechnung etwas unbequem. Auf dieselbe

Weise aber, wie in § 72, lassen sich bequemere daraus ableiten. Man hat nämlich aus:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$1 - \cos a = 1 - \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin B \cdot \sin C - \cos A - \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{-(\cos A + \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = -\left\{\frac{\cos A + \cos (B + C)}{\sin B \cdot \sin C}\right\}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = -\frac{2 \cos \frac{A+B+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C-A}{2}}{\sin B \cdot \sin C} \quad (\S\ 52,\ 52.)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{A+B+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C-A}{2}}{\sin B \cdot \sin C}} \quad \ldots\ldots(1).$$

Das Imaginäre dieser Formel ist nur scheinbar, denn da (§ 70) $A + B + C > 180^0$ und $< 540^0$, so ist auch $\frac{A+B+C}{2} > 90^0$ und $< 270^0$ und folglich $\cos \frac{A+B+C}{2}$ immer eine negative Gröſse, welche durch das davor stehende notwendige Minus-Zeichen positiv gemacht wird.

Ferner hat man auch:

$$1 + \cos a = 1 + \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin B \cdot \sin C + \cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos A + \cos (B - C)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{2 \cos \frac{A+B-C}{2} \cdot \cos \frac{A+C-B}{2}}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos \frac{A+B-C}{2} \cdot \cos \frac{A+C-B}{2}}{\sin B \cdot \sin C}} \quad \ldots\ldots\ldots(2).$$

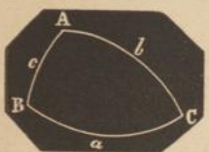
Dividiert man (1) durch (2), so erhält man die praktisch immer sichere Formel:

$$tg\ \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{A+B+C}{2}\cdot\cos\frac{B+C-A}{2}}{\cos\frac{A+B-C}{2}\ \cos\frac{A+C-B}{2}}}$$

oder, wenn man wieder $A + B + C = S$ setzt, kürzer:

$$tg\ \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S\cdot\cos(\frac{1}{2}S - A)}{\cos(\frac{1}{2}S - B)\cdot\cos(\frac{1}{2}S - C)}}.$$

76.



Aufgabe. Eine Gleichung zwischen vier aufeinander folgenden Stücken eines sphärischen Dreiecks, z. B. für A, c, B, a zu finden, so daſs man, wenn irgend drei davon gegeben sind, das vierte danach berechnen kann.

Auflösung. Die Elimination von $\cos b$ aus den beiden Grundformeln

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= \frac{\cos a - \cos b\cdot\cos c}{\sin a\cdot\sin c}\\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a\cdot\cos c}{\sin a\cdot\sin c}\end{aligned}\right\}\text{ giebt § 74:}$$

$$\cos a\cdot\cos c + \sin a\cdot\sin c\cdot\cos B = \frac{\cos a - \sin b\cdot\sin c\cdot\cos A}{\cos c}$$

$$\cos a\cdot\cos^2 c + \sin a\cdot\sin c\cdot\cos c\cdot\cos B = \cos a - \sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$$

$$\sin a\cdot\sin c\cdot\cos c\cdot\cos B = \cos a\,(1 - \cos^2 c) - \sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$$

$$\sin a\cdot\cos c\cdot\cos B = \cos a\cdot\sin c - \sin b\cdot\cos A$$

$$\cos c\cdot\cos B = \frac{\cos a}{\sin a}\cdot\sin c - \frac{\sin b}{\sin a}\cdot\cos A$$

$$\cos c\cdot\cos B = \cot a\cdot\sin c - \frac{\sin B}{\sin A}\cdot\cos A\ \ (\text{§ } 73)$$

$$\cot A\ \sin B + \cos B\cdot\cos c = \cot a\cdot\sin c.$$

Obgleich sich diese Formel, um danach aus drei gegebenen Gröſsen die vierte zu finden, durch Einführung eines Hilfswinkels für die logarithmische Rechnung bequemer machen läſst, so werden wir doch für diesen praktischen Zweck noch bequemere Formeln finden, und legen ihr deshalb auch nur eine theoretische Wichtigkeit bei.

77.

Zufolge der § 72 gefundenen Gleichungen ist:

$$1,\quad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\cdot\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin b\cdot\sin c}}$$

$$2,\quad \sin\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\frac{b+c-a}{2}\cdot\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a\cdot\sin c}}$$

$$3,\quad \sin\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+c-b}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin a\cdot\sin b}}$$

$$4,\quad \cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\cdot\sin c}}$$

$$5,\quad \cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin a\cdot\sin c}}$$

$$6,\quad \cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a\cdot\sin b}}.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit der fünften und dividiert durch die sechste etc., wie nachfolgend durch $\frac{(1)\cdot(5)}{(6)}$ etc. angedeutet, so kommt:

$$\frac{(1)\cdot(5)}{(6)};\quad \frac{\sin\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin c}\ldots\ldots(7)$$

$$\frac{(2)\cdot(4)}{(6)};\quad \frac{\cos\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin c}\ldots\ldots(8)$$

$$\frac{(4)\cdot(5)}{(3)};\quad \frac{\cos\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{a+b+c}{2}}{\sin c}\ldots\ldots(9)$$

$$\frac{(1)\cdot(2)}{(3)};\quad \frac{\sin\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin c}\ldots\ldots 10).$$

Durch paarweise Addition und Subtraktion dieser vier Gleichungen erhält man mit Berücksichtigung der Formeln in § 45, § 47, § 52 (48 und 49), § 49 (28):

$$(7)+(8);\quad \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{1}{2}c}\cdots(11)$$

$$(7)-(8);\quad \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{2\cos\frac{1}{2}c\cdot\sin\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{1}{2}c}\cdots(12)$$

$$(9)-(10);\quad \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{1}{2}c}\cdots(13)$$

$$(9)+(10);\quad \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{1}{2}c}\cdots(14).$$

78.

Aus den vier letzteren Formeln folgt nun, daſs:

$$\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}C\cdot\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}c=\sin\tfrac{1}{2}C\cdot\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\sin\frac{A-B}{2}\cdot\sin\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}C\cdot\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos\frac{A-B}{2}\cdot\sin\tfrac{1}{2}c=\sin\tfrac{1}{2}C\cdot\sin\frac{a+b}{2}.$$

Diese vier merkwürdigen, von Gauſs gefundenen Gleichungen, von welchen jede alle sechs Stücke des sphärischen Dreiecks enthält und von welchen in der *theoria motus* so vielfacher Gebrauch gemacht ist, hat seinerseits Delambre auch gefunden,*) jedoch ihre Wichtigkeit ganz übersehen. Sie dienen nämlich dem Astronomen, der oft sphärische Dreiecke zu berechnen hat, zur Kontrole. Hierauf hat zuerst Gauſs aufmerksam gemacht und ihren Nutzen hervorgehoben.**)

Anmerkung. Weil sowohl jeder Winkel als jede Seite im sphärischen Dreieck immer kleiner als 180°, mithin auch $\sin\frac{1}{2}C$ und $\cos\frac{1}{2}c$ immer positiv ist, so folgt aus der zweiten Formel, nämlich aus:

$$\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}c=\sin\tfrac{1}{2}C\cdot\cos\frac{a+b}{2},$$

*) *Connaissance des temps* 1808.

**) Göttinger Gelehrten-Anzeigen 1811, S. 1984.

dafs $\cos\frac{A+B}{2}$ und $\cos\frac{a+b}{2}$ immer einerlei Vorzeichen haben, mithin die Summe zweier Seiten mit der Summe der beiden ihnen gegenüber liegenden Winkel immer gleichartig ist, d. h.: beiderlei Summen sind gleichzeitig über, unter oder genau $=180^0$. In Zeichen, wenn:

$$A+B \gtreqless 180^0, \text{ so ist zugleich auch } a+b \gtreqless 180^0.$$

Nach diesem wichtigen Satze kann man oftmals entscheiden, ob ein sphärisches Dreieck durch gegebene Stücke bestimmt oder zweideutig ist.

79.

Dividiert man die vorstehenden vier Gleichungen paarweise durcheinander, so erhält man die schon früher auf anderem Wege von Napier gefundenen und nach ihm benannten Gleichungen (Napier'schen Analogien):

$$\left.\begin{aligned}
tg\frac{A+B}{2} &= \cot\tfrac{1}{2}C\cdot\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\\
tg\frac{A-B}{2} &= \cot\tfrac{1}{2}C\cdot\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
tg\frac{a+b}{2} &= tg\,\tfrac{1}{2}c\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\\
tg\frac{a-b}{2} &= tg\,\tfrac{1}{2}c\cdot\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}
\end{aligned}\right\}$$

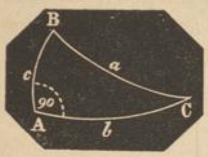
Das erste Paar dieser Gleichungen ist immer anzuwenden, wenn von einem sphärischen Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, das zweite Paar dagegen, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

Neuntes Buch.

Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

80.

Erklärung. In einem bei A rechtwinkligen sphärischen Dreieck, ABC, heifsen die den rechten Winkel einschliefsenden Seiten b und c Katheten und die ihm gegenüber liegende Seite a die Hypotenuse. Es ist leicht einzusehen, dafs beim rechtwinkligen sphärischen Dreieck der Fall vorkommen kann, wo die Hypotenuse kleiner ist, als jede der beiden Katheten. (Man denke sich nur auf einem Erdglobus A als Pol und die Katheten b, c als Meridiane und beide über den Äquator hinaus verlängert, die Endpunkte dann durch einen Bogen gröfsten Kreises verbunden.)



Das rechtwinklige Dreieck kommt bei Anwendungen der sphärischen Trigonometrie am häufigsten vor und deshalb wollen wir noch die besonderen Formeln für dasselbe aufstellen. Es ist klar, dafs diese besonderen Formeln aus den vorhin gefundenen allgemeinen sehr leicht abgeleitet werden können und viel einfacher sein werden.

81.

Die vorhin gefundenen allgemeinen Formeln, in welchen der Winkel A vorkommt, sind:

$$\cos \mathrm{A} = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\frac{\sin a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\sin c}{\sin \mathrm{C}}$$

$$\cos a = \frac{\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} \cdot \cos \mathrm{C}}{\sin \mathrm{B} \cdot \sin \mathrm{C}}$$

$$\cos b = \frac{\cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{A} \cdot \cos \mathrm{C}}{\sin \mathrm{A} \cdot \sin \mathrm{C}}$$

$$\cos c = \frac{\cos \mathrm{C} + \cos \mathrm{A} \cdot \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A} \cdot \sin \mathrm{B}}$$

$$\cot A \cdot \sin B + \cos B \cdot \cos c = \cot a \cdot \sin c$$
$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$
$$\cot B \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos c = \cot b \cdot \sin c$$
$$\cot C \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos b = \cot c \cdot \sin b.$$

82.

Setzt man nun in allen diesen vorstehenden Formeln $A = 90^0$ und beachtet, daſs $\cos 90^0 = 0$; $\sin 90^0 = 1$ und $\cot 90^0 = 0$, so erhält man die folgenden sechs, viel einfacheren Formeln für das bei A rechtwinklige sphärische Dreieck ABC:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c \ldots\ldots (1)$$
$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \ldots (2)$$
$$\cos a = \cot B \cdot \cot C \ldots\ldots (3)$$
$$\left.\begin{array}{l} \cos b = \dfrac{\cos B}{\sin C} \\ \cos c = \dfrac{\cos C}{\sin B} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$
$$\left.\begin{array}{l} \cos B = \cot a \cdot tg\, c \\ \cos C = \cot a \cdot tg\, b \end{array}\right\} \ldots\ldots (5)$$
$$\left.\begin{array}{l} \cot B = \cot b \cdot \sin c \\ \cot C = \cot c \cdot \sin b \end{array}\right\} \ldots\ldots (6).$$

83.

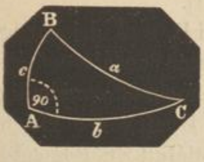
Nach vorstehenden sechs Formeln kann man also, wenn von einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck, ABC (auſser dem rechten Winkel A) irgend zwei Stücke gegeben sind, jedes der drei anderen leicht finden. Wäre z. B. b und C gegeben und B gesucht, so folgt aus der vierten Formel: $\cos B = \cos b \cdot \sin C$. Um jedoch diese für den praktischen Astronomen und Steuermann wichtigen Formeln leichter behalten und anwenden zu können, merke man sich folgende, schon von Napier gegebene leichte Gedächtnisregel.

Wenn man den rechten Winkel A auſser acht läſst, so sind je drei der übrigen fünf Stücke so geordnet, daſs immer ein Stück die Mitte bildet, und dann die beiden anderen Stücke entweder unmittelbar zu beiden Seiten mit dem Mittelstücke verbunden oder noch durch ein Stück vom Mittel getrennt sind, wobei aber, wie gesagt, der rechte Winkel nicht mitzählt, die beiden Katheten also, als nicht durch ihn getrennt, sondern als unmittelbar an einander liegend zu betrachten sind. Hat man diese Ordnung unter irgend drei Stücken im sphärischen Dreieck herausgefunden, so lautet die einfache Regel: Es ist allemal der *cosinus* der Mitte gleich dem Produkt aus den *sinus* der beiden getrennten, und auch gleich dem Produkt aus den *cotangenten* der beiden verbundenen Stücke, wobei aber statt der trigonometrischen Funktion einer Kathete immer ihre Kofunktion gesetzt werden muſs.

Daſs in dieser leicht zu behaltenden Gedächtnisregel alle in § 82 aufgestellten sechs Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck wirklich enthalten sind, wollen wir jetzt nachweisen, und dabei zugleich diese Regel einüben.

84.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen den drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks zu finden.



Auflösung. Die Hypotenuse a ist hier offenbar die Mitte, die Kathete b durch den Winkel C und die Kathete c durch den Winkel B davon getrennt. Daher nach obiger Regel: $\cos a = \sin b \cdot \sin c$, also, weil b und c Katheten sind, und statt der trigonometrischen Funktionen derselben nach der Vorschrift ihre Kofunktionen gesetzt werden sollen, so erhält man die Formel (1) § 82, nämlich:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c.$$

Aus dieser unzweideutigen Formel folgt, daſs, wenn $\cos b$ und $\cos c$ einerlei Vorzeichen haben, die Hypotenuse $< 90^0$ ist.

85.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen zwei Katheten b, c und einem schiefen Winkel B zu finden.

Auflösung. Weil der rechte Winkel nicht mitzählt, so ist hier offenbar c die Mitte, B und b sind unmittelbar damit verbunden, daher: $\cos c = \cot \mathrm{B} \cdot \cot b$, mithin weil b und c Katheten sind:

$$\sin c = \cot \mathrm{B} \cdot tg\, b, \text{ hieraus:}$$

$$\cot \mathrm{B} = \frac{\sin c}{tg\, b} \,(= \sin c \cdot \cot b) \cdots [\S\, 82,\, (6)].$$

Diese Formel zeigt, daſs, weil alle Winkel und Seiten $< 180^0$, also $\sin c$ immer positiv ist, $\cot \mathrm{B}$ und $\cot b$ immer einerlei Vorzeichen haben, mithin im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ein Winkel und die ihm gegenüber liegende Seite, z. B. B und b, immer **gleichartig** sind, d. h. wenn:

$$B \lesseqgtr 90^0, \text{ auch } b \lesseqgtr 90^0.$$

Durch obige Formel: $\cot B = \sin c \cdot \cot b$ ist also sowohl B als b vollkommen bestimmt. Die aus B und b zu berechnende Kathete c aber $\left(\sin c = \frac{\cot B}{\cot b} = \frac{tg\, b}{tg\, B}\right)$ bleibt zweideutig, wenn man nicht weifs, ob der ihr gegenüber liegende Winkel C spitz oder stumpf ist.

86.

Aufgabe. Man suche eine Gleichung zwischen der Hypotenuse a, der Kathete b und dem Winkel B.

Auflösung. Weil der rechte Winkel nicht mitzählt, so ist hier b die Mitte, a durch C, und B durch c davon getrennt, daher: $\cos b = \sin a \cdot \sin B$, mithin, weil b eine Kathete ist:

$$\sin b = \sin a \cdot \sin B \quad [\S\ 82,\ (2)].$$

Durch diese Formel sind die Gröfsen b und B, weil gleichartig, vollkommen bestimmt (§ 85). Was aber die durch ihren *sinus* gegebene Hypotenuse a betrifft, so ist sie im allgemeinen zweideutig. Weil jedoch $A + B$ oder (weil $A = 90$), $90 + B$ mit $a + b$ gleichartig ist, so sind die besonderen Fälle, wo a bestimmt ist, folgende:

1) Wenn $B = 90^0$, also auch $b = 90^0$, so ist auch $a = 90^0$.

2) Sei $B < 90$, also auch $b < 90$ und auch $a + b < 180^0$. Giebt es nun von den beiden Werten von a nur einen, der zu b addiert $< 180^0$ giebt, so ist a bestimmt.

3) Sei $B > 90$, also auch $a + b > 180^0$. Giebt es nun unter den beiden Werten für a nur **einen**, der zu b addiert $> 180^0$ giebt, so ist a bestimmt, sonst nicht.

87.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen den zwei schiefen Winkeln B, C und einer Kathete b zu finden.

Auflösung. Hier ist B die Mitte, von welcher C durch a und b durch c getrennt ist, daher $\cos B = \sin C \cdot \sin b$, mithin, weil b eine Kathete ist:

$$\cos B = \sin C \cdot \cos b \quad [\S\ 82,\ (4)].$$

Durch diese Formel sind B und b vollkommen bestimmt, C aber bleibt zweideutig.

88.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen der Hypotenuse a und den zwei schiefen Winkeln B und C zu finden.

Auflösung. Hier ist a die Mitte, B und C damit verbunden, mithin:

$$\cos a = \cot B \cdot \cot C \quad [§\ 82,\ (3)].$$

89.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen a, c, B zu finden.

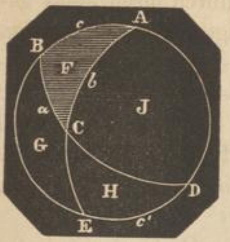
Auflösung. Hier ist B die Mitte, a und c damit verbunden, daher $\cos B = \cot a \cdot \cot c$, oder, weil c eine Kathete ist:

$$\cos B = \cot a \cdot tg\, c \quad [§\ 82\ (5)].$$

Man sieht also, daſs diese leichte Gedächtnisregel wirklich alle sechs in § 82 für das rechtwinklige sphärische Dreieck aufgestellten Formeln umfaſst.

90.

Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks.



Lehrsatz. Bezeichnet F den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks, ABC, und r den *radius* der zugehörigen Kugel, so ist:

$$F = \frac{A + B + C - 180}{180} \cdot \pi r^2.$$

Beweis. Der leichtern Vorstellung halber nehme man eine Kugel zur Hand und zeichne darauf ein sphärisches Dreieck, ABC, verlängere je zwei Bögen desselben vorwärts und rückwärts, bis sie sich abermals schneiden, so wird dadurch die ganze Oberfläche der Kugel in acht Dreiecke geteilt, wovon jedoch hier nur die auf der oberen Hälfte liegenden vier, F, G, H, J, zu sehen sind. Weil nun jeder gröſste Kreis ABEDA die Kugel halbiert und zwei gröſste Kreise wie ABE, ACE sich gegenseitig halbieren, so ist klar, daſs die vier Dreiecke F, G, H, J wirklich die halbe Kugelfläche ($2\pi r^2$) einnehmen; ferner, daſs die Verlängerung der beiden Seiten a, b über A und B hinaus, mit c ein Dreieck, H', auf der anderen Seite der Kugel bilden, welches dem Dreieck H, wenn auch symmetrisch, doch an Gröſse vollkommen gleich ist, weil sie aus gleichgroſsen Bögen gebildet sind. (So ist z. B. $c' = c$, weil beide zu Bogen BE addiert einen Halbkreis geben.)

Nun ist der Streifen der Kugeloberfläche, welchen die beiden Halbkreise ABE und ACE einschliefsen, das sogenannte Kugelzweieck, der eben so vielte Teil von der ganzen Kugeloberfläche, als es der sphärische Winkel A von 360^0 ist, daher:

$$F + G = \frac{A}{360} \cdot 4\pi r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Ebenso ist der Flächeninhalt der von den beiden Halbkreisen BAD, BCD gebildeten Zweiecks, nämlich:

$$F + J = \frac{B}{360} \cdot 4\pi r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Ferner bildet das Dreieck F mit dem auf der anderen Seite der Kugel liegenden Dreieck H' ein Kugelzweieck, dessen Fläche $F + H' = \frac{C}{360} \cdot 4\pi r^2$, daher, weil $H = H'$

$$F + H = \frac{C}{360} \cdot 4\pi r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Addiert man die Gleichungen, so ist:

$$3F + G + H + J = \frac{A + B + C}{360} \cdot 4\pi r^2.$$

Zieht man hiervon $F + G + H + J = 2\pi r^2$ ab, so ist:

$$2F = \frac{A + B + C}{360} 4\pi r^2 - 2\pi r^2$$

$$F = \left(\frac{A + B + C}{180} - 1\right) \pi r^2$$

$$F = \frac{A + B + C - 180}{180} \cdot \pi r^2$$

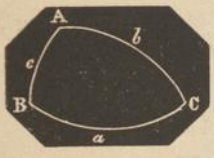
oder, wenn man den Überschufs der drei sphärischen Winkel A, B, C über 180^0, den sogenannten „sphärischen Excefs“ mit e bezeichnet:

$$F = \frac{e}{180} \cdot \pi r^2.$$

Zehntes Buch.

Beispiele zur numerischen Berechnung eines sphärischen Dreiecks.

91.



Aufgabe. Es sind alle drei Seiten eines sphärischen Dreiecks gegeben: $a = 72^0\,14'\,26''$, $b = 110^0\,18'\,20''$, $c = 48^0\,50'\,42''$. Man suche die Winkel A, B, C.

Auflösung. Zufolge § 72 hat man:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A} = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - b)\,\sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin\frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - a)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{B} = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a)\,\sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin\frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{C} = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a)\,\sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin\frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}}$$

$$\begin{array}{rlrl}
a = & 72^0\,14'\,26'' & \frac{1}{2}s & = 115^0\,41'\,44'' \\
b = & 110 \cdot 18 \cdot 20 & \frac{1}{2}s - a = & 43 \cdot 27 \cdot 18 \\
c = & 48 \cdot 50 \cdot 42 & \frac{1}{2}s - b = & 5 \cdot 23 \cdot 24 \\
\hline
s = & 231 \cdot 23 \cdot 28 & \frac{1}{2}s - c = & 66 \cdot 51 \cdot 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log\sin(\frac{1}{2}s - b) = & 8{,}9728253 \\
\log\sin(\frac{1}{2}s - c) = & 9{,}9635435 \\
\hline
 & 18{,}9363688 \\
 & 19{,}7922306 \\
\hline
 & 0{,}1441382 - 1 \quad (:2 \text{ [Algebra § 281]}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log\sin\frac{1}{2}s = & 0{,}9547781 \\
\log\sin(\frac{1}{2}s - a) = & 9{,}8374525 \\
\hline
 & 19{,}7922306
\end{array}$$

$$\log tg\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A} = 9{,}5720691 - 10$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A} = 20^0\,28'\,15'',9.$$

Ebenso findet man $\frac{1}{2}$ B und $\frac{1}{2}$ C, mithin ist:

$$\mathrm{A} = 40^0\,56'\,31'',8;\quad \mathrm{B} = 139^0\,48'\,35'',4;\quad \mathrm{C} = 31^0\,12'\,13'',5.$$

92.

Aufgabe. Es sind zwei Seiten, b, c, und ein Gegenwinkel, B, gegeben. Man sucht den anderen Gegenwinkel C. Es sei z. B. $b = 110^0\,18'\,20''$, $c = 48^0\,50'\,42''$, $B = 139^0\,48'\,35'',4$.

Auflösung. In diesem Falle gebraucht man immer die Regel der vier *sinus*. Diese giebt: $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin b}$, hieraus:

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin b} \cdot \sin B.$$

Anmerkung. Da hier der Winkel C durch seinen *sinus* bestimmt wird und deshalb sowohl spitz als stumpf sein kann, so ist klar, daſs durch zwei Seiten und einen Gegenwinkel im allgemeinen ein sphärisches Dreieck nicht bestimmt ist (vergl. § 29).

Weil aber $B + C$ mit $b + c$ gleichartig ist (§ 78 Anmerkung), so können wir jedoch folgendes festsetzen:

1) Ist $b + c = 180^0$, so ist auch $B + C = 180^0$, mithin:

$$\begin{array}{lll} C = 90^0, & \text{wenn} & B = 90^0 \\ C > 90 & \text{„} & B < 90 \\ C < 90 & \text{„} & B > 90. \end{array}$$

2) Ist $b + c < 180^0$, also auch $B + C < 180^0$, so ist:

$$C < 90^0, \text{ wenn } B \geqq 90^0.$$

Ist aber $B < 90$, so ist C unbestimmt. Kann jedoch C nur auf eine Weise so genommen werden, daſs $B + C < 180$, so ist C bestimmt.

3) Ist endlich $b + c > 180$, also auch $B + C > 180$, so ist:

$$C > 90, \text{ wenn } B \leqq 90.$$

Wäre aber $B > 90$, so ist C wieder unbestimmt, es sei denn, daſs C nur auf eine Weise so genommen werden kann, daſs $B + C > 180^0$.

$$\begin{array}{rl} \log\sin B = & 9{,}8097796 \\ \log\sin c = & \underline{9{,}8767558} \\ & 19{,}6865354 \\ \log\sin b = & \underline{9{,}9721358} \\ \log\sin C = & 9{,}7143996 \\ C = & 31^0\,12'\,13'',5. \end{array}$$

93.

Aufgabe. Es sind alle drei Winkel gegeben, zum Beispiel $A = 40^0\,56'\,31'',8$, $B = 139^0\,48'\,35'',4$, $C = 31^0\,12'\,13'',5$. Man sucht die Seiten.

Auflösung. Nach § 75 hat man:

$$tg\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S \cdot \cos(\frac{1}{2}S - A)}{\cos(\frac{1}{2}S - B)\cos(\frac{1}{2}S - C)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S \cdot \cos(\frac{1}{2}S - B)}{\cos(\frac{1}{2}S - A)\cos(\frac{1}{2}S - C)}}$$

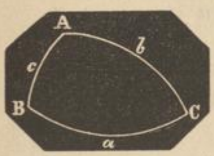
$$tg\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S \cdot \cos(\frac{1}{2}S - C)}{\cos(\frac{1}{2}S - A)\cos(\frac{1}{2}S - B)}}$$

$$\begin{array}{rlrl}
A = & 40^0\,56'\,31'',8 & \frac{1}{2}S = & 105^0\,58'\,40'',4 \\
B = & 139 \cdot 48 \cdot 35,\ 4 & \frac{1}{2}S - A = & 65 \cdot 2 \cdot 8,\ 6 \\
C = & 31 \cdot 12 \cdot 13,\ 5 & \frac{1}{2}S - B = & -33 \cdot 49 \cdot 55. \\
\hline
S = & 211^0\,57'\,20'',7 & \frac{1}{2}S - C = & 74 \cdot 46 \cdot 26,\ 9
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlrl}
\log - \cos\frac{1}{2}S = & 9{,}4397531 & \log\cos(\frac{1}{2}S - B) = & 9{,}9194308 \ (\S\,56) \\
\log\cos(\frac{1}{2}S - A) = & 9{,}6253671 & \log\cos(\frac{1}{2}S - C) = & 9{,}4193355 \\
\hline
 & 19{,}0651202 & & 19{,}3387663 \\
 & 19{,}3387663 & & \\
\hline
 & 0{,}7263539 - 1\ (:2 & & \\
 & 0{,}8631769 - 1 & & \\
\log tg\,\frac{1}{2}a = & 9{,}8631769 - 10 & & \\
\frac{1}{2}a = & 36^0\,7'\,13''. & &
\end{array}$$

Ebenso findet man nach den beiden anderen Formeln $\frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{2}c$ und daraus dann: $a = 72^0\,14'\,26''$; $b = 110^0\,18'\,20''$; $c = 48^0\,50'\,42''$.

94.



Aufgabe. Es sind zwei Winkel, A und B, und eine Gegenseite, a, gegeben. Man sucht die andere Gegenseite b.

Auflösung. Aus der Sinus-Regel $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ folgt:

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A}.$$

Die Fälle, wo die durch ihren *sinus* gefundene Seite b bestimmt ist, ergeben sich wieder aus § 78, Anmerkung. Es ist nämlich:

1, Wenn $A + B = 180^0$, also auch $a + b = 180^0$:

$$b \overset{=}{\underset{>}{<}} 90, \text{ wenn } a \overset{=}{\underset{<}{>}} 90.$$

2, Wenn $A + B < 180^0$, so ist:

$$b < 90, \text{ wenn } a \gtreqless 90.$$

Wäre $a < 90^0$, so kann b sowohl spitz als stumpf sein etc.

3, Wenn $A + B > 180^0$, so ist:

$$b > 90, \text{ wenn } a \lesseqgtr 90.$$

Wäre $a > 90$, so kann b sowohl spitz als stumpf sein etc.

95.

Aufgabe. Von einem sphärischen Dreieck sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel a, b, C gegeben, zum Beispiel $a = 72^0\,14'\,26''$, $b = 110^0\,18'\,20''$, $C = 31^0\,12'\,13'',5$. Man sucht die übrigen Stücke c, A, B.

Auflösung. In diesem Falle gebraucht man immer die Napier'schen Gleichungen und berechnet zuerst die Winkel A und B. Nach § 79 ist, wenn man, weil $b > a$, um negative Winkel zu vermeiden, a mit b und A mit B verwechselt:

$$tg\,\frac{B + A}{2} = cot\,\tfrac{1}{2}\,C \cdot \frac{cos\,\frac{b - a}{2}}{cos\,\frac{b + a}{2}}$$

$$tg\,\frac{B - A}{2} = cot\,\tfrac{1}{2}\,C \cdot \frac{sin\,\frac{b - a}{2}}{sin\,\frac{b + a}{2}}$$

$log\ cot\ \tfrac{1}{2}\,C =$	$10,5540220$	$log\ cot\ \tfrac{1}{2}\,C =$	$10,5540220$
$log\ cos\ \frac{b - a}{2} =$	$9,9755852$	$log\ sin\ \frac{b - a}{2} =$	$9,5133567$
	$20,5296072$		$20,0673787$
$log\ cos\ \frac{b + a}{2} =$	$8,3466888\ (n)$	$log\ sin\ \frac{b + a}{2} =$	$9,9998928$
$log\ tg\ \frac{B + A}{2} =$	$12,1829184\ (n)$	$log\ tg\ \frac{B - A}{2} =$	$10,0674859$

$\frac{B + A}{2} = 90^0\,22'\,33'',6$ $\qquad A = 40^0\,56'\,31'',8$

mithin:

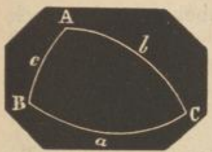
$\frac{B - A}{2} = 49 \cdot 26 \cdot 1,8$ $\qquad B = 139 \cdot 48 \cdot 35,4.$

Die Seite c findet man jetzt nach der Sinus-Regel: $\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}$, woraus:

$$\sin c = \frac{\sin C \cdot \sin a}{\sin A}.$$

Ob die völlig bestimmte Seite c spitz oder stumpf ist, entscheidet man nach der Regel, daſs $a + c$ mit $A + C$ und $b + c$ mit $B + C$ immer gleichartig ist. Hier ist also $c = 48^0\,50'\,42''$. Weil nämlich $A + C < 180$, so muſs $c < 90^0$ sein.

96.



Aufgabe. Von einem sphärischen Dreieck, ABC, ist eine Seite, c, und die beiden anliegenden Winkel A, B gegeben; man sucht die übrigen Stücke C, a, b.

Auflösung. In diesem Falle gebrauche man immer die Napier'schen Gleichungen und suche zuerst die beiden Seiten a, b. Man hat:

$$tg\,\frac{a+b}{2} = tg\,\tfrac{1}{2}c \cdot \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$tg\,\frac{a-b}{2} = tg\,\tfrac{1}{2}c \cdot \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}.$$

Den völlig bestimmten Winkel C findet man nun nach der Sinus-Regel, nämlich:

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a}\sin A = \frac{\sin c}{\sin b} \cdot \sin B.$$

Ob C spitz oder stumpf ist, entscheidet man nach der Regel, daſs $A + C$ mit $a + c$ und $B + C$ mit $b + c$ gleichartig ist.

97.

Aufgabe. Es sind von vier aufeinander folgenden Stücken, A, b, C, a, eines sphärischen Dreiecks zwei Seiten, a, b, und ein Gegenwinkel, A, gegeben; man sucht den andern Winkel C.

Auflösung. Statt den Winkel C vermittelst der Formel:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

direkt oder durch Einführung eines Hilfswinkels zu berechnen, ist es bequemer, zuerst nach der Sinus-Regel den zweiten Gegenwinkel B zu suchen, nämlich:

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \sin A;$$

alsdann findet man den Winkel C nach der ersten oder zweiten Napier'schen Formel:

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \cdot tg \frac{A-B}{2}.$$

Wollte man auch noch die Seite c haben, so ist nach Formel 3 oder 4, § 79:

$$tg \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} \cdot tg \frac{a-b}{2}.$$

Anmerkung. Die Fälle, wo der zuerst zu findende Winkel B bestimmt oder zweideutig ist, ergeben sich daraus, dafs $A+B$ mit $a+b$ gleichartig ist.

Will man aber zuerst C mittelst eines Hilfswinkels, φ, nach der Formel:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

berechnen, so verfahre man nach § 65 (4. Fall).

Aus vorstehender Gleichung folgt:

$$\frac{\cot A}{\cos b} \cdot \sin C + \cos C = \cot a \cdot tg\, b,$$

setzt man nun: $\frac{\cot A}{\cos b} = \cot \varphi$, so hat man, weil $\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot \sin C + \cos C = \cot a \cdot tg\, b$$

$$\sin C \cdot \cos \varphi + \cos C \sin \varphi = \cot a \cdot tg\, b \cdot \sin \varphi$$

$$\sin (C + \varphi) = \cot a \cdot tg\, b \cdot \sin \varphi.$$

Diese Formel ist dann brauchbar, wenn man, wie es in der Praxis der Fall ist, im voraus weifs, ob $\angle C$ spitz oder stumpf ist.

98.

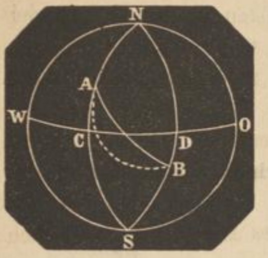
Aufgabe. Von vier aufeinander folgenden Stücken, A, b, C, a, eines sphärischen Dreiecks sind zwei Winkel, A, C, und eine Gegenseite, a, gegeben; man sucht die zwischen liegende Seite b.

Auflösung. Man hat aus:

$$cot\,A \cdot sin\,C + cos\,C \cdot cos\,b = cot\,a \cdot sin\,b$$
$$cot\,a \cdot sin\,b - cos\,C \cdot cos\,b = cot\,A \cdot sin\,C$$
$$\frac{cot\,a}{cos\,C} \cdot sin\,b - cos\,b = cot\,A \cdot tg\,C$$
$$cot\,\varphi \cdot sin\,b - cos\,b = cot\,A \cdot tg\,C$$
$$cos\,\varphi \cdot sin\,b - cos\,b \cdot sin\,\varphi = cot\,A \cdot tg\,C \cdot sin\,\varphi$$
$$sin\,(b - \varphi) = cot\,A \cdot tg\,C \cdot sin\,\varphi,$$

worin φ durch $cot\,\varphi = \frac{cot\,a}{cos\,C}$ (oder besser $tg\,\varphi = tg\,a \cdot cos\,C$) gegeben.

99.



Aufgabe. Es sind die geographischen Breiten und Längen zweier Örter, A und B, auf der Erde gegeben, nämlich $AC = b$, $BD = -b'$; $WC = l'$, $WD = l$, man sucht die Entfernung der beiden Örter A und B, d. h. den zwischen ihnen enthaltenen Bogen gröſsten Kreises $AB = x$.

Auflösung. Denkt man durch A und B die beiden Meridiane NAS, NBS gezogen, so entsteht das sphärische Dreieck ANB, in welchem der Winkel $N = l - l'$, die Seite $AN = 90 - b$ und die Seite $BN = 90 + b'$. Jetzt kann man nach § 95 verfahren. Will man aber die Seite $AB = x$ mittelst eines Hilfswinkels, φ, berechnen, so folgt aus:

$$cos\,N = \frac{cos\,AB - cos\,AN \cdot cos\,BN}{sin\,AN \cdot sin\,BN}$$
$$cos\,(l - l') = \frac{cos\,x - cos\,(90 - b) \cdot cos\,(90 + b')}{sin\,(90 - b) \cdot sin\,(90 + b')}$$
$$cos\,(l - l') = \frac{cos\,x + sin\,b \cdot sin\,b'}{cos\,b \cdot cos\,b'}$$
$$cos\,x = cos\,(l - l') \cdot cos\,b \cdot cos\,b' - sin\,b \cdot sin\,b'$$
$$cos\,x = sin\,b' \left[\frac{cos\,(l - l')\,cos\,b \cdot cos\,b'}{sin\,b'} - sin\,b\right]$$
$$cos\,x = sin\,b' \left[cos\,(l - l')\,cos\,b \cdot cot\,b' - sin\,b\right]$$

$cos\,(l - l')\,cot\,b' = tg\,\varphi$ gesetzt:

$$\cos x = \sin b' \left[\frac{\sin \varphi \cdot \cos b}{\cos \varphi} - \sin b\right]$$

$$= \frac{\sin b'}{\cos \varphi} \left[\sin \varphi \cdot \cos b - \cos \varphi \cdot \sin b\right]$$

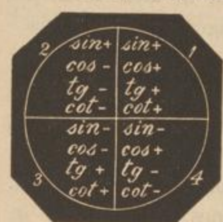
$$\cos x = \frac{\sin b' \cdot \sin(\varphi - b)}{\cos \varphi}, \text{ worin } tg\, \varphi = \cos(l - l') \cot b'.$$

Die Entfernung x findet man in Graden, die noch in Länge verwandelt werden, indem man auf einen Grad gröſsten Kreises 15 geographische Meilen rechnet.

Anmerkung. Daſs ein zwischen zwei Punkten, A, B, enthaltener Bogen gröſsten Kreises kleiner ist, als ein durch dieselben Punkte gelegter Bogen kleineren Kreises, erhellt leicht, wenn man den Bogen kleineren Kreises um die gemeinschaftliche Sehne gedreht und mit dem Bogen gröſsten Kreises in einerlei Ebene gebracht denkt, wo dann letzterer, weil mit einem gröſsern Radius beschrieben, vom erstern offenbar umgeben, folglich auch kleiner sein muſs.

100.

Zusammenstellung der goniometrischen Formeln.



$$\sec a = \frac{1}{\cos a} \qquad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$$

$$\sin 0 = 0 \qquad \sin 90 = 1$$
$$\cos 0 = 1 \qquad \cos 90 = 0$$
$$tg\, 0 = 0 \qquad tg\, 90 = \infty$$
$$\cot 0 = \infty \qquad \cot 90 = 0$$

$$\sin 180^0 = 0 \qquad \sin 270^0 = -1 \qquad \sin 360^0 = 0$$
$$\cos 180^0 = -1 \qquad \cos 270^0 = 0 \qquad \cos 360^0 = 1$$
$$tg\, 180^0 = 0 \qquad tg\, 270^0 = -\infty \qquad tg\, 360^0 = \infty$$
$$\cot 180^0 = -\infty \qquad \cot 270^0 = 0 \qquad \cot 360^0 = 0$$

$$\sin k\pi = 0 \qquad \sin(4k+1)\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \sin(4k+3)\frac{\pi}{2} = -1$$

$$\cos 2k\pi = 1 \qquad \cos(2k+1)\pi = -1 \qquad \cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}; \qquad \cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$tg\, 30^0 = \cot 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30^0 = tg\, 60^0 = \sqrt{3}$$

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\, 45^0 = \cot 45^0 = 1.$$

$\sin(-a) = -\sin a \qquad \sin(a-b) = -\sin(b-a)$
$\cos(-a) = \cos(+a) \qquad \cos(a-b) = \cos(b-a)$
$tg(-a) = -tg\,a \qquad tg(a-b) = -tg(b-a)$
$\cot(-a) = -\cot a \qquad \cot(a-b) = -\cot(b-a)$

$\sin(90-a) = \cos a \qquad \sin(90+a) = \cos a \qquad \sin(180-a) = \sin a$
$\cos(90-a) = \sin a \qquad \cos(90+a) = -\sin a \qquad \cos(180-a) = -\cos a$
$tg(90-a) = \cot a \qquad tg(90+a) = -\cot a \qquad tg(180-a) = -tg\,a$
$\cot(90-a) = tg\,a \qquad \cot(90+a) = -tg\,a \qquad \cot(180-a) = -\cot a$

$\sin(180+a) = -\sin a \qquad \sin(270-a) = -\cos a \qquad \sin(270+a) = -\cos a$
$\cos(180+a) = -\cos a \qquad \cos(270-a) = -\sin a \qquad \cos(270+a) = \sin a$
$tg(180+a) = tg\,a \qquad tg(270-a) = \cot a \qquad tg(270+a) = -\cot a$
$\cot(180+a) = \cot a \qquad \cot(270-a) = tg\,a \qquad \cot(270+a) = -tg\,a$

$\sin(360-a) = -\sin a \qquad \sin(45^0-a) = \cos(45^0+a)$
$\cos(360-a) = \cos a \qquad \cos(45-a) = \sin(45+a)$
$tg(360-a) = -tg\,a \qquad tg(45-a) = \cot(45+a)$
$\cot(360-a) = -\cot a \qquad \cot(45-a) = tg(45+a)$

* $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \qquad \cos^2 a = 1 - \sin^2 a$

* $\frac{\sin a}{\cos a} = tg\,a \qquad \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a$

* $tg\,a \cdot \cot a = 1 \qquad tg\,a = \frac{1}{\cot a} \qquad \cot a = \frac{1}{tg\,a}$

$$1 + tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \qquad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

$$\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \frac{tg\,a}{\sqrt{1+tg^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$$

$$\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 a}} = \frac{\cot a}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$$

$$tg\,a = \frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a} = \frac{1}{\cot a}.$$

$$\cot a = \frac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}} = \frac{1}{tg\,a}$$

* $\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$

* $\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$

* $tg(a \pm b) = \frac{tg\,a \pm tg\,b}{1 \mp tg\,a \cdot tg\,b}$

* $\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \cdot \cot b \mp 1}{\cot a \pm \cot a}.$

$$* \quad \sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$* \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$* \quad tg\, 2a = \frac{2\, tg\, a}{1 - tg^2 a}$$

$$* \quad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a} = \tfrac{1}{2} (\cot a - tg\, a).$$

$$* \quad \sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$* \quad \sin a \cdot \cos a = \frac{\sin 2a}{2} \qquad \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2}.$$

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \qquad \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$tg\, 3a = \frac{3\, tg\, a - tg^3 a}{1 - 3\, tg^2 a} \qquad \cot 3a = \frac{\cot^3 a - 3 \cot a}{3 \cot^2 a - 1}.$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sin a} - \sqrt{1 - \sin a}}{2}.$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sin a} + \sqrt{1 - \sin a}}{2}.$$

$$tg \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$$

$$= \frac{1}{\sin a} - \cot a = \frac{\sqrt{1 + tg^2 a} - 1}{tg\, a}.$$

$$\cot \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}} = \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1 - \cos a}$$

$$= \frac{1}{\sin a} + \cot a = \cot a + \sqrt{1 + \cot^2 a}.$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \qquad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \qquad \cos a - \cos b = 2 \sin \frac{b+a}{2} \sin \frac{b-a}{2}$$

$$tg\, a \pm tg\, b = \frac{\sin (a \pm b)}{\cos a \ \cos b} \qquad \cot a \pm \cot b = \frac{\sin (b \pm a)}{\sin a \ \sin b}$$

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \cdot \sin (45^0 + a) \qquad \sin a - \cos a = -\sqrt{2} \cdot \cos (45^0 + a)$$

$$tg\, a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a} \qquad tg\, a - \cot a = -2 \cot 2a$$

$$\sin a + tg\, a = 2\, tg\, a \cos^2 \frac{a}{2} \qquad \sin a - tg\, a = -2\, tg\, a \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a + \cot a = 2 \cot a \sin^2 \left(45^0 + \frac{a}{2}\right)$$

$$\cos a - \cot a = -2 \cot a \cos^2\left(45^0 + \frac{a}{2}\right)$$

$$1 + \sin a = 2 \sin^2\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) \qquad 1 - \sin a = 2 \cos^2\left(45^0 + \frac{a}{2}\right)$$

$$* \; 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \qquad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$1 + tg\, a = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(45^0 + a)}{\cos a} \qquad 1 - tg\, a = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos(45^0 + a)}{\cos a}$$

$$1 + \cot a = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(45^0 + a)}{\sin a} \qquad 1 - \cot a = -\frac{\sqrt{2} \cdot \cos(45^0 + a)}{\sin a}.$$

$$tg\,(45^0 \pm a) = \frac{1 \pm tg\, a}{1 \mp tg\, a}$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = tg \frac{a+b}{2} \cot \frac{a-b}{2} \qquad \frac{tg\, a + tg\, b}{tg\, a - tg\, b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$$

$$\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b) \sin(a-b) \qquad \cos^2 a - \cos^2 b = \sin(b+a) \sin(b-a)$$

$$tg^2 a - tg^2 b = \frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b} \qquad \cot^2 a - \cot^2 b = \frac{\sin(b+a)\sin(b-a)}{\sin^2 a \sin^2 b}.$$

$$1 - \sin^2 a = \cos^2 a \qquad 1 - \cos^2 a = \sin^2 a$$

$$1 - tg^2 a = \frac{2\, tg\, a}{tg\, 2a} \qquad 1 - \cot^2 a = -2 \cot a \cot 2a.$$

$$\frac{1 + \cos a}{\cos a} = tg\, a \cot \frac{a}{2} \qquad \frac{1}{\cos a} + 1 = tg\, a \cot \frac{a}{2}$$

$$\frac{1 - \cos a}{\cos a} = tg\, a\; tg \frac{a}{2} \qquad \frac{1}{\cos a} - 1 = tg\, a\; tg \frac{a}{2}.$$

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2} \sin(a+b) + \tfrac{1}{2} \sin(a-b)$$
$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2} \cos(a-b) - \tfrac{1}{2} \cos(a+b)$$
$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2} \cos(a+b) + \tfrac{1}{2} \cos(a-b)$$

$$arc \sin x \pm arc \sin y = arc \sin\left(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$arc \cos x \pm arc \cos y = arc \cos\left[xy \mp \sqrt{(1-x)^2(1-y^2)}\right]$$

$$arc\; tg\, x \pm arc\; tg\, y = arc\; tg \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

$$arc \cot x \pm arc \cot y = arc \cot \frac{xy \mp 1}{y \pm x}.$$

$$arc \sin(-x) = -arc \sin x \qquad arc \cos(-x) = \pi \pm arc \cos x$$

$$arc\; tg\,(-x) = -arc\; tg\, x \qquad arc \cot(-x) = -arc \cot x.$$

Pierer'sche Hofbuchdruckerei Stephan Geibel & Co. in Altenburg.