Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1884

Achtes Buch

urn:nbn:de:bsz:31-273442

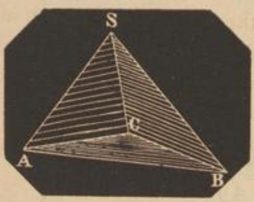
Zweiter Teil.

Sphärische Trigonometrie.

Achtes Buch.

68.

Man denke sich von einem Punkte, S, drei gerade Linien ausgehend, wovon SA, SB in der Ebene des Papiers liegen mögen, die dritte Linie SC aber darüber hervortritt. Denkt man sich durch je zwei Linien eine Ebene gelegt, so entsteht bekanntlich eine körperliche Ecke, das sogenannte körperliche Dreieck,*) welches folgende sechs Bestandteile enthält: 1) die drei Kantenwinkel, welche je zwei der von S ausgehenden drei Linien miteinander bilden, und 2) die drei Flächenwinkel, welche je zwei der drei Ebenen miteinander bilden.**) Man setze die drei Kantenwinkel $BSC = a$, $ASC = b$ und den unteren $ASB = c$ und bezeichne die gegenüber liegenden drei Flächenwinkel mit den gleichlautenden Buchstaben A, B, C, dann ist die allgemeine Aufgabe der sphärischen Trigonometrie: allgemeine Formeln zu finden, nach welchen man aus beliebig gegebenen drei Winkeln des körperlichen Dreiecks die drei übrigen (insofern sie durch erstere drei bestimmt sind) berechnen kann.



*) Die Ecke einer dreiseitigen Pyramide.

**) Man mufs sich hier die beiden durch $\angle ASC$ und $\angle BSC$ gelegten Ebenen dachförmig gegen die untere durch $\angle ASB$ gelegte Ebene aufgerichtet denken. Anfänger mögen sich diese Figur versinnlichen, was durch zweimalige Brechung eines Stück Papiers geschehen kann.

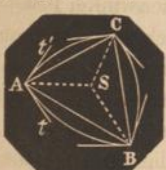
69.

Denkt man sich aus S mit einem beliebigen Radius, SA, zwischen den Schenkeln der drei Kantenwinkel *a*, *b*, *c* des körperlichen Dreiecks Kreisbögen BC, AC, AB beschrieben, so enthalten diese Bögen, in Graden ausgedrückt, ebenso viel Grade als die zugehörigen Kantenwinkel an der Spitze S und können also statt dieser gesetzt und mit denselben Buchstaben *a*, *b*, *c* bezeichnet werden. Dies pflegt man in der Regel zu thun, und da die drei Bögen *a*, *b*, *c*. weil mit demselben Radius beschrieben, offenbar einen Teil von der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt S und deren Radius SA (= SB = SC) ist, einschliefsen und Bögen gröfsten Kreises sind, so nennt man ein solches krummliniges Dreieck auf der Oberfläche einer Kugel (Sphäre) schicklicher Kugeldreieck oder sphärisches Dreieck, daher denn auch der Titel: sphärische Trigonometrie.

Unter Bögen oder Seiten eines sphärischen Dreiecks mufs man sich also nicht Längen, sondern immer die Winkel am Mittelpunkt der zugehörigen Kugel denken, welche die von den Endpunkten der Bögen dahin gezogenen Radien (Kanten) miteinander bilden, mit anderen Worten: man mufs in einem sphärischen Dreieck die Seiten (welche stets Bögen **gröfsten** Kreises sein müssen) immer in Graden ausgedrückt denken.

70.

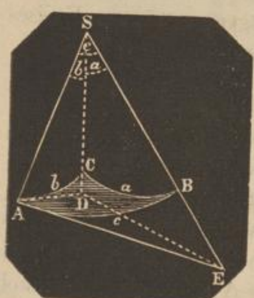
Zieht man aus dem Durchschnittspunkt A zweier Seiten (Bögen) BA, CA eines sphärischen Dreiecks die beiden Tangenten A*t*, A*t'* an dieselben, mithin senkrecht auf dem *radius* SA der Kugel, und zwar die eine in der Ebene ASB, die andere in der Ebene ASC, so stellt der Winkel *t*A*t'* = A den Neigungswinkel der beiden Bögen BA, CA gegeneinander dar. Ebenso an den beiden anderen Punkten B, C, und diese drei Winkel A, B, C, welche, wenn man sich das körperliche Dreieck S, ABC (vergl. Fig. zu § 69) denkt, offenbar die Flächenwinkel desselben sind, sind die eigentlichen Winkel des sphärischen Dreiecks ABC, weil man zur Abkürzung des Vortrags die drei anderen Winkel *a*, *b*, *c* die Seiten des sphär. Dreiecks nennt. Vergleicht man die Winkel des sphärischen



Dreiecks mit den Winkeln des Sehnendreiecks, so erhellt leicht, daſs die Summe der drei (Flächen-) Winkel A, B, C eines sphärischen Dreiecks immer gröſser als zwei und kleiner als sechs rechte Winkel ist. Auch ist klar, daſs die Summe zweier Seiten (Kantenwinkel) immer gröſser ist, als die dritte, und jede Seite (Kantenwinkel) kleiner, als 180^0 ist. Weil nämlich gröſste Kreise sich halbieren (Geometrie § 175), so folgt, daſs, wenn man durch den einen Endpunkt eines solchen Halbkreises einen Bogen gröſsten Kreises legt, er, verlängert, notwendig auch durch den anderen Endpunkt gehen muſs und mit ersterem Halbkreise ein sogenanntes Kugelzweieck bildet. Es kann folglich keine Seite in einem sphärischen Dreieck $= 180^0$ sein. Verlängert man die eine Seite eines solchen Zweiecks, so kann man durch die Endpunkte dieser zwei Bögen gröſsten Kreises legen, welche sich innerhalb des Zweiecks schneiden und mit ersterer Seite, $> 180^0$, ein Dreieck bilden, welches einen einspringenden oder überstumpfen Winkel hat; solche Dreiecke lassen wir jedoch unberücksichtigt.

71.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks ABC einen Winkel, z. B. A, berechnen kann.



Auflösung. Da der sphärische Winkel A nichts anderes ist, als die Neigung der beiden Ebenen ASC und ASB gegeneinander, so errichten wir auf ihrer Durchschnittslinie SA, im Punkte A, die beiden Perpendikel AE und AD, wovon das erstere in der unteren Ebene ASB liegt und den verlängerten Radius SB in E trifft,*) das andere in der dachförmig dagegen aufstehenden Ebene ASC liegt und den verlängerten Radius SC in D trifft, so daſs also $\angle SAE = 90^0$ und auch $\angle SAD = 90^0$, dann ist der Winkel $DAE = A$ der gesuchte (Geometrie § 155).

*) Die Fälle, wo $AE \parallel SB$ oder $AD \parallel SC$ ist, oder wo ein, zwei oder alle drei Winkel, a, b, c, rechte, oder stumpfe wären, können wir als specielle Fälle aus den allgemeinen Gleichungen ableiten. Die Schlüsse bleiben übrigens ganz dieselben, wenn z. B. der Winkel ASB stumpf wäre und der Fuſspunkt A der beiden Perpendikel AE, AD auf der Verlängerung von AS über S hinaus angenommen werden müſste.

Denkt man noch DE gezogen, so hat man aus dem Dreieck DAE:

$$\cos A = \frac{AD^2 + AE^2 - DE^2}{2 \cdot AD \cdot AE} \quad (\S\ 30).$$

Ebenso hat man aus dem gegen ASE dachförmig aufstehenden Dreieck DSE, in welchem der Kantenwinkel DSE $= a$ ist (§ 69):

$$\cos a = \frac{SD^2 + SE^2 - DE^2}{2 \cdot SD \cdot SE}.$$

Hieraus den Wert von DE^2 gezogen und in die erste Gleichung substituiert, kommt:

$$\cos A = \frac{2\,SD \cdot SE \cdot \cos a - (SD^2 - AD^2) - (SE^2 - AE^2)}{2\,AD \cdot AE}.$$

Die beiden Dreiecke DAS, EAS sind bei A rechtwinklig, SD und SE die Hypotenusen, daher $SD^2 - AD^2 = AS^2$, ebenso $SE^2 - AE^2 = AS^2$, mithin:

$$\cos A = \frac{2 \cdot SD \cdot SE \cdot \cos a - 2 \cdot AS^2}{2\,AD \cdot AE}$$

$$\cos A = \frac{SD}{AD} \cdot \frac{SE}{AE} \cdot \cos a - \frac{AS}{AD} \cdot \frac{AS}{AE}.$$

Nun ist in dem bei A rechtwinkligen Dreieck SAD, $\frac{AD}{SD} = \sin b$, mithin $\frac{SD}{AD} = \frac{1}{\sin b}$; ferner: $\frac{AS}{AD} = \cot b = \frac{\cos b}{\sin b}$. Im rechtwinkligen Dreieck SAE ist $\frac{AE}{SE} = \sin c$, also: $\frac{SE}{AE} = \frac{1}{\sin c}$; ferner: $\frac{AS}{AE} = \cot c = \frac{\cos c}{\sin c}$; dies substituiert, hat man:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}.$$

In dieser Gleichung ist von Lineargrößen keine Spur mehr vorhanden. Für die beiden andern Winkel B und C ist offenbar ebenso:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}.$$

Wäre, als specieller Fall, jede der drei Seiten des sphärischen Dreiecks, $a, b, c, = 90^0$, so wäre $\cos A = 0$, $\cos B = 0$, $\cos C = 0$, also auch $\angle A = \angle B = \angle C = 90$; sind alle drei Seiten $a, b, c, > 90$, so sind auch alle drei Winkel A, B, C stumpf, weil dann ihre *cosinus* negativ.

72.

Die vorstehenden Formeln, nach welchen man aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks die Winkel berechnen kann, sind zwar die Fundamentalformeln der ganzen sphärischen Trigonometrie, indem alle übrigen daraus abgeleitet werden können, für die logarithmische Rechnung sind sie aber etwas unbequem und wir wollen deshalb noch eine für die numerische Rechnung bequemere daraus ableiten. Man hat aus:

$$\cos \mathrm{A} = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$1 - \cos \mathrm{A} = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{A} = \frac{\sin b \cdot \sin c - \cos a + \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{A} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c}, \text{ also } (\S\ 52,\ 53):$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{A} = \frac{2 \sin \frac{a + b - c}{2} \cdot \sin \frac{a + c - b}{2}}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} \mathrm{A} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a + b - c}{2} \cdot \sin \frac{a + c - b}{2}}{\sin b \cdot \sin c}} \ldots\ldots (1)$$

$$1 + \cos \mathrm{A} = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{A} = \frac{\sin b \cdot \sin c + \cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{A} = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \cdot \sin c} \ (\S\ 52)$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{A} = \frac{2 \sin \frac{a + b + c}{2} \cdot \sin \frac{b + c - a}{2}}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} \mathrm{A} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a + b + c}{2} \cdot \sin \frac{b + c - a}{2}}{\sin b \cdot \sin c}} \ldots\ldots (2)$$

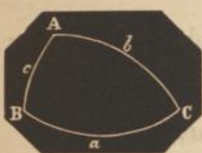
$$tg\, \tfrac{1}{2} \mathrm{A} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a + b - c}{2} \cdot \sin \frac{a + c - b}{2}}{\sin \frac{a + b + c}{2} \cdot \sin \frac{b + c - a}{2}}} \ldots\ldots (3).$$

Von diesen drei Formeln ist die letztere vorzuziehen, weil die Tangenten immer die gröſsten Differenzen haben. Sie läſst sich aber noch etwas vereinfachen. Setzt man nämlich: $a+b+c=s$, also $\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}s$; $\frac{a+b-c}{2}=\frac{1}{2}s-c$ etc., so ist:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s-b)\cdot\sin(\frac{1}{2}s-c)}{\sin\frac{1}{2}s\cdot\sin(\frac{1}{2}s-a)}}.$$

Zahlenbeispiele hierzu siehe § 91.

73.



Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreieck verhalten sich die *sinus* der Winkel, wie die *sinus* der gegenüber liegenden Seiten. In Zeichen:

$$\frac{\sin\mathrm{A}}{\sin\mathrm{B}}=\frac{\sin a}{\sin b};\qquad \frac{\sin\mathrm{A}}{\sin\mathrm{C}}=\frac{\sin a}{\sin c};\qquad \frac{\sin\mathrm{B}}{\sin\mathrm{C}}=\frac{\sin b}{\sin c}.$$

Beweis. Es folgt aus $\cos\mathrm{A}=\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}$ (§ 71):

$$1-\cos^2\mathrm{A}=1-\frac{(\cos a-\cos b\cdot\cos c)^2}{\sin^2 b.\sin^2 c}$$

$$\sin^2\mathrm{A}=\frac{\sin^2 b\cdot\sin^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c-\cos^2 b\cdot\cos^2 c}{\sin^2 b\cdot\sin^2 c}.$$

Nun ist aber $\sin^2 b\cdot\sin^2 c=(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)=1-\cos^2 b-\cos^2 c+\cos^2 b\cdot\cos^2 c$. Letzterer Ausdruck statt $\sin^2 b\cdot\sin^2 c$ gesetzt, kommt:

$$\sin^2\mathrm{A}=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 b\cdot\sin^2 c}.$$

In dieser Gleichung ist der Zähler rechter Hand offenbar eine symmetrische Funktion von a, b, c (d. h. die Verwechselung dieser Gröſsen bringt keine Veränderung hervor); setzen wir ihn Kürze halber $=z^2$, so ist:

$$\sin\mathrm{A}=\frac{z}{\sin b\cdot\sin c}\,\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Werden die beiden anderen Gleichungen:

$$\cos\mathrm{B}=\frac{\cos b-\cos a\cdot\cos c}{\sin a\cdot\sin c}\quad\text{und}\quad\cos\mathrm{C}=\frac{\cos c-\cos a\cdot\cos b}{\sin a\cdot\sin b}$$

ebenso behandelt, so kommt, was auch ohne Rechnung klar ist, indem der Zähler rechter Hand, weil eine symmetrische Funktion von a, b, c, in beiden Fällen offenbar ganz derselbe, wie in (1) ist:

$$\sin B = \frac{z}{\sin a \cdot \sin c} \ldots\ldots (2) \qquad \sin C = \frac{z}{\sin a \cdot \sin b} \ldots\ldots (3).$$

Die Gleichungen 1, 2, 3 paarweise durcheinander dividiert, kommt, wie behauptet, $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}$ etc., oder auch, weil die Seiten doch in Graden ausgedrückt (Winkel) sind, so geschrieben:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

74.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei Winkeln A, B, C eines sphärischen Dreiecks eine Seite, z. B. a, berechnen kann.

Auflösung. Die drei Fundamentalgleichungen (§ 71):

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$

enthalten die drei gegebenen Gröſsen, A, B, C und drei unbekannte a, b, c. Um die Unbekannte a zu finden, eliminieren wir die beiden andern b, c, oder nur $\cos b$, $\cos c$, indem, zufolge § 73, $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ und $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}$, mithin $\sin b$ durch $\sin a \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$ und $\sin c$ durch $\sin a \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$ ersetzt werden kann.

Reduzieren wir, um zuerst $\cos b$ zu eliminieren, jede der drei Gleichungen auf $\cos b$, so kommt:

$$\cos b = \frac{\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos c}$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos b = \frac{\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C}{\cos a}.$$

Diese für $\cos b$ gefundenen Ausdrücke paarweise gleich gesetzt, geben folgende zwei neue Gleichungen:

$$\frac{\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos c} = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \ldots . (1)$$

$$\frac{\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C}{\cos a} = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \ldots . (2).$$

Um aus diesen beiden Gleichungen $\cos c$ zu eliminieren, reduziere man jede auf $\cos c$. Die erste giebt:

$$\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \cos^2 c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B$$
$$\cos a\,(1 - \cos^2 c) - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B$$
$$\cos a \cdot \sin^2 c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B$$
$$\cos c = \frac{\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A}{\sin a \cdot \cos B}.$$

Aus der Gleichung (2) folgt:

$$\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \cos^2 a \cdot \cos c + \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B$$
$$\cos c\,(1 - \cos^2 a) - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B$$
$$\cos c \cdot \sin^2 a - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B$$
$$\cos c = \frac{\cos a \cdot \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos C}{\sin a}.$$

Die beiden für $\cos c$ erhaltenen Ausdrücke gleich gesetzt, geben:

$$\frac{\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A}{\sin a \cdot \cos B} = \frac{\cos a \cdot \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos C}{\sin a}.$$

Aus dieser Endgleichung folgt:

$$\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin c \cdot \cos^2 B + \sin b \cdot \cos B \cdot \cos C$$
$$\cos a \cdot \sin c\,(1 - \cos^2 B) = \sin b \cdot \cos A + \sin b \cdot \cos B \cdot \cos C$$
$$\cos a \cdot \sin c \cdot \sin^2 B = \sin b\,(\cos A + \cos B \cdot \cos C)$$
$$\cos a = \frac{\sin b}{\sin c} \cdot \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin^2 B}.$$

Nach § 73 kann man aber $\frac{\sin B}{\sin C}$ statt $\frac{\sin b}{\sin c}$ setzen, mithin ist auch, nach gehöriger Reduktion:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

ebenso: $$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}.$$

75.

Vorstehende Formeln, welche mit den Grundformeln eine auffallende Ähnlichkeit haben, sind aber, ebenso wie jene, für die logarithmische Rechnung etwas unbequem. Auf dieselbe

Weise aber, wie in § 72, lassen sich bequemere daraus ableiten. Man hat nämlich aus:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$1 - \cos a = 1 - \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin B \cdot \sin C - \cos A - \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{-(\cos A + \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = -\left\{\frac{\cos A + \cos (B + C)}{\sin B \cdot \sin C}\right\}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = -\frac{2 \cos \frac{A+B+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C-A}{2}}{\sin B \cdot \sin C} \quad (\S\ 52,\ 52.)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{A+B+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C-A}{2}}{\sin B \cdot \sin C}} \ldots\ldots (1).$$

Das Imaginäre dieser Formel ist nur scheinbar, denn da (§ 70) $A + B + C > 180^0$ und $< 540^0$, so ist auch $\frac{A+B+C}{2} > 90^0$ und $< 270^0$ und folglich $\cos \frac{A+B+C}{2}$ immer eine negative Gröſse, welche durch das davor stehende notwendige Minus-Zeichen positiv gemacht wird.

Ferner hat man auch:

$$1 + \cos a = 1 + \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin B \cdot \sin C + \cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos A + \cos (B - C)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{2 \cos \frac{A+B-C}{2} \cdot \cos \frac{A+C-B}{2}}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos \frac{A+B-C}{2} \cdot \cos \frac{A+C-B}{2}}{\sin B \cdot \sin C}} \ldots\ldots\ldots (2).$$

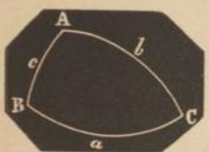
Dividiert man (1) durch (2), so erhält man die praktisch immer sichere Formel:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{-\cos\dfrac{A+B+C}{2}\cdot\cos\dfrac{B+C-A}{2}}{\cos\dfrac{A+B-C}{2}\,\cos\dfrac{A+C-B}{2}}}$$

oder, wenn man wieder $A + B + C = S$ setzt, kürzer:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}\,S\cdot\cos\,(\tfrac{1}{2}\,S - A)}{\cos(\tfrac{1}{2}S - B)\cdot\cos(\tfrac{1}{2}S - C)}}.$$

76.



Aufgabe. Eine Gleichung zwischen vier aufeinander folgenden Stücken eines sphärischen Dreiecks, z. B. für A, c, B, a zu finden, so daſs man, wenn irgend drei davon gegeben sind, das vierte danach berechnen kann.

Auflösung. Die Elimination von $\cos b$ aus den beiden Grundformeln

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{\cos a - \cos b\cdot\cos c}{\sin a\cdot\sin c} \\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a\cdot\cos c}{\sin a\cdot\sin c} \end{aligned}\right\}\text{ giebt § 74:}$$

$$\cos a\cdot\cos c + \sin a\cdot\sin c\cdot\cos B = \frac{\cos a - \sin b\cdot\sin c\cdot\cos A}{\cos c}$$

$$\cos a\cdot\cos^2 c + \sin a\cdot\sin c\cdot\cos c\cdot\cos B = \cos a - \sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$$

$$\sin a\cdot\sin c\cdot\cos c\cdot\cos B = \cos a\,(1 - \cos^2 c) - \sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$$

$$\sin a\cdot\cos c\cdot\cos B = \cos a\cdot\sin c - \sin b\cdot\cos A$$

$$\cos c\cdot\cos B = \frac{\cos a}{\sin a}\cdot\sin c - \frac{\sin b}{\sin a}\cdot\cos A$$

$$\cos c\cdot\cos B = \cot a\cdot\sin c - \frac{\sin B}{\sin A}\cdot\cos A \quad (\S\ 73)$$

$$\cot A\,\sin B + \cos B\cdot\cos c = \cot a\cdot\sin c.$$

Obgleich sich diese Formel, um danach aus drei gegebenen Gröſsen die vierte zu finden, durch Einführung eines Hilfswinkels für die logarithmische Rechnung bequemer machen läſst, so werden wir doch für diesen praktischen Zweck noch bequemere Formeln finden, und legen ihr deshalb auch nur eine theoretische Wichtigkeit bei.

77.

Zufolge der § 72 gefundenen Gleichungen ist:

$$1,\quad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\cdot\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin b\cdot\sin c}}$$

$$2,\quad \sin\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\frac{b+c-a}{2}\cdot\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a\cdot\sin c}}$$

$$3,\quad \sin\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+c-b}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin a\cdot\sin b}}$$

$$4,\quad \cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\cdot\sin c}}$$

$$5,\quad \cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin a\cdot\sin c}}$$

$$6,\quad \cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a\cdot\sin b}}.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit der fünften und dividiert durch die sechste etc., wie nachfolgend durch $\frac{(1)\cdot(5)}{(6)}$ etc. angedeutet, so kommt:

$$\frac{(1)\cdot(5)}{(6)};\quad \frac{\sin\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin c}\ \ldots\ldots(7)$$

$$\frac{(2)\cdot(4)}{(6)};\quad \frac{\cos\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin c}\ \ldots\ldots(8)$$

$$\frac{(4)\cdot(5)}{(3)};\quad \frac{\cos\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{a+b+c}{2}}{\sin c}\ \ldots\ldots(9)$$

$$\frac{(1)\cdot(2)}{(3)};\quad \frac{\sin\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin c}\ \ldots\ldots 10).$$

Durch paarweise Addition und Subtraktion dieser vier Gleichungen erhält man mit Berücksichtigung der Formeln in § 45, § 47, § 52 (48 und 49), § 49 (28):

$$(7)+(8);\quad \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{1}{2}c}\ldots(11)$$

$$(7)-(8);\quad \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{2\cos\frac{1}{2}c\cdot\sin\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{1}{2}c}\ldots(12)$$

$$(9)-(10);\quad \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{1}{2}c}\ldots(13)$$

$$(9)+(10);\quad \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{1}{2}c}\ldots(14).$$

78.

Aus den vier letzteren Formeln folgt nun, daſs:

$$\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}C\cdot\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}c=\sin\tfrac{1}{2}C\cdot\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\sin\frac{A-B}{2}\cdot\sin\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}C\cdot\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos\frac{A-B}{2}\cdot\sin\tfrac{1}{2}c=\sin\tfrac{1}{2}C\cdot\sin\frac{a+b}{2}.$$

Diese vier merkwürdigen, von Gauſs gefundenen Gleichungen, von welchen jede alle sechs Stücke des sphärischen Dreiecks enthält und von welchen in der *theoria motus* so vielfacher Gebrauch gemacht ist, hat seinerseits Delambre auch gefunden, *) jedoch ihre Wichtigkeit ganz übersehen. Sie dienen nämlich dem Astronomen, der oft sphärische Dreiecke zu berechnen hat, zur Kontrole. Hierauf hat zuerst Gauſs aufmerksam gemacht und ihren Nutzen hervorgehoben. **)

Anmerkung. Weil sowohl jeder Winkel als jede Seite im sphärischen Dreieck immer kleiner als 180°, mithin auch $\sin\frac{1}{2}C$ und $\cos\frac{1}{2}c$ immer positiv ist, so folgt aus der zweiten Formel, nämlich aus:

$$\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}c=\sin\tfrac{1}{2}C\cdot\cos\frac{a+b}{2},$$

*) *Connaissance des temps* 1808.

**) Göttinger Gelehrten-Anzeigen 1811, S. 1984.

dafs $\cos\frac{A+B}{2}$ und $\cos\frac{a+b}{2}$ immer einerlei Vorzeichen haben, mithin die Summe zweier Seiten mit der Summe der beiden ihnen gegenüber liegenden Winkel immer gleichartig ist, d. h.: beiderlei Summen sind gleichzeitig über, unter oder genau $= 180^0$. In Zeichen, wenn:

$$A + B \gtreqless 180^0, \text{ so ist zugleich auch } a + b \gtreqless 180^0.$$

Nach diesem wichtigen Satze kann man oftmals entscheiden, ob ein sphärisches Dreieck durch gegebene Stücke bestimmt oder zweideutig ist.

79.

Dividiert man die vorstehenden vier Gleichungen paarweise durcheinander, so erhält man die schon früher auf anderem Wege von Napier gefundenen und nach ihm benannten Gleichungen (Napier'schen Analogien):

$$\left.\begin{aligned}
tg\frac{A+B}{2} &= \cot\tfrac{1}{2}C\cdot\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\\
tg\frac{A-B}{2} &= \cot\tfrac{1}{2}C\cdot\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\\
tg\frac{a+b}{2} &= tg\,\tfrac{1}{2}c\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\\
tg\frac{a-b}{2} &= tg\,\tfrac{1}{2}c\cdot\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}
\end{aligned}\right\}$$

Das erste Paar dieser Gleichungen ist immer anzuwenden, wenn von einem sphärischen Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, das zweite Paar dagegen, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.