Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Lübsen, Heinrich B.

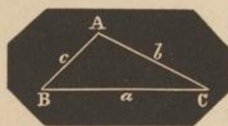
Leipzig, 1884

Siebentes Buch. Anwendungen der Goniometrie

Siebentes Buch.

Anwendungen der Goniometrie.

63 a.



Die §§ 35 und 36 aus der Figur abgeleiteten Formeln hätte man, unter Voranstellung der Goniometrie, folgendermaſsen etwas kürzer ableiten können, was jedoch dem Anfänger nicht so klar geworden sein würde.

So ergiebt sich z. B. aus $\frac{a}{b} = \frac{\sin \mathrm{A}}{\sin \mathrm{B}}$ nach einem bekannten Proportionssatz:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A} - \sin \mathrm{B}}, \text{ d. i. (s. § 52, Formel 54)}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{tg \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}, \text{ übereinstimmend mit § 36.}$$

Von besonderer Wichtigkeit aber sind die nachstehenden 2 Sätze.

I. Um aus drei Seiten eines Dreiecks einen Winkel, z. B. B zu finden, ist nach § 30:

$$\cos \mathrm{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \text{ hieraus (§ 50):}$$

$$1 - \cos \mathrm{B} = 1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2ac}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2ac}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \frac{(b+a-c)(b+c-a)}{4ac}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{4ac}}$$

$$1 + \cos \mathrm{B} = 1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \frac{(a+c+b)(a+c-b)}{4ac}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{4ac}}$$

Beide Gleichungen durcheinander dividiert:

$$tg\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{B} = \sqrt{\frac{(a+b-c)\,(b+c-a)}{(a+b+c)\,(a+c-b)}}$$

$$tg\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{B} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)\,(\frac{1}{2}s-c).^{*)}}{\frac{1}{2}s\cdot(\frac{1}{2}s-b)}}$$

Daher auch $cot\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{B} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s\,(\frac{1}{2}s-b)}{(\frac{1}{2}s-a)\,(\frac{1}{2}s-b)}}$.

Die für $cos\ \frac{1}{2}\,\mathrm{B}$ giltige Formel eignet sich in der Form

$$cos\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{B} = \sqrt{\frac{(a+c+b)\,(a+c-b)}{(2a)\cdot(2c)}}$$

vorzüglich für die numerische Berechnung eines Winkels. Es sei z. B. $a = 571{,}9$; $b = 923{,}2$; $c = 368{,}7$; $\angle \mathrm{B}$?

$$\left.\begin{aligned} a &= 571{,}9 \\ c &= 368{,}7 \end{aligned}\right\}\ \text{für den Nenner mit 2 zu multiplizieren.}$$

$$\begin{aligned} a+c &= 940{,}6 \\ b &= 923{,}2 \end{aligned}$$

$$\text{Daher}\quad \begin{aligned} a+c+b &= 1863{,}8 \\ a+c-b &= 17{,}4 \end{aligned}$$

$$cos\ \frac{\mathrm{B}}{2} = \sqrt{\frac{1863{,}8\cdot 17{,}4}{1143{,}8\cdot 737{,}4}}.$$

$$\begin{aligned} lg\ 1863{,}8 &= 3{,}2703993 \\ lg\ \ 17{,}4 &= 1{,}2405492 \\ \text{d. E. } lg\ 1143{,}8 &= 6{,}9416499 \\ \text{d. E. } lg\ \ 737{,}4 &= 7{,}1322969 \end{aligned}$$

$$(8{,}5848953 - 10) : 2 \quad \text{oder}$$

$$(18{,}5848953 - 20) : 2$$

$$lg\ cos\ \frac{\mathrm{B}}{2} = 9{,}2924477 - 10.$$

$$\frac{\mathrm{B}}{2} = 78^0\,41'\,30'',48,$$

$$\text{daher}\quad \mathrm{B} = 157^0\,23'\ \ 0'',96.$$

*) Wenn der *sinus* oder *cosinus* eines Winkels nahe = 1 ist, so ändern sich diese beiden Funktionen mit dem Wachsen des Winkels sehr langsam, wie die unmittelbare Betrachtung des Kreises oder auch die in den Tafeln ausgesetzten Differenzen zeigen. Wenn man also die Wahl hat, einen Winkel durch eine beliebige trigonometrische Funktion zu bestimmen, so wählt man immer die, welche die gröfsten Differenzen hat, weil hier ein Fehler von ein paar Einheiten in der letzten Stelle des Logarithmen keinen grofsen Einflufs auf den dazu aufzuschlagenden Winkel übt. Die *tangenten* haben immer die gröfsten Differenzen und bestimmen die Winkel also am genauesten.

II. Relation zwischen allen 6 Stücken des Dreiecks.

Aus $a : b = \sin A : \sin B$ folgt

$$a + b : b = \sin A + \sin B : \sin B$$

Ferner ist $\quad b : c = \sin B \quad : \sin C$, folglich

$$a + b : c = \sin A + \sin B : \sin C, \text{ d. i. } (\S\ 52 \text{ u. } \S\ 49)$$

$$a + b : c = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} : 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Nun ist $\sin \frac{A + B}{2} = \sin \frac{180^0 - C}{2} = \sin\left(90^0 - \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$, folglich

$$a + b : c = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A - B}{2} : 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Das 2. Verhältnis durch $2 \cos \frac{C}{2}$ gekürzt:

$$✽ \quad a + b : c = \cos \frac{A - B}{2} : \sin \frac{C}{2}.$$

Ebenso $\quad a - b : b = \sin A - \sin B : \sin B$

$$b : c = \sin B \quad : \sin C, \text{ daher}$$

$$a - b : c = 2 \sin \frac{A - B}{2} \cos \frac{A + B}{2} : 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}, \text{ oder,}$$

weil $\cos \frac{A + B}{2} = \cos \frac{180^0 - C}{2} = \sin \frac{C}{2}$:

$$a - b : c = 2 \sin \frac{A - C}{2} \sin \frac{C}{2} : 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Das 2. Verhältnis durch $2 \sin \frac{C}{2}$ gekürzt:

$$✽ \quad a - b : c = \sin \frac{A - B}{2} : \cos \frac{C}{2}.$$

Diese Mollweide'schen (fälschlich: Gauſs'schen) Formeln benutzt man bei Aufgaben, in welchen die Summe oder Differenz zweier Seiten oder die Differenz zweier Winkel gegeben ist.

Beispiel. Die Summe zweier Seiten = 357 Mtr., die 3. Seite c = 313 Mtr., die Differenz der beiden an dieser 3. Seite liegenden Winkel = $12^0\ 34'\ 56''$. Wie groſs sind die übrigen Stücke?

Nach der 1. Formel ist

$$357 : 313 = \cos \frac{12^0\ 34'\ 56''}{2} : \sin \frac{C}{2}, \text{ folglich}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \frac{313 \cos 6^0\ 17'\ 28''}{357}, \text{ woraus sich}$$

$$\frac{C}{2} = 60^0\ 37'\ 48'',1$$

$$C = 121^0\ 15'\ 36'',2 \text{ ergiebt.}$$

Mithin ist $A + B = 180^0 - 121^0\,15'\,36'',2 = 58^0\,44'\,23'',8.$

Daher $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 29^0\,22'\,11'',9$

$\frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \;\;6^0\,17'\,28''$ (s. die Aufgabe). Daher

durch Addition: $A = 35^0\,39'\,39'',9$

" Subtr.: $B = 23^0\;\;4'\,43'',9.$

Aus $a : c = sin\,A : sin\,C$ findet sich nun a, alsdann $b = 357 - a$.

63 b.

Aufgabe. Die Höhe eines Leuchtturmlichtes, L, über dem Niveau des Meeres ist $= h = 60$ m. Aus welcher Entfernung, e, kann es erblickt werden, wenn die Höhe des Auges A über demselben Niveau $= h' = 3{,}5$ m?

Antwort. Es kann nicht eher erblickt werden, als bis das Auge A in die Verlängerung der vom Punkte L an die Erde gezogenen Berührungslinie tritt. Verbindet man also die Punkte L, A und den Berührungspunkt T mit dem Mittelpunkt C, setzt $\angle LCT = \alpha$, $\angle ACT = \beta$ und den Radius r der Erde $= 6370000$ m, so hat man:

$$cos\,\alpha = \frac{r}{r + h} \text{ und } cos\,\beta\,\frac{r}{r + h'}$$

oder, weil bei dieser Art Aufgaben die Winkel α und β immer sehr klein sind, so erhält man nach § 63 a Randanmerkung und § 50 (33) genauer:

$$sin\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h}{r + h}} \text{ und } sin\,\tfrac{1}{2}\,\beta = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h'}{r + h'}}.$$

Aus den Winkeln α und β findet man dann leicht die zugehörigen Bögen, oder wenn ihre Summe der Länge der Tangente AL gleichgesetzt werden kann (§ 40 c), gleich einfacher:

$e = \sqrt{2rh + h^2} + \sqrt{2rh' + h'^2}$, oder genau genug:

$e = \sqrt{2rh} + \sqrt{2rh'} = 34325{,}4$ m $= 34\tfrac{1}{3}$ Kilom.

Aufgabe. Wie grofs ist die Fläche F der Erdzone von $\beta = 23\tfrac{1}{2}{}^0$ bis $\beta' = 66\tfrac{1}{2}{}^0$ der geographischen Breite? (Der Radius der Erde $r = 859{,}436$ Meilen.)

Antwort. Es ist die Höhe der Zone $= r\,sin\,\beta' - r\,sin\,\beta$ und folglich (Geometrie § 178) $F = 2r^2\pi\,(sin\,\beta' - sin\,\beta)$, oder: § 52, 49

$$F = 4r^2\pi\,cos\,\frac{\beta' + \beta}{2} \cdot sin\,\frac{\beta' - \beta}{2}$$

$F = 2405456$ □Meilen.

64.

Trigonometrische (oder goniometrische) Gleichungen.

1. Aufgabe. $\sin(2x + 7^0) = \cos(x - 11^0)$;

Auflösung. $\sin(2x + 7^0) = \sin[90^0 - (x - 11^0)]$, folglich

$$2x + 7^0 = 90^0 - (x - 11^0);$$
$$3x = 94^0;$$
$$x = 31\tfrac{1}{3}{}^0.$$

2. Aufgabe. $7\ tg\ x = 11 \sin x$; d. i.

$$\frac{7 \sin x}{\cos x} = 11 \sin x;$$ durch $\sin x$ dividiert,

$$\frac{7}{\cos x} = 11;$$ folglich

$$\cos x = \frac{7}{11}$$ u. s. w. (s. § 57, IV).

3. Aufgabe. $a \cos x = b \sin 2x$; d. i.

$$a \cos x = b \cdot 2 \sin x \cos x;$$
$$a = 2b \sin x;$$
$$\sin x = \frac{a}{2b}.$$

4. Aufgabe. $\sqrt{5} \cdot \sin x + 11 \cos x = 37 \sin x.$

Haben alle Glieder der Gleichung den Faktor $\sin x$ oder $\cos x$, so dividiert man durch $\sin x$ oder $\cos x$. Hier durch $\sin x$ dividiert:

$$\sqrt{5} + 11 \cot x = 37$$

$$\cot x = \frac{37 - \sqrt{5}}{11} = \frac{37 - 2{,}236068}{11}$$ u. s. w.

5. Aufgabe. $tg\ 2x = 7 \sin^2 x.$

Enthält die Gleichung den unbekannten Winkel in verschiedenen Formen, so ist jede derselben durch eine und dieselbe Funktion (hier durch $tg\ x$) auszudrücken. Daher (s. § 49, 27 und § 44, 9):

$$\frac{2\, tg\ x}{\sqrt{1 - tg^2 x}} = 7 \cdot \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}.$$

Der bequemeren Rechnung wegen $tg\ x = y$ gesetzt:

$$\frac{2y}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{7y^2}{1 + y^2}.$$

Durch y dividiert, folglich vorläufig $y = 0$, d. i. $tg\,x = 0$ oder $x = 0$ oder 180^0 u. s. w.

$$\frac{2}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{7y}{1+y^2};$$

$$2 + 2y^2 = 7y\sqrt{1-y^2}.$$

Quadriert und $y^2 = z$ gesetzt, giebt:

$$z^2 - \frac{41z}{53} = -\frac{4}{53}. \quad \text{Daher}$$

1) $z = y^2 = 0{,}65907$ oder $tg^2 x = 0{,}65907$

$$tg\,x = \pm\sqrt{0{,}65907} = \pm\,0{,}81183,$$

woraus $x_1 = 39^0\,4'\,15''$; $x_2 = 219^0\,4'\,15''$;

$$x_3 = -39^0\,4'\,15'' \text{ oder } 320^0\,55'\,45''; \; x_4 = 140^0\,55'\,45''.$$

2) $z = y^2 = 0{,}11451$ oder $tg^2 x = 0{,}11451$,
woraus sich gleichfalls 4 Werte für x ergeben.

6. Aufgabe. $a\,sin\,(x - b) = cos\,(x - d)$.

Auflösung. $a\,(sin\,x\,cos\,b - cos\,x\,sin\,b) = cos\,x\,cos\,d + sin\,x\,sin\,d$; durch $cos\,x$ dividiert:

$$a\,cos\,b\,tg\,x - a\,sin\,b = cos\,d + sin\,d\,tg\,x.$$

$$tg\,x = \frac{a\,sin\,b + cos\,d}{a\,cos\,b - sin\,d}.$$

65.

Hilfswinkel. Weil die *tangenten* und *cotangenten* immer zwischen 0 und ∞ enthalten, die *sinus* und *cosinus* aber immer echte Brüche sind, so ist klar, daſs man jede gegebene, noch so kleine oder groſse Zahl als *tangente* oder *cotangente* und jeden echten Bruch immer als *sinus* oder *cosinus* eines, mit Hilfe der Tafeln leicht zu bestimmenden Winkels betrachten kann.

Mit Rücksicht auf diese Eigenschaften der Funktionen berechnet man die unlogarithmischen Ausdrücke bequemer durch Einführung sogenannter Hilfswinkel (wenn man nicht die noch bequemeren Summen- und Differenzlogarithmen benutzen will).

Man unterscheidet hierbei 4 Fälle:

1. Fall. Es sei eine Summe von 2 zusammengesetzten Gliedern gegeben, die Form also $a + b$.

Man verwandle dieselbe in $a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ und setze $\frac{b}{a} = tg^2\,\varphi$ $\left(\text{oder auch } \frac{b}{a} = cot^2\,\varphi\right)$. Aus der Gleichung $tg\,\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$ läſst sich nun der Hilfswinkel φ bestimmen und jener Ausdruck wird alsdann $a\,(1 + tg^2\,\varphi)$, d. i. der bequeme logarithmische Ausdruck $\frac{a}{cos^2\,\varphi}$ (s. § 44).

Es sei z. B. $x = \sqrt{d^2 + e^2}$ mit $d = 506{,}835$ und $e = 279{,}041$ zu berechnen. Da die direkte Ausführung sehr zeitraubend wäre, so schreibt man

$$x = \sqrt{d^2\left(1 + \frac{e^2}{d^2}\right)} = d\sqrt{1 + \left(\frac{e}{d}\right)^2}$$

und setzt $\left(\frac{e}{d}\right)^2 = tg^2\,\varphi$. Aus $tg\,\varphi = \frac{e}{d} = \frac{279{,}041}{506{,}835}$ ergiebt sich $\varphi = 28^0\,50'\,7''$. Nun ist

$$x = d\sqrt{1 + tg^2\varphi} = \frac{d}{cos\,\varphi}\ \text{(s. § 44)}.$$

$$\begin{aligned} lg\,d &= 2{,}7048666 \\ lg\,cos\,\varphi = lg\,cos\,28^0\,50'\,7 &= 9{,}9425090 \\ \hline lg\,x &= 2{,}7623576 \\ x &= 578{,}57227. \end{aligned}$$

2. Fall. Es sei eine Differenz aus 2 zusammengesetzten Gliedern gegeben, die Form also $a - b$.

Man verwandele dieselbe in $a\left(1 - \frac{b}{a}\right)$ und setze $\frac{b}{a} = cos^2\,\varphi$ $\left(\text{oder auch } \frac{b}{a} = sin^2\,\varphi\right)$. Aus der Gleichung $cos\,\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$ findet man den Hilfswinkel φ und jener Ausdruck wird $a\,(1 - cos^2\,\varphi)$, d. i. der bequeme logarithmische Ausdruck $a\,sin^2\,\varphi$.

3. Fall. Ist das eine Glied eines zweiteiligen Ausdrucks (Summe oder Differenz) eine Funktion selbst, so ist es oft von Vorteil, nicht den 1. oder 2. Fall in Anwendung zu bringen, sondern das andere Glied in dieselbe Funktion eines Hilfswinkels zu verwandeln. Z. B.:

$$x = \frac{a\,d\,sin\,b\,sin\,e}{tg\,b - d\,sin\,e}.$$

Aus $tg\,\varphi = d\,sin\,e$ bestimme man den Hilfswinkel φ und es ist alsdann

$$x = \frac{a\,d\,sin\,b\,sin\,e}{tg\,b - tg\,\varphi} = \frac{a\,d\,sin\,b\,sin\,e}{\frac{sin\,(b - \varphi)}{cos\,b\,cos\,\varphi}}\ (\text{s. § 55, Nr. 58}) = \frac{a\,d\,sin\,b\,sin\,e\,cos\,b\,cos\,\varphi}{sin\,(b - \varphi)}.$$

Ein solches Resultat läfst sich oft noch durch Benutzung der für den Hilfswinkel aufgestellten Gleichung vereinfachen.

Aus $tg\,\varphi = d\,sin\,e$ ergiebt sich $d = \frac{tg\,\varphi}{sin\,e}$. Dies substituiert, giebt

$$x = \frac{a\,sin\,b\,cos\,b\,cos\,\varphi\,tg\,\varphi}{sin\,(b-\varphi)} = \frac{a\,sin\,2b\,sin\,\varphi}{2\,sin\,(b-\varphi)}.$$

4. Fall. Ist das eine Glied eines zweiteiligen Ausdrucks mit dem *sin* eines Winkels (z. B. mit $sin\,\gamma$), das andere Glied mit dem *cos* desselben Winkels (mit $cos\,\gamma$) multipliziert, so hebt man so aus, daſs entweder der *sin* oder *cos* dieses Winkels (z. B. $sin\,\gamma$) allein stehen bleibt, um den hierdurch entstandenen, mit der Kofunktion (mit $cos\,\gamma$) multiplizierten Faktor des andern Gliedes $= tg\,\varphi$ (oder $= cot\,\varphi$) zu setzen. Man schreibt hierauf statt $tg\,\varphi : \frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi}$, hebt den Nenner $cos\,\varphi$ aus und es ergiebt sich alsdann mit Benutzung der Formeln 13 bis 16 in §§ 45 und 47 ein einfacher logarithmischer Ausdruck.

1. Beispiel. $x = a\,sin\,b\,sin\,d + e\,tg\,b\,cos\,d.$

Dafür $x = a\,sin\,b\left(sin\,d + \frac{e\,tg\,b\,cos\,d}{a\,sin\,b}\right)$, oder

$$x = a\,sin\,b\left(sin\,d + \frac{e\,cos\,d}{a\,cos\,b}\right).$$

Es sei $\frac{e}{a\,cos\,b} = tg\,\varphi$, woraus sich der Hilfswinkel φ ergiebt.

Alsdann ist $x = a\,sin\,b\,(sin\,d + tg\,\varphi\,cos\,d)$, oder

$$x = a\,sin\,b\left(sin\,d + \frac{sin\,\varphi\,cos\,d}{cos\,\varphi}\right)$$

$$x = \frac{a\,sin\,b}{cos\,\varphi}\,(sin\,d\,cos\,\varphi + sin\,\varphi\,cos\,d)$$

$$x = \frac{a\,sin\,b\,sin\,(d+\varphi)}{cos\,\varphi} \quad \text{(s. § 45, Nr. 13).}$$

2. Beispiel. Aus der Gleichung

$$a\,cos\,x - b\,sin\,x = c$$

sei der Winkel x zu bestimmen.

Mit $a\,cos\,x - b\,\sqrt{1 - cos^2 x} = c$ (s. § 64, 5. Aufgabe) würde die Rechnung sehr zusammengesetzt. Man setze daher

$$a\left(cos\,x - \frac{b\,sin\,x}{a}\right) = c.$$

$\frac{b}{a} = tg\,\varphi$ gesetzt, aus welcher Gleichung sich der Hilfswinkel φ ergiebt, erhält man:

$$a\,(\cos x - tg\,\varphi \sin x) = c, \text{ d. i.}$$

$$a\left(\cos x - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin x\right) = c, \text{ oder}$$

$$\frac{a}{\cos\varphi}(\cos x \cos\varphi - \sin\varphi \sin x) = c, \text{ d. i.}$$

$$\frac{a\cos(x+\varphi)}{\cos\varphi} = c.$$

$$\cos(x+\varphi) = \frac{c\cdot\cos\varphi}{a}.$$

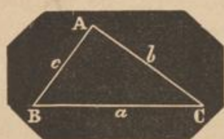
Setzt man $x + \varphi = y$, so ergiebt sich aus

$$\cos y = \frac{c\cdot\cos\varphi}{a}$$

der Winkel y und aus $x + \varphi = y$ alsdann

$$x = y - \varphi.$$

66.



Aufgabe. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel a, b, C eines Dreiecks die dritte Seite c zu finden.

Auflösung. Am besten berechnet man erst nach § 36 einen der beiden andern Winkel A oder B, und dann nach der *Sinus*-Regel die Seite c. Man kann aber letztere auch mittelst eines Hilfswinkels folgendermaſsen bestimmen. Zuerst hat man (30):

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \text{ hieraus:}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \text{ folgt:}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab - 2ab\cos C$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab\,(1 + \cos C)$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab\cdot 2\cos^2\tfrac{1}{2}C$$

$$c^2 = (a+b)^2\left[1 - \frac{4ab\cdot\cos^2\frac{1}{2}C}{(a+b)^2}\right]$$

$$c^2 = (a+b)^2\,[1 - \cos^2 v]$$

$$c = (a+b)\sin v, \text{ worin } \cos v = \frac{2\cos\frac{1}{2}C\sqrt{ab}}{a+b}.$$

Zur Übung möge hierzu das Zahlenbeispiel § 37 dienen.

67 a.

Aufgabe. Es sind die Lagen dreier Punkte, N, B, O, oder das dadurch bestimmte Dreieck gegeben, von einem vierten Punkt, Z, aus (in derselben Ebene) hat man auf die drei Punkte visiert und die Winkel m und n gemessen. Man soll daraus die

Lage dieses vierten Punktes Z, d. h. seine Entfernungen r, r', r'' von den drei Punkten N, B, O bestimmen.

Wir nehmen zu diesem sogenannten Pothenot'schen Problem ein Zahlenbeispiel aus Berghaus' Geographie.

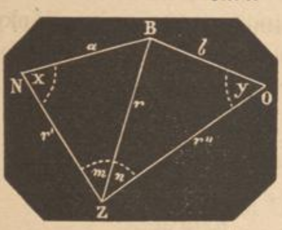
Die Lage des Elisabeth-Turms in Breslau gegen den Rathausturm in Neumarkt und den Turm der Kirche zu Ohlau ist bekannt. Es beträgt nämlich die Entfernung

von Breslau nach Neumarkt $BN = a = 8227{,}32$ Ruten,
„ Breslau nach Ohlau $BO = b = 7014{,}23$ „
der Winkel $NBO = B = 145^0\, 39'\, 50''{,}5$
in Zobten wurde gemessen: $\angle m = 52^0\, 44'\, 22''{,}2$
$\angle n = 38^0\, 37'\, 38''{,}3$,

man sucht die Entfernungen r, r', r''.

Auflösung. Man suche erst die beiden Winkel $BNZ = x$ und $BOZ = y$. Da die Summe der Winkel jedes Vierecks 360^0 beträgt, so ist $x + y = 360^0 - (B + m + n) = 122^0\, 58'\, 9''$, also $\frac{x+y}{2} = 61^0\, 29'\, 4''{,}5$. Nun ist:

$$(1)\quad \frac{\sin y}{\sin n} = \frac{r}{b} \quad \text{und} \quad (2)\quad \frac{\sin m}{\sin x} = \frac{a}{r}.$$



Multipliziert man (1) und (2), so ist

$$\frac{\sin m \cdot \sin y}{\sin n \cdot \sin x} = \frac{a}{b} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{a \cdot \sin n}{b \cdot \sin m} = tg\, v \ldots\ldots (Y)$$

wo der Hilfswinkel v leicht zu finden und als bekannt anzusehen ist.

Aus der Gleichung $\frac{\sin y}{\sin x} = tg\, v$ folgt nun:

$$1 - \frac{\sin y}{\sin x} = 1 - tg\, v \quad \text{und} \quad 1 + \frac{\sin y}{\sin x} = 1 + tg\, v,$$

$$\text{d. i.}\quad \frac{\sin x - \sin y}{\sin x} = 1 - tg\, v; \qquad \frac{\sin x + \sin y}{\sin x} = 1 + tg\, v$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{1 - tg\, v}{1 + tg\, v}$$

$$\frac{tg\, \frac{1}{2}(x - y)}{tg\, \frac{1}{2}(x + y)} = tg\,(45 - v) \quad (§§\ 51 \text{ und } 52).$$

Folglich $tg\, \frac{x-y}{2} = tg\, \frac{x+y}{2} \cot(45 + v)$, [§ 5] oder

$$tg\, \frac{x-y}{2} = tg\, 61^0\, 29'\, 4''{,}5 \cdot \cot\,(45^0 + v), \quad \text{worin} \quad tg\, v = \frac{a \cdot \sin n}{b \cdot \sin m}.$$

$$\begin{aligned} lg\ a &= 3{,}9152584 \\ lg\ sin\ n &= 9{,}7953599 \\ \text{d. E. } lg\ b &= 6{,}1540200 \\ \text{d. E. } lg\ sin\ m &= \underline{0{,}0991463} \\ lg\ tg\ v &= 9{,}9637846 \\ v &= 42^0\ 36'\ 49'',8 \\ 45^0 + v &= 87^0\ 36'\ 49'',8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lg\ tg\ 61^0\ 29' \ldots &= 0{,}2649570 \\ lg\ cot\ (45^0 + v) &= \underline{8{,}6198293} \\ lg\ tg\ \frac{x-y}{2} &= 8{,}8847863 \\ \frac{x-y}{2} &= 4^0\ 23'\ 9'',2. \end{aligned}$$

Mithin ist: $x = 65^0\ 52'\ 13'',7$ und $y = 57^0\ 5'\ 55'',3$.

Nachdem nun x und y gefunden, hat man aus (1):

$$r = b\,\frac{sin\ y}{sin\ n} \text{ oder auch } r = a\,\frac{sin\ x}{sin\ m},$$

$$\text{dann: } \frac{r'}{a} = \frac{sin\,(x+m)}{sin\ m}, \text{ woraus: } r' = a \cdot \frac{sin\,(x+m)}{sin\ m}.$$

$$\text{Ferner ist: } \frac{r''}{b} = \frac{sin\,(y+n)}{sin\ n}, \text{ woraus: } r'' = b \cdot \frac{sin\,(y+n)}{sin\ n}$$

$lg\,b = 3{,}8459800$	$lg\,a = 3{,}9152584$	$lg\,b = 3{,}8459800$
$lg\ sin\,y = 9{,}9240764$	$lg\,sin(x+m) = 9{,}9434449$	$lg\,sin(y+n) = 9{,}9978276$
$lg'\,sin\,n = 0{,}2046401$	$lg'\ sin\,m = 0{,}0991463$	$lg'\ sin\,n = 0{,}2046401$
$lg\,r = 3{,}9746965$	$lg\,r' = 3{,}9578496$	$lg\ r'' = 4{,}0484477$
$r = 9434{,}01$	$r' = 9075{,}06$	$r'' = 11180{,}15.$

Anmerkung. Man hätte x aus Y (s. oben) auch durch

$$\frac{sin\,(122^0\ 58'\ 9'' - x)}{sin\ x} = \frac{a\ sin\ n}{b\ sin\ m}, \text{ oder}$$

$$\frac{sin\ 122^0\ cos\ x - cos\ 122^0\ sin\ x}{sin\ x} = \frac{a\ sin\ n}{b\ sin\ m}, \text{ d. i.}$$

$$sin\ 122^0\ cot\ x - cos\ 122^0 = \frac{a\ sin\ n}{b\ sin\ m}$$

finden können.

67 b.

* Durch Benutzung eines Hilfswinkels lassen sich bequeme Formeln zur Berechnung der reellen Wurzeln x', x'' einer verwickelten quadratischen Gleichung aufstellen. Man erhält nämlich, unter Berücksichtigung der Vorzeichen von p und q, aus:

$$(1)\quad x^2 + px = q$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q} \cdot \frac{p^2}{p^2}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}.$$

Setzt man jetzt $tg\, u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, so ist (§ 44, 7):

$$x = \tfrac{1}{2}p\left(-1 \pm \frac{1}{\cos u}\right) = \tfrac{1}{2}p\left(\frac{-\cos u \pm 1}{\cos u}\right).$$

Die beiden reellen Wurzeln sind also:

$$x' = \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{1 - \cos u}{\cos u} = p \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{\cos u},$$

$$x'' = -\tfrac{1}{2}p \cdot \frac{1 + \cos u}{\cos u} = -p \cdot \frac{\cos^2 \frac{1}{2}u}{\cos u}.$$

Aus $tg\, u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ folgt $p = \frac{2\sqrt{q}}{tg\, u} = 2\sqrt{q} \cdot \frac{\cos u}{\sin u}$.

Wird dieser Wert von p substituiert, so ist:

$$x' = 2\sqrt{q} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{\sin u} = 2\sqrt{q} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{2 \sin \frac{1}{2}u \cos \frac{1}{2}u}, \text{ oder}$$

$$x' = tg\, \tfrac{1}{2}u \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = -\frac{\sqrt{q}}{tg\, \frac{1}{2}u}.$$

Auf dieselbe Weise findet man aus:

$$(2) \quad x^2 - px = q,$$

wenn wiederum $tg\, u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ gesetzt wird:

$$x' = -tg\, \tfrac{1}{2}u \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = \frac{\sqrt{q}}{tg\, \frac{1}{2}u}.$$

Ferner hat man aus:

$$(3) \quad x^2 + px = -q$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}.$$

Ist nun $4q < p^2$, so sind beide Wurzeln reell und negativ. Um sie zu erhalten, setze man: $\sin v = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, so ist:

$$x = -\tfrac{1}{2}p\,(1 \mp \cos v),$$

mithin, indem man hierin den Wert von $p = \frac{2\sqrt{q}}{\sin v}$ substituiert, die beiden Wurzeln:

$$x' = -tg\, \tfrac{1}{2}v \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = -\frac{\sqrt{q}}{tg\, \frac{1}{2}v}.$$

Ebenso findet man, wenn $4q < p^2$ und wiederum $\sin v = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ gesetzt wird, aus:

$$(4) \quad x^2 - px = -q$$

$$x' = \frac{\sqrt{q}}{tg\, \frac{1}{2}v} \text{ und } x'' = tg\, \tfrac{1}{2}v \cdot \sqrt{q}.$$