Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1884

Sechstes Buch. Ausdehnung der Begriffe sinus, cosinus etc. auf überstumpfte [...]

Sechstes Buch.

Ausdehnung der Begriffe *sinus, cosinus* etc. auf überstumpfe und negative Winkel.

54.

Die vielfache Anwendung, welche die Goniometrie in der höheren und angewandten Mathematik findet, hat es notwendig gemacht, die Begriffe der trigonometrischen Funktionen auch auf überstumpfe Winkel oder eigentlich auf beliebig grofse Kreisbögen, ja selbst auf mehrere ganze Umläufe eines Kreises auszudehnen, und obgleich wir hier, sowie im Vorhergehenden (§§ 21 und 30), die Notwendigkeit dieser Begriffserweiterung nach und nach herbeiführen und fühlbar machen könnten und beim mündlichen Unterricht auch thun würden, so können und wollen wir hier doch, Kürze halber, die bisher befolgte heuristische Methode verlassen, weil der Anfänger jetzt darauf vorbereitet ist, und wir an geeigneter Stelle auf die Notwendigkeit der Begriffserweiterung aufmerksam machen werden.

Die in Frage kommenden Winkel zeigt nebenstehende Figur. Der Punkt A bedeute den Nullpunkt, Punkt $D = 90^0$, $B = 180^0$, $E = 270^0$ und schreitet man so fort, so gelangt man zu $A = 360^0$, $D = 450^0$ u. s. w. Man unterscheidet daher 4 Quadranten: der erste von A bis D (0 bis 90^0), der zweite von D bis B (90^0 bis 180^0), der dritte von B bis E (180^0 bis 270^0), der vierte von E bis A (270^0 bis 360^0). Da der Bogen die Gröfse des Winkels bestimmt, so wird $\angle ACM$ durch den Bogen AM, $\angle ACD$ ($= 90^0$) durch den Bogen AD, der überstumpfe $\angle ACM''$ durch den über D gehenden Bogen AM'' u. s. w. bestimmt. Der eine Schenkel des zu messenden Winkels ist also unveränderlich CA, der andere (CM oder CD, CM′, CM″....) bestimmt die Gröfse des Winkels. Wir unterscheiden daher für jeden gegebenen Winkel einen unbeweglichen Schenkel (CA) und einen beweglichen (CM, CD...).

Setzt man den Radius $CM = CA = 1$, so ist, wie schon bekannt, MP der *sinus*, CP der *cosinus* des $\angle ACM$. Ferner ist M′P′ der *sin* des stumpfen Winkels ACM′ (siehe § 22), CP′ der *cos* des $\angle ACM'$ (s. § 30).

Die beiden sich rechtwinklig schneidenden Durchmesser AB und DE sind mithin für die Bestimmung des *sin* und *cos* wesentlich, denn die *sinus* MP und M′P′ sind Senkrechte auf jenen (AB), die *cos* PC und P′C Senkrechte auf letzteren (DE). Den 0^0 und 180^0 verbindenden Durchmesser AB nennt man die Hauptachse (Abscissenachse), den 90^0 und 270^0 verbindenden Durchmesser: Nebenachse (Ordinatenachse).

Es ist mithin der *sinus* die vom Endpunkte des beweglichen Schenkels auf die Hauptachse gefällte Senkrechte (oder, wenn AC nicht $= 1$: die vom Endpunkte des beweglichen Schenkels auf die Hauptachse gefällte Senkrechte dividiert durch den Radius). Z. B.:

$$\sin \angle ACM = MP \text{ (denn } \frac{MP}{CM} = \frac{MP}{1} = MP);$$
$$\sin \angle ACM' = M'P'.$$

Der bewegliche Schenkel des überstumpfen Winkels ACM″ ist CM″, der Endpunkt desselben (in der Peripherie): M″, die von diesem auf die Hauptachse gefällte Senkrechte: M″P′, folglich

$$\sin \angle ACM'' = M''P'.$$

Ebenso: *sin* des überstumpfen $\angle ACM''' = M'''P$.

Die trigonometrischen Funktionen der Winkel von 0 bis 90^0 (z. B. MP als *sin*, PC als *cos*) sind selbstverständlich positiv. Da nun für die Sinus zweierlei Senkrechte in Betracht kommen: die Senkrechten oberhalb der Hauptachse (z. B. MP) und die Senkrechten unterhalb der Hauptachse (z. B. M″P′), letztere aber den ersteren entgegengesetzt liegen, so müssen letztere (M″P′, M‴P) negativ sein, weil MP (und mithin auch M′P′) positiv ist. Oder:

Die Sinus des 1. und 2. Quadrant (MP, M′P′) sind positiv,
" " " 3. " 4. " (M″P′, M‴P) " negativ.

Da die Senkrechten (PC, P′C) auf die Nebenachse DE die Cosinus vorstellen und der *sin* des überstumpfen Winkels ACM″ = M″P′ ist, so ist P′C der *cos* des überstumpfen Winkels ACM″. Ebenso ist der *cos* des überstumpfen Winkels ACM‴ = PC.

Die auf DE senkrecht stehenden Linien PC und P′C liegen entgegengesetzt, folglich ist die dem positiven PC entgegengesetzte P′C negativ und mithin sind

die *cos* des 1. und 4. Quadrant (= PC) positiv,
„ „ „ 2. „ 3. „ (= P′C) negativ.

Die Tangenten und Cotangenten der Winkel außerhalb des 1. Quadrant könnten zwar auch durch geometrische Tangenten (siehe AT und BV in § 7) bestimmt werden, aber es genügt zu wissen, daß $tg = \frac{sin}{cos}$, $cot = \frac{cos}{sin}$, z. B. $tg\ 240^0 = \frac{sin\ 240^0}{cos\ 240^0}$. Für den 1. Quadrant sind die *sin* und *cos* positiv, folglich ist auch $\frac{sin}{cos}$ und $\frac{cos}{sin}$ positiv, oder die

Tangenten und Cotangenten des 1. Quadr. sind positiv.

Für den 2. Quadr. ist der *sin* positiv, der *cos* negativ, folglich $\frac{sin}{cos}$ und $\frac{cos}{sin}$ negativ, oder die

Tangenten und Cotangenten des 2. Quadr. sind negativ.

Für den 3. Quadr. sind *sin* und *cos* negativ, daher ihr Quotient positiv, oder die

Tangenten und Cotangenten des 3. Quadr. sind positiv.

Für den 4. Quadr. ist der *sin* negativ, der *cos* positiv, daher ihr Quotient negativ, oder die

Tangenten und Cotangenten des 4. Quadr. sind negativ.

55.

Durch vorstehende Sätze führt man die trigonometrischen Funktionen außerhalb des 1. Quadrant auf solche des ersten zurück.

Es ist *sin* ACM′ = M′P′, d. i. $sin\ (180^0 - \angle BCM')$ = der positiven Linie M′P′. Da nun auch M′P′ = *sin* BCM′, so ist $sin\ (180^0 - \angle BCM') = sin\ BCM'$, oder

I. $sin\ (180^0 - a) = sin\ a.$

Der Sinus des überstumpfen Winkels ACM″ ist = der negativen Linie M″P′. Denkt man sich dieselbe absolut, so ist

$sin\,(180^0 + \angle BCM'') = -\,M''P'$. Da nun $M''P' = sin\,BCM''$, so ist $sin\,(180^0 + \angle BCM'') = -\,sin\,BCM''$, oder

$$\text{II.}\quad sin\,(180^0 + a) = -\,sin\,a.$$

Der Sinus des überstumpfen Winkels ACM''' ist = der neg. Linie $M'''P$, d. i. $sin\,(360^0 - \angle ACM''') = -\,M'''P$. Da nun $M'''P = sin\,\angle ACM'''$, so ist $sin\,(360^0 - \angle ACM''') = -\,M'''P$, oder

$$\text{III.}\quad sin\,(360^0 - a) = -\,sin\,a.$$

Setzt man $a = 90^0 - b$, so geht Formel I über in $sin\,[180^0 - (90^0 - b)] = sin\,(90^0 - b)$, d. i.

$$\text{IV.}\quad sin\,(90^0 + b) = cos\,b.$$

Aus III wird mit $a = 90^0 - b$: $sin\,[360^0 - (90^0 - b)] = -\,sin\,(90^0 - b)$, d. i.

$$\text{V.}\quad sin\,(270^0 + b) = -\,cos\,b.$$

Ferner ist $cos\,ACM'$ = der negativen Linie $P'C$, oder $cos\,(180^0 - \angle BCM') = -\,P'C$. Da nun $P'C = cos\,BCM'$, so ist $cos\,(180^0 - \angle BCM') = -\,cos\,BCM'$, oder

$$\text{VI.}\quad cos\,(180^0 - a) = -\,cos\,a.$$

In gleicher Weise geht $cos\,ACM'' = -\,P'C$ über in $cos\,(180^0 + BCM'') = -\,cos\,BCM''$, oder

$$\text{VII.}\quad cos\,(180^0 + a) = -\,cos\,a.$$

$cos\,ACM''' = PC$ (positiv) wird $cos\,(360^0 - \angle ACM''') = cos\,ACM'''$, oder

$$\text{VIII.}\quad cos\,(360^0 - a) = cos\,a.$$

Mit $a = 90^0 - b$ wird aus VI und VIII:

$$\text{IX.}\quad cos\,(90^0 + b) = -\,sin\,b.$$

$$\text{X.}\quad cos\,(270^0 + b) = sin\,b.$$

$$tg\,(90^0 + b) = \frac{sin\,(90^0 + b)}{cos\,(90^0 + b)} = \frac{+\,cos\,b}{-\,sin\,b},\ \text{d. i.}$$

$$\text{XI.}\quad tg\,(90^0 + b) = -\,cot\,b.$$

In gleicher Weise ergeben sich aus $tg = \frac{sin}{cos}$ und $cot = \frac{cos}{sin}$ die nachstehenden Formeln:

XII. $tg\,(180^0 - a) = -\,tg\,a$	XVI. $cot\,(90^0 + b) = -\,tg\,b$
XIII. $tg\,(180^0 + a) = tg\,a$	XVII. $cot\,(180^0 - a) = -\,cot\,a$
XIV. $tg\,(270^0 + b) = -\,cot\,b$	XVIII. $cot\,(180^0 + a) = cot\,a$
XV. $tg\,(360^0 - a) = -\,tg\,a$	XIX. $cot\,(270^0 + b) = -\,tg\,b$

$$\text{XX.}\quad cot\,(360^0 - a) = -\,cot\,a.$$

Wird der Winkel gröfser als 360°, so wiederholen sich die vorhergehenden Werte mit ihren Vorzeichen, so dafs $\sin(360^0 + a) = MP = \sin a$, $\cos(360^0 + a) = PC = \cos a$ u. s. w. Oder:

$$\text{XXI.}\quad \begin{cases} \sin(n \cdot 360^0 + a) = \sin a \\ \cos(n \cdot 360^0 + a) = \cos a \\ tg\,(n \cdot 360^0 + a) = tg\, a \\ \cot(n \cdot 360^0 + a) = \cot a. \end{cases}$$

56.

Betrachtet man die Drehung von A in der Richtung nach D positiv, so mufs die entgegengesetzte Richtung, von A nach E, die negativen Winkel erzeugen. Geht man daher von A bis M‴, so erhält man den negativen $\angle ACM'''$ und da der *sin* desselben = der neg. Linie M‴P, so ist, $\angle ACM'''$ und M‴P absolut genommen, $\sin(-\angle ACM''') = -M'''P$, oder, weil $M'''P = \sin$ des pos. $\angle ACM'''$:

$$\sin(-a) = -\sin a.$$

In gleicher Weise erhält man die schon in anderer Weise in § 47 und 48 entwickelten Formeln: $\cos(-a) = \cos(+a)$, $tg\,(-a) = -tg\, a$, $\cot(-a) = -\cot a$.

57.

Die Formeln der §§ 55 und 56 mögen nun noch in eine Regel zusammengefafst werden, die sich ungemein leicht behalten und anwenden läfst.

I. Ist der gegebene Winkel ein 2gliedriger Ausdruck, bei welchem das 1. Glied Endpunkt der Hauptachse (also 0°, 180°, 360°, 540°..., überhaupt ein Vielfaches von 180°), das 2. Glied ein spitzer Winkel ist, so behält man das positiv genommene 2. Glied mit der gegebenen Funktion allein, für welche nur noch nach § 54 das Vorzeichen zu bestimmen ist.

Z. B.: $tg\,(180^0 - a)$? „$180^0 -$“ weggelassen, bleibt $tg\, a$. Da der gegebene Winkel $180^0 - a$ vor 180°, also im 2. Quadrant liegt und die *tg* im 2. Quadr. negativ ist, so hat man:

$$tg\,(180^0 - a) = -tg\, a.$$

$\sin(180^0 + a) = \ldots \sin a$. Da $180^0 + a$ im 3. Quadr., wo der *sin* negativ ist, so hat man:

$$\sin(180^0 + a) = -\sin a.$$

$cos\,(360^0 - a) = \ldots .\, cos\, a$. Da $360^0 - a$ im 4. Quadr. und der cos daselbst positiv, so ist

$$cos\,(360^0 - a) = +\, cos\, a.$$

$cot\,(-a) = cot\,(0^0 - a) = \ldots .\, cot\, a$. Da $-a$ im 4. Quadr., wo die cot negativ, so ist

$$cot\,(-a) = -\, cot\, a.$$

II. Ist der gegebene Winkel ein 2gliedriger Ausdruck, bei welchem das 1. Glied Endpunkt der Nebenachse (also 90^0, 270^0, $450^0 \ldots$, überhaupt ein ungeradzahliges Vielfache von 90^0) ist, so verfährt man ganz wie in I, nur ändert man die Funktion in ihre Kofunktion um (s. § 5).

Z. B.: $cos\,(270^0 - x) = \ldots .\, sin\, x$. Der cos ist im 2. Quadr. für 3. negativ, folglich ist $cos\,(270^0 - x) = -\, sin\, x$.

$tg\,(90^0 + x) = \ldots\, cot\, x$. Im 2. Quadr. ist die tg negativ, daher $= -\, cot\, x$.

$sin\,(270^0 + a) = \ldots\, cos\, a$. Der sin ist im 4. Quadr. negativ, folglich $= -\, cos\, a$.

$cot\,(90^0 - u) = \ldots\, tg\, u$. Im 1. Quadr. ist die cot positiv, daher $= +\, tg\, u$.

$tg\,(x - 270^0)$? Nach § 48, Nr. 25 ist dies zunächst $= -\, tg\,(270^0 - x)$ und nach vorstehender Regel II $= -\,[+\, cot\, x] = -\, cot\, x$.

III. Alle Winkel, welche größer als 90^0 sind, denkt man sich am besten in der Form $90^0 + a$, $180^0 + a$, $270^0 + a$ u. s. w. Z. B.: $tg\, 146^0\, 17'\, 28'',37 = tg\,(90^0 + 56^0\, 17'\, 28'',37) = -\, cot\, 56^0\, 17'\, 28'',37$.

Weniger einfach wäre $tg\, 146^0\, 17'\, 28'',37 = tg\,(180^0 - 33^0\, 42'\, 31'',63) = -\, tg\, 33^0\, 42'\, 31'',63$.

$sin\, 207^0\, 51' = sin\,(180^0 + 27^0\, 51') = -\, sin\, 27^0\, 51'$.

$cos\, 349^0\, 25'\, 47'',8 = cos\,(270^0 + 79^0\, 25'\, 47'',8) = sin\, 79^0\, 25'\, 47'',8$.

IV. Vorstehende Sätze benutzt man zugleich, um aus der gegebenen Gröfse einer Funktion die zugehörigen, stets in 2 verschiedenen Quadranten liegenden Winkel zu finden.

1. Beispiel. Es sei aus $tg\, x = \frac{3}{4}$ der $\angle x$ zu bestimmen. Offenbar liegt x im 1. und 3. Quadrant, da in diesen die tg positiv $(+\frac{3}{4})$ ist. Die Tafeln geben mit $lg\, tg\, x = lg\, \frac{3}{4} = lg\, 0{,}75 = 9{,}8750613 - 10$ unmittelbar jenen 1. Winkel: $36^0\, 52'\, 11'',6$. Da der andere Winkel im 3. Quadr. liegt, so setze man $x = 180^0 + y$, wo y ein spitzer Winkel. Nun ist $tg\ x = tg\ (180^0 + y) = tg\ y = \frac{3}{4}$. Daher $y = 36^0\ 52'\ 11'',6$ und folglich $x = 180^0 + y = 180^0 + 36^0\ 52'\ 11'',6 = 216^0\ 52'\ 11'',6$.

2. Beispiel. $cos\ x = -\frac{6}{7}$. Die gesuchten Winkel liegen im 2. und 3. Quadrant, in welchen der *cos* negativ ist. Mithin ist $x = 180^0 \mp y$ und folglich $cos\ x = cos\ (180^0 \mp y) = -cos\ y = -\frac{6}{7}$, woraus sich für den spitzen Winkel

$$cos\ y = \frac{6}{7}$$

$$\text{oder } lg\ cos\ y = lg\ \tfrac{6}{7} = 9{,}9330533 - 10,$$

$$\text{folglich } \quad y = 31^0\ 0'\ 9'',6.$$

Daher $x = 180^0 \mp 31^0\ 0'\ 9'',6$ oder

$$x_1 = 148^0\ 59'\ 50'',4 \text{ und } x_2 = 211^0\ 0'\ 9'',6.$$

58.

Wächst der Bogen AM (oder Winkel MCP) von 0 bis 90°, so wächst offenbar (CM = 1 gesetzt) der *sinus* gleichzeitig von 0 bis DC = 1, der *cosinus* dagegen nimmt ab von CA = 1 bis 0.

Wächst der Bogen von 90 bis 180°, so nimmt sein *sinus* wieder ab, von DC = 1 bis 0, der *cosinus* aber wächst im negativen Sinne von 0 bis CB = — 1.

Wächst der Bogen von 180 bis 270°, so wächst wieder der *sinus* im negativen Sinne von 0 bis CE = — 1, der *cosinus* aber nimmt ab von CB = — 1 bis 0.

Wächst der Bogen endlich von 270 bis 360°, so nimmt der *sinus* ab, von CE = — 1 bis 0, der *cosinus* dagegen wächst von 0 bis CA = 1, so dafs also:

$sin\ 0^0 = 0$	$cos\ 0^0 = 1$
$sin\ 90^0 = 1$	$cos\ 90^0 = 0$
$sin\ 180^0 = 0$	$cos\ 180^0 = -1$
$sin\ 270^0 = -1$	$cos\ 270^0 = 0$
$sin\ 360^0 = 0$	$cos\ 360^0 = 1.$

tg und *cot* von 0° bis 90° können wie die nachstehenden Werte entwickelt werden, sind aber schon § 8 bestimmt worden.

$$tg\ 180^0 = \frac{sin\ 180^0}{cos\ 180^0} = \frac{0}{-1} = -0.$$

$$tg\ 270^0 = \frac{sin\ 270^0}{cos\ 270^0} = \frac{-1}{0} = -\infty.$$

In gleicher Weise: $tg\ 360^0 = 0$; $cot\ 180^0 = -\infty$; $cot\ 270^0 = -0$; $cot\ 360^0 = \infty$.

59.

Jetzt bleibt uns noch zu beweisen übrig, daſs die im Vorhergehenden aufgeführten und in § 100 zusammengestellten Formeln, welche bisher nur für Winkel < 180 bewiesen sind, auch für diese Begriffserweiterung der trigonometrischen Funktionen allgemein giltig sind, sowie auch, weshalb für Bögen oder Winkel über 180^0 die trigonometrischen Funktionen die in den §§ 54 und 55 vorläufig festgesetzten Vorzeichen, der allgemeinen Giltigkeit der Formeln halber, notwendig erhalten müssen.

Daſs die Formeln $\sin 0 = 0$ bis $\cot 360^0 = 0$ in § 100 für alle noch so groſse Bögen gelten, ist, mit Berücksichtigung der Vorzeichen, klar, es frägt sich also nur, ob auch die Fundamentalformeln:

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \ldots\ldots (1)$$
$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ldots\ldots (2)$$

allgemein giltig sind. Daſs diese beiden Formeln für $a + b > 90$ gelten, ist bereits § 46 bewiesen.

Es seien nun beide Winkel a und b stumpf, folglich $a + b > 180^0$, aber noch $a + b < 270^0$, und wir müssen nun zeigen, daſs die rechten Seiten beider Formeln ganz dasselbe geben, wie die linken Seiten, indem wir den *sinus* und *cosinus* von dem überstumpfen Winkel $a + b$ an Gröſse und Vorzeichen so nehmen, wie in § 55 festgesetzt worden.

Man setze $a = 90 + p$ und $b = 90 + q$ (wo p und q spitze Winkel sind und auch $p + q < 90$), so giebt die Substitution von $90 + p$ und $90 + q$ in die erste Formel:

$$\sin (180 + p + q) = \sin (90 + p) \cdot \cos (90 + q) + \cos (90 + p) \cdot \sin (90 + q).$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, vermöge §§ 55 und 42:

$$- \sin (p + q) = - \cos p \cdot \sin q - \sin p \cdot \cos q$$
$$- \sin (p + q) = - (\sin p \cdot \cos q + \cos p \cdot \sin q),$$

was also vollkommen stimmt und zugleich, wenn man die erste Formel auf überstumpfe Winkel ausdehnen will, die Notwendigkeit zeigt, den *sinus* eines solchen Winkels als negativ zu nehmen, weil die rechte Seite der ersten Formel ein negatives Resultat giebt.

Dieselbe Substitution in die zweite Gleichung giebt:

$$\cos (180 + p + q) = \cos (90 + p) \cos (90 + q) - \sin (90 + p) \sin (90 + q),$$

hieraus, zufolge §§ 55 und 42:

$$-\cos(p+q) = + \sin p \cdot \sin q - \cos p \cdot \cos q$$
$$-\cos(p+q) = -(\cos p \cdot \cos q - \sin p \cdot \sin q),$$

was also wieder vollkommen stimmt.

Ebenso beweist man die Giltigkeit der beiden Grundformeln für die Fälle, wo erstens a stumpf und $b = 90^0$, zweitens a stumpf und b spitz ist, indem man beide mal $90 + p$ für a substituiert.

Sind endlich a und b stumpf und $a + b > 270^0$, so setze $a = 180 - p$, $b = 180 - q$ und beachte, dafs $\sin[360 - (p+q)] = -\sin(p+q)$; $\cos[360-(p+q)] = \cos(p+q)$ und $\sin(180-p) = \sin p$; $\cos(180-p) = -\cos p$. Die übrigen besondern Fälle sind hiernach leicht zu behandeln, sowie auch die beiden Formeln für $\sin(a-b)$ und $\cos(a-b)$, für den Fall, wo a und b beliebig grofs, oder auch $b > a$ ist.

60.

Die Einteilung des Kreisumfanges in 360^0 ist eine vollkommen willkürliche. Das Messen der Winkel mittelst dieser Grade ist daher auch weniger rationell, als wenn es (wie in der höhern Mathematik) durch die der Einheit gleichgesetzten Hauptlinie des Kreises, d. i. durch den $= 1$ gesetzten Radius geschieht. Für diesen Wert ist der Durchmesser des Kreises $= 2$ und daher der Umfang $= 2\pi = 6{,}283185307$.

Rationell würde man mithin

statt 360^0: „in Teilen des Halbmessers“ 2π,

„ 1^0: $\frac{2\pi}{360}$ oder $\frac{\pi}{180}$ zu setzen haben.

Um also einen durch Grade ausgedrückten Winkel (oder Bogen) in Teilen des Halbmessers auszudrücken, hat man die Zahl der Grade mit $\frac{\pi}{180} = 0{,}0174532925$ zu multiplizieren.

Beispiele. $\sin 90^0 = \sin\left(90 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{3{,}14159\ldots}{2} = \sin 1^0{,}5707963.$

$$\cos 180^0 = \cos\left(180 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \cos \pi.$$

$$tg\ 30^0 = tg\left(30 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = tg\frac{\pi}{6}.$$

$$\cot 17^0\,19'\,23'' = \cot 17^0{,}323056 = \cot\left(17^0{,}323056 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$
$$= \cot(17^0{,}323056 \cdot 0{,}0174532925) = \cot 0{,}3023444.$$

Oder (s. Bruhns, S. 608):

$$\begin{array}{rrl} \text{für} & 17^0 & = 0{,}29670597 \\ „ & 19' & = 0{,}00552688 \\ „ & 23'' & = 0{,}00011151 \\ \hline & & 0{,}30234436. \end{array}$$

Umgekehrt ist 2π in Teilen des Halbmessers $= 360^0$,

daher 1 „ „ „ „ $= \dfrac{180^0}{\pi}$.

Um also den in Teilen des Halbmessers ausgedrückten Bogen (oder Winkel) durch Grade wiederzugeben, hat man jene Zahl mit $\dfrac{180^0}{\pi} = 57^0{,}295779513$ zu multiplizieren.

Beispiele. $\cos\dfrac{\pi}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{180^0}{\pi}\right) = \cos 90^0 = 0.$

$$\sin 1{,}3579 = \sin\left(1{,}3579 \cdot \frac{180^0}{\pi}\right) = \sin\,(1{,}3579 \cdot 57^0{,}2957795)$$

$$= \sin 77^0{,}80193 = \sin 77^0\, 48'\, 6'',95 \text{ und daher}$$

$lg \sin 1{,}3579 = lg \sin 77^0\, 48'\, 6'',95 = 9{,}9900825 - 10$ (s. Bruhns, S. 411).

Der Bogen, welcher dem Radius, also der Zahl 1 gleich ist, umfaſst daher $1 \cdot \dfrac{180}{\pi}$ Grade $= 57^0{,}29578$.

Da $\sin 0^0$, $\sin 180^0$, $\sin 360^0$ (d. i. $\sin 2\cdot 180^0$), $\sin 3\cdot 180^0$ u. s. w. $= 0$, so ist in Teilen des Halbmessers $\sin 0$, $\sin \pi$, $\sin 2\pi, \ldots$ allgemein (wenn $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

$$\sin k\pi = 0.$$

Aus $\cos 0^0$, $\cos 360^0$, $\cos 2\cdot 360^0 \ldots$ oder $\cos 0$, $\cos 2\pi$, $\cos 4\pi$, folgt:

$$\cos 2k\pi = 1.$$

Aus $\cos 180^0$, $\cos\,(360^0 + 180^0)$, $\cos\,(2\cdot 360^0 + 180^0)\ldots$ oder $\cos \pi$, $\cos 3\pi, \ldots = -1$ folgt:

$$\cos\,(2k + 1)\,\pi = -1.$$

Aus $\sin 90^0$, $\sin\,(360^0 + 90^0), \ldots$ oder $\sin\dfrac{\pi}{2}$, $\sin 5\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $\sin 9\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $\ldots = 1$ folgt:

$$\sin\,(4k + 1)\,\frac{\pi}{2} = 1.$$

Aus $\sin 270^0$, $\sin\,(360^0 + 270^0), \ldots$ oder $\sin 3\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $\sin 7\cdot\dfrac{\pi}{2}, \ldots = -1$ folgt:

$$\sin\,(4k + 3)\,\frac{\pi}{2} = -1.$$

Aus $\cos 90^0$, $\cos 270^0$ (d. i. $\cos 3 \cdot 90^0$), $\cos 5 \cdot 90^0$, ... oder $\cos \frac{\pi}{2}$, $\cos 3 \cdot \frac{\pi}{2} \ldots\ldots = 0$ folgt:

$$\cos (2k + 1) \frac{\pi}{2} = 0.$$

61.

Um anzudeuten, daſs ein Bogen (resp. Winkel) genommen werden soll, der zu einer numerisch gegebenen Funktion gehört, schreibt man *arc* (d. i. *arcus* = Bogen) vor die Funktion. Z. B.: $arc \sin \frac{1}{2} = 30^0$, oder in Teilen des Halbmessers $arc \sin \frac{1}{2} = 0{,}523599$. Es ist also $arc \sin \frac{1}{2}$ die Abkürzung von $arc (\sin = \frac{1}{2})$ und bedeutet mithin den Bogen, dessen $\sin = \frac{1}{2}$ ist.

Aus $arc \sin x = y$ würde demnach $\sin y = x$,
aus $arc\ tg\ x = y$: $tg\ y = x$ folgen.

Ist umgekehrt $\cos y = x$, so ist $arc \cos x = y$.

Ist ferner $\sin y = x$, so ist $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, daher

$$arc \sin x = arc \cos \sqrt{1 - x^2}.$$

Ist $tg\ y = x$, so ist $\cot y = \frac{1}{tg\ y} = \frac{1}{x}$, daher

$$arc\ tg\ x = arc \cot \frac{1}{x}.$$

Aus $\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$= \sin a \sqrt{1 - \sin^2 b} + \sqrt{1 - \sin^2 a} \cdot \sin b$ folgt daher

$$arc \sin x + arc \sin y = arc \sin (x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}).$$

Ebenso findet man:

$$arc \cos x + arc \cos y = arc \cos \left[x y - \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}\right]$$

$$arc\ tg\ x + arc\ tg\ y = arc\ tg\ \frac{x + y}{1 - x y}$$

$$2\, arc\ tg\ x = arc\ tg\ x + arc\ tg\ x = arc\ tg\ \frac{2x}{1 - x^2}.$$

62.

* Drückt man die mit einem Halbmesser = 1 beschriebenen Bögen statt in Sekunden in Längen (in Teilen des Halbmessers) aus, so zeigt sich, wie auch schon aus der unmittelbaren Betrachtung des Kreises folgt, daſs die *sinus* zwar immer kleiner und die *tangenten* immer gröſser, als die zugehörigen Bögen sind, innerhalb eines kleinen Intervalls aber, etwa von 0″ bis 100″,

der Unterschied aller drei so gering ist, daſs er erst in der achten Decimale sich zeigt, und daſs man deshalb, innerhalb dieser Grenzen, statt der *sinus* (*tangenten*) die Bögen selbst (in Teilen des Halbmessers ausgedrückt) setzen kann, sowie auch das Verhältnis zweier solcher kleinen *sinus* durch das Verhältnis ihrer Bögen, gleichviel, ob in Längen oder in Sekunden ausgedrückt, darstellen kann. So ist z. B.:

$$\text{Bogen von } 1'' = \frac{3{,}1415926}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$
$$\log arc\ 1'' = 4{,}6855749 - 10$$
$$\log \sin\ 1'' = 4{,}6855749 - 10$$
$$\log \sin 10'' = 5{,}6855749 - 10$$
$$\log \sin 30'' = 6{,}1626961 - 10$$
$$arc\ 1'' = \sin\ 1'' = 0{,}000004848137 \cdots$$
$$\sin 10'' = 0{,}00004848137 \cdots$$
$$\sin 30'' = 0{,}0001454441 \cdots$$
$$\frac{\sin 30''}{\sin 10''} = \frac{0{,}000145 \cdots}{0{,}000048 \cdots} = \frac{30''}{10''} = 3.$$

Da die Längen der Bögen der Anzahl ihrer Sekunden proportional sind, so erhält man die Länge eines mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen und in Graden etc. gegebenen Bogens, indem man ihn erst auf Sekunden reduziert und die erhaltene Anzahl mit $arc\ 1''$ oder $\sin 1''$ multipliziert. So ist z. B. der mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebene Bogen von 30^0 in Länge $= 30 \cdot 60 \cdot 60 \cdot arc\ 1'' = 30 \cdot 60 \cdot 60 \cdot \sin 1''$, mithin $= 108000 \cdot 0{,}000004848137 \cdots = 0{,}523598796$.

Umgekehrt wird also ein in Teilen des Halbmessers $= 1$ gegebener Bogen in Sekunden ausgedrückt, indem man ihn durch $\sin 1''$ dividiert oder mit $\frac{1}{\sin 1''} = \frac{1}{0{,}000004848137} = 206265$ multipliziert. So viel Sekunden, nämlich $206265'' = 57^0\,17'\,44'',8$, kommen also auf einen Bogen, dessen Länge $= 1$, gleich dem *radius* ist.