Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1884

Fünftes Buch. Goniometrie

urn:nbn:de:bsz:31-273442

Fünftes Buch.

Goniometrie.

41.

Jede mathematische Wissenschaft enthält schon in sich, und ohne dafs die ersten Begründer derselben sie absichtlich hineingelegt hätten, die Keime zu einer neuen, und dies ist der Grund, weshalb die mathematischen Wissenschaften niemals zum eigentlichen Schlusse kommen, sondern immerfort wachsen. Der erste Begründer der Trigonometrie hatte die trigonometrischen Funktionen *sin*, *cos* etc. ursprünglich nur zu dem Zwecke berechnet, um durch ihre Vermittelung die in den beiden vorhergehenden Büchern aufgestellten trigonometrischen Probleme zu lösen, welches auch nach den dort gegebenen allgemeinen Regeln vollkommen geschehen ist.

Es konnte nun aber wohl nicht lange unbemerkt bleiben, dafs unter den trigonom. Funktionen eines oder auch mehrerer Winkel merkwürdige Beziehungen stattfinden, deren Kenntnis nicht allein die eigentliche Trigonometrie unterstützt und erleichtert, sondern auch in anderen, namentlich höheren Teilen der Mathematik, ja selbst bei rein arithmetischen Untersuchungen von grofser Wichtigkeit ist. Der Inbegriff dieser Beziehungen oder Formeln bildet für sich einen eigenen Teil der Trigonometrie, welchen man, wie schon § 2 bemerkt worden ist, Goniometrie nennt, und wir wollen nun die praktisch wichtigsten Sätze derselben, welche das Bedürfnis nach und nach zu entdecken genötigt hat, hier erst einzeln mitteilen und sie dann, zur leichtern Übersicht und Nachschlagung, in § 100 zusammenstellen. Um Gewandtheit in den vielfachen Anwendungen der Goniometrie zu erlangen, ist es durchaus erforderlich, die mit einem Sternchen bezeichneten Formeln auswendig zu wissen.

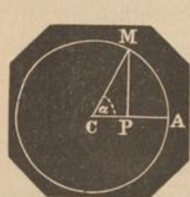
42.

Es sei ein stumpfer Winkel $MCA = 90 + a$, dann ist, $CM = 1$ gesetzt, $MP = \sin(90 + a)$ (§ 7) und CP negativ genommen, $= \cos(90 + a)$ (§ 32), da aber $MP = CQ$ und (für $CM = 1$), $CQ = \cos a$, ferner $CP = MQ$ und $MQ = \sin a$, so haben wir hier die zwei in der Folge als Beweismittel dienenden kleinen Formeln:

$$\sin(90 + a) = \cos a$$
$$\cos(90 + a) = -\sin a.$$

Anmerkung. Auf den Nutzen dieser praktischen Formeln ist schon am Schlusse der §§ 21 u. 32 hingewiesen worden.

43.



Lehrsatz. Bedeutet a einen beliebigen Winkel, spitz oder stumpf, so finden unter seinen trigonometrischen Funktionen folgende vier wichtige Beziehungen statt. Es ist nämlich immer: *)

$$* \; 1) \; \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad * \; 3) \; \frac{\sin a}{\cos a} = tg\, a$$

$$* \; 2) \; tg\, a \cdot \cot a = 1 \qquad * \; 4) \; \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a.$$

Beweis. Es ist:

$$\sin a = \frac{MP}{CM}, \text{ also } \sin^2 a = \frac{MP^2}{CM^2} \cdots\cdots (1)$$

$$\cos a = \frac{CP}{CM}, \text{ also } \cos^2 a = \frac{CP^2}{CM^2} \cdots\cdots (2).$$

Beide Ausdrücke (1) und (2) addiert, kommt:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = \frac{MP^2}{CM^2} + \frac{CP^2}{CM^2} = \frac{MP^2 + CP^2}{CM^2} = \frac{CM^2}{CM^2} = 1.$$

$$\text{Ferner: } \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{MP}{CM} : \frac{CP}{CM} = \frac{MP}{CP} = tg\, a \; (\S\ 2),$$

$$\text{ebenso: } \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{CP}{CM} : \frac{MP}{CM} = \frac{CP}{MP} = \cot a.$$

*) Statt $\sin a \cdot \sin a = (\sin a)^2$ schreibt man $\sin^2 a$.

Aus den beiden letztern Formeln $tg\ a = \frac{sin\ a}{cos\ a}$ und $cot\ a = \frac{cos\ a}{sin\ a}$ folgt durch Multiplikation derselben $tg\ a \cdot cot\ a = \frac{sin\ a}{cos\ a} \cdot \frac{cos\ a}{sin\ a} = 1.$ Nimmt man CM = 1, so ist schon MP der *sinus* und CP der *cosinus* von a, und man kann dann die drei zuerst bewiesenen Formeln unmittelbar aus der Figur ablesen.

Anmerkung. Die im 2. Teile des § 38 a enthaltene Formel $cot\ B = \frac{a}{b\ sin\ C} - \frac{b\ cos\ C}{b\ sin\ C}$ geht nun über in

$$cot\ B = \frac{a}{b\ sin\ C} - cot\ C.$$

44.

Aufgabe. Aus einer trigonometrischen Funktion eines Winkels jede der 3 übrigen zu berechnen und gewisse, die *tg* und *cot* enthaltende Ausdrücke zu vereinfachen.

Auflösung. Aus Formel 1 des § 43 folgt unmittelbar:

$$(5)\quad \begin{cases} sin^2\ a = 1 - cos^2\ a & cos^2\ a = 1 - sin^2\ a \\ sin\ \ a = \sqrt{1 - cos^2\ a} & cos\ \ a = \sqrt{1 - sin^2\ a}. \end{cases}$$

Aus Formel 2 des § 43 folgt:

$$(6)\qquad tg\ a = \frac{1}{cot\ a} \qquad\qquad cot\ a = \frac{1}{tg\ a}.$$

Anstatt mit $tg\ a$ oder $cot\ a$ zu multiplizieren, kann man also durch $cot\ a$ oder $tg\ a$ dividieren. (Vergl. die Anmerk. in § 19 b.) Anstatt $tg\ x = \frac{a}{bcd}$ wird man daher auch $cot\ x = \frac{bcd}{a}$ setzen.

Ferner ist $1 + tg^2 a = 1 + \left(\frac{MP}{CP}\right)^2$ [s. letzte Fig.] $= \frac{CP^2 + MP^2}{CP^2}$

$$= \frac{CM^2}{CP^2} = 1 : \left(\frac{CP}{CM}\right)^2, \text{ d. i.}$$

$$(7)\quad \begin{cases} 1 + tg^2 a = \frac{1}{cos^2 a} \text{ oder } \sqrt{1 + tg^2 a} = \frac{1}{cos\ a}. \text{ Folglich auch} \\ cos^2 a = \frac{1}{1 + tg^2 a} \text{ oder } cos\ a = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 a}}. \end{cases}$$

Ebenso $1 + cot^2\,a = 1 + \left(\frac{CP}{MP}\right)^2 = \frac{MP^2 + CP^2}{MP^2} = \frac{CM^2}{MP^2}$

$$= 1 : \left(\frac{MP}{CM}\right)^2, \text{ d. i.}$$

$$(8)\quad \begin{cases} 1 + cot^2\,a = \frac{1}{sin^2\,a} \text{ oder } \sqrt{1+cot^2\,a} = \frac{1}{sin\,a}. \text{ Folglich auch} \\ sin^2\,a = \frac{1}{1+cot^2\,a} \text{ oder } sin\,a = \frac{1}{\sqrt{1+cot^2\,a}}. \end{cases}$$

Aus $\frac{sin\,a}{cos\,a} = tg\,a$ folgt $sin\,a = tg\,a \cdot cos\,a = tg\,a \cdot \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\,a}}$ oder

$$(9)\qquad sin\,a = \frac{tg\,a}{\sqrt{1+tg^2\,a}}.$$

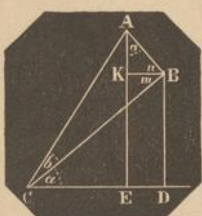
Aus $\frac{cos\,a}{sin\,a} = cot\,a$ folgt $cos\,a = cot\,a \cdot sin\,a = cot\,a \cdot \frac{1}{\sqrt{1+cot^2\,a}}$ oder

$$(10)\qquad cos\,a = \frac{cot\,a}{\sqrt{1+cot^2\,a}}.$$

$$(11)\qquad tg\,a = \frac{sin\,a}{cos\,a} = \frac{sin\,a}{\sqrt{1+sin^2\,a}} \text{ oder} = \frac{\sqrt{1-cos^2\,a}}{cos\,a}.$$

$$(12)\qquad cot\,a = \frac{cos\,a}{sin\,a} = \frac{cos\,a}{\sqrt{1-cos^2\,a}} \text{ oder} = \frac{\sqrt{1-sin^2\,a}}{sin\,a}.$$

45.



Aufgabe. Aus den *sinus* und *cosinus* zweier Winkel, a und b, den *sinus* und *cosinus* von der Summe beider Winkel zu finden.*)

Auflösung. Man lege die beiden Winkel a, b, deren Summe wir vorläufig noch kleiner als 90^0 annehmen, an einander, so daſs $\angle ACD = a + b$. Von A fälle man die beiden Perpendikel AB, AE und von B die beiden Perpendikel BD, BK, dann ist $\angle BAK = \angle BCD = a$ (denn $m = a$, als Wechs. Winkel, $m + n = 90^0$ und $\angle BAK + n = 90^0$, also $\angle BAK = m = a$). Aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck $\underline{ABC}$ folgt:

$$\frac{AB}{AC} = sin\,b \text{ und } \frac{BC}{AC} = cos\,b, \text{ also:}$$

$$(1)\ AB = AC \cdot sin\,b \text{ und } (2)\ BC = AC \cdot cos\,b.$$

---

*) $sin\,(a+b)$ ist nicht zu verwechseln mit $sin\,a + sin\,b$.

Aus dem bei K rechtwinkligen Dreieck ABK folgt: $\frac{AK}{AB} = \cos a$ und $\frac{BK}{AB} = \sin a$. In beide Ausdrücke den für AB gefundenen Wert substituiert, kommt: $\frac{AK}{AC \cdot \sin b} = \cos a$ und $\frac{BK}{AC \cdot \sin b} = \sin a$, hieraus:

$$\frac{AK}{AC} = \cos a \cdot \sin b \ldots\ldots (3) \qquad \frac{BK}{AC} = \sin a \cdot \sin b \ldots\ldots (4).$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD hat man: $\frac{BD}{BC} = \sin a$ und $\frac{CD}{BC} = \cos a$, oder für BC den Wert aus (2) gesetzt: $\frac{BD}{AC \cdot \cos b} = \sin a$, und $\frac{CD}{AC \cdot \cos b} = \cos a$. Hieraus:

$$\frac{BD}{AC} = \sin a \cdot \cos b \ldots\ldots (5) \qquad \frac{CD}{AC} = \cos a \cdot \cos b \ldots\ldots (6).$$

Addiert man die Gleichungen (3) und (5), so hat man: $\left(\text{weil } \frac{AK}{AC} + \frac{BD}{AC} = \frac{AK + BD}{AC} = \frac{AE}{AC} = \sin \angle ACD = \sin (a + b)\right)$

$$* \ (13) \ \sin (a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b.$$

Subtrahiert man (4) und (6), so erhält man [weil $\frac{CD}{AC} - \frac{BK}{AC} = \frac{CD - BK}{AC} = \frac{CE}{AC} = \cos (a + b)$]:

$$* \ (14) \ \cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b.$$

46.

Um zu zeigen, daſs die beiden oben gefundenen wichtigen Formeln:

$$\sin (a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \ldots\ldots (1)$$
$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \ldots\ldots (2)$$

auch für den Fall gelten, wo $a + b > 90$ ist, sei

1) $a = 90^0$, dann giebt die linke Seite der ersten Formel $\sin (90 + b) = \cos b$ (§ 42); setzt man aber auf der rechten Seite auch $a = 90$, so giebt diese, weil $\sin 90 = 1$ und $\cos 90 = 0$ (§ 7), offenbar dasselbe, nämlich $\cos b$, wie es sein muſs. Setzt man in der zweiten Formel $a = 90^0$, so geben beide Seiten dasselbe Resultat, nämlich:

$$\cos(90+b) = \cos 90 \cdot \cos b - \sin 90 \cdot \sin b$$

oder: $-\sin b = 0 \cdot \cos b - 1 \cdot \sin b$ (§ 42 und § 7)

d. i. $-\sin b = -\sin b$.

2) Seien a und b beide spitz, aber $a + b > 90^0$. Setzt man nun $a = 90 - m$, $b = 90 - n$, mithin $a + b = 180 - (m + n)$, so ist $m + n < 90$. Substituiert man statt a und b ihre Ausdrücke, $90 - m$ und $90 - n$ in die erste Formel, so erhält man linker Hand: $\sin(180 - [m+n])$ oder $\sin(m+n)$ (§ 21). Auf der rechten Seite kommt:

$$\sin(90-m) \cdot \cos(90-n) + \cos(90-m)\sin(90-n)$$
$$= \cos m \cdot \sin n + \sin m \cdot \cos n \quad (\S\ 5).$$

Dies ist aber die Entwickelung von $\sin(m+n)$, wofür, weil $m + n < 90$, die Formel giltig ist. Beide Seiten geben also dasselbe Resultat. Die Substitution in die zweite Formel giebt auf der linken Seite (§ 32):

$$\cos[180 - (m+n)] = -\cos(m+n) = -(\cos m \cdot \cos n - \sin m \cdot \sin n).$$

Die rechte Seite giebt (§ 5) $\cos(90-m) \cdot \cos(90-n) - \sin(90-m)\sin(90-n) = \sin m \cdot \sin n - \cos m \cdot \cos n$, also ganz dasselbe, wie auf der linken Seite. Linker Hand (Formel 2) ist $\cos(a+b)$ in sich negativ. Dies ist aber auch mit dem Betrage rechter Hand der Fall, weil für $a + b > 90$ auch $\cos a \cdot \cos b < \sin a \cdot \sin b$.

3) Sei $a > 90$. Setze $a = 90 + m$, dann giebt die Substitution in die erste Formel:

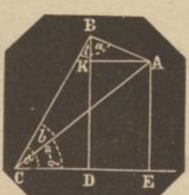
$$\sin(90+m+b) = \sin(90+m)\cos b + \cos(90+m)\sin b, \text{ oder § 42:}$$
$$\cos(m+b) = \cos m \cdot \cos b - \sin m \cdot \sin b.$$

Die zweite Formel giebt für $a = 90 + m$:

$$\cos(90+m+b) = \cos(90+m)\cos b - \sin(90+m)\sin b, \text{ oder § 42:}$$
$$-\sin(m+b) = -\sin m \cdot \cos b - \cos m \cdot \sin b$$
$$\sin(m+b) = \sin m \cdot \cos b + \cos m \cdot \sin b.$$

Wir erhalten also auch für $a > 90$ auf beiden Seiten der Formel (1) und (2) dasselbe Resultat.

47.



Um die ebenso wichtigen Formeln für die *sinus* und *cosinus* der Differenz zweier Winkel, $\sin(a-b)$ und $\cos(a-b)$, zu finden, sei $\angle BCE = a$ und $\angle BCA = b$, also $\angle ACE = a - b$, ferner AB senkrecht auf BC, und BD, AE senkrecht auf CE, sowie AK senkrecht auf BD, dann ist $\angle ABK + t = \angle BCD + t = 90$, also $\angle ABK = \angle BDC = a$. Nun ist: $\frac{AB}{AC} = \sin b$ und $\frac{BC}{AC} = \cos b$, also: (I) $AB = AC \cdot \sin b$ und (II) $BC = AC \cdot \cos b$.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD hat man: $\frac{BD}{BC} = \sin a$ und $\frac{CD}{BC} = \cos a$, oder für BC seinen Wert aus (II) gesetzt $\frac{BD}{AC \cdot \cos b} = \sin a$ und $\frac{CD}{AC \cdot \cos b} = \cos a$, hieraus:

$$\text{(III)}\ \frac{BD}{AC} = \sin a \cdot \cos b \ \text{ und (IV) } \frac{CD}{AC} = \cos a \cdot \cos b.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABK hat man: $\frac{BK}{AB} = \cos a$ und $\frac{AK}{AB} = \sin a$ oder für AB seinen Wert aus (I) gesetzt, $\frac{BK}{AC \cdot \sin b} = \cos a$ und $\frac{AK}{AC \cdot \sin b} = \sin a$, hieraus:

$$\text{(V)}\ \frac{BK}{AC} = \cos a \cdot \sin b \ \text{ und (VI) } \frac{AK}{AC} = \sin a \cdot \sin b.$$

Subtrahiert man die Gleichungen (III) und (V), so erhält man, weil $\frac{BD}{AC} - \frac{BK}{AC} = \frac{BD - BK}{AC} = \frac{AE}{AC} = \sin(a - b)$

$$* \ (15)\ \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b.$$

Addiert man die Gleichungen (IV) und (VI) und bemerkt, daſs: $\frac{CD}{AC} + \frac{AK}{AC} = \frac{CD + AK}{AC} = \frac{CE}{AC} = \cos(a - b)$, so hat man:

$$* \ (16)\ \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b.$$

Die allgemeine Giltigkeit der beiden Formeln 15 und 16, für den Fall, daſs a oder beide, a und b, > 90 sind, wird wieder wie in § 46 bewiesen.

Setzt man in (15) $a = o$, so ergiebt sich:

$$\sin(o - b) = o \cdot \cos b - 1 \cdot \sin b, \text{ d. i.}$$

$$(17)\ \sin(-b) = -\sin b. \text{ Oder:}$$

Multipliziert man den Winkel eines *sinus* mit -1, so hat man das Vorzeichen des Sinus zu ändern. Daher auch

$$(18)\ \sin(a - b) = -\sin(b - a).$$

Setzt man in (16) $a = o$, so erhält man:

$$\cos(o - b) = 1 \cdot \cos b + o \cdot \sin b, \text{ d. i.}$$

$$(19) \quad \cos(-b) = \cos(+b).$$

Der Cosinus ändert sich also nicht, wenn man den Winkel beliebig mit -1 multipliziert. Daher ist auch

$$(20) \quad \cos(a - b) = \cos(b - a).$$

48.

Die übrigen Formeln der Goniometrie kann man nun alle, ohne eine Figur nötig zu haben, aus den vorhergehenden ableiten. Dividiert man die Gleichungen 13 und 14 (§ 45) durcheinander, so hat man:

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}.$$

Dividiert man rechter Hand Zähler und Nenner durch $\cos a \cdot \cos b$ und bemerkt, dafs $\frac{\sin a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{\sin a}{\cos a} = tg\, a$, etc. (§43), so kommt:

$$* \ (21) \quad tg\,(a+b) = \frac{tg\, a + tg\, b^{*})}{1 - tg\, a \cdot tg\, b}.$$

Auf gleiche Weise geben die Formeln 15 und 16 (§ 47):

$$* \ (22) \quad tg\,(a-b) = \frac{tg\, a - tg\, b}{1 + tg\, a \cdot tg\, b}.$$

Löst man in gleicher Weise $\frac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)}$ auf und kürzt den Bruch durch $\sin a \cdot \sin b$, so erhält man:

$$(23) \quad \cot(a+b) = \frac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot a + \cot b}.$$

Ebenso folgt aus 16 und 15:

$$(24) \quad \cot(a-b) = \frac{\cot a \cdot \cot b + 1}{\cot b - \cot a}.$$

Formel 22 geht mit $a = o$ über in

$$tg\, b = \frac{tg\, o - tg\, b}{1 + tg\, o \cdot tg\, b}$$ und da $tg\, o = o$ (s. § 8):

$$(25) \quad \begin{cases} tg\,(-b) = -tg\, b \text{ und daher auch (vergl. 17 und 18)} \\ tg\,(a-b) = -tg\,(b-a). \end{cases}$$

---

*) Diese, sowie auch die folgenden Formeln, gelten natürlich so gut wie die, woraus sie abgeleitet, sowohl für stumpfe als spitze Winkel.

Aus (25) folgt $\frac{1}{tg\,(-b)} = \frac{1}{-\,tg\,b}$, d. i.

$$(26) \begin{cases} cot\,(-b) = -\,cot\,b \text{ und folglich auch} \\ cot\,(a-b) = -\,cot\,(b-a). \end{cases}$$

49.

Setzt man in den 4 Formeln 13, 14, 21 und 23 $b = a$, so erhält man:

$$* (27) \begin{cases} sin\,2a = 2\,sin\,a \cdot cos\,a \text{ und folglich auch} \\ \qquad sin\,a \cdot cos\,a = \frac{sin\,2a}{2} \\ cos\,2a = cos^2\,a - sin^2\,a \\ tg\,2a = \frac{2\,tg\,a}{1 - tg^2\,a} \\ cot\,2a = \frac{1}{2}\left(cot\,a - \frac{1}{cot\,a}\right) = \frac{1}{2}\,(cot\,a - tg\,a), \end{cases}$$

oder auch, wenn man a statt $2a$, mithin $\frac{1}{2}a$ statt a setzt:

$$* (28) \quad sin\,a = 2\,sin\,\tfrac{1}{2}a\,cos\,\tfrac{1}{2}a$$

$$(29) \begin{cases} cos\,a = cos^2\,\frac{1}{2}a - sin^2\,\frac{1}{2}a \\ tg\,a = \frac{2\,tg\,\frac{1}{2}a}{1 - tg^2\,\frac{1}{2}a} \\ cot\,a = \frac{1}{2}\,(cot\,\frac{1}{2}a - tg\,\frac{1}{2}a). \end{cases}$$

Setzt man $b = 2a$, so erhält man:

$$sin\,3a = sin\,a\;cos\,2a + cos\,a\;sin\,2a$$

oder, weil $cos\,2a = cos^2\,a - sin^2\,a = 1 - sin^2\,a - sin^2\,a = 1 - 2sin^2\,a$, und $sin\,2a = 2\,sin\,a \cdot cos\,a$, auch:

$$sin\,3a = sin\,a\,(1 - 2\,sin^2\,a) + cos\,a \cdot 2\,sin\,a \cdot cos\,a$$

$$sin\,3a = sin\,a - 2\,sin^3\,a + 2\,sin\,a \cdot cos^2\,a$$

$$sin\,3a = sin\,a - 2\,sin^3\,a + 2\,sin\,a\,(1 - sin^2\,a)$$

$$(30) \quad sin\,3a = sin\,a - 4\,sin^3\,a.\text{*)}$$

50.

Es ist: $1 = cos^2\,\frac{1}{2}a + sin^2\,\frac{1}{2}a$ (§ 43, 1)

und $cos\,a = cos^2\,\frac{1}{2}a - sin^2\,\frac{1}{2}a$ (§ 49, 29).

Die Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen geben folgende zwei wichtige Formeln:

---

*) Die Ableitung der Formeln, welche die *sinus* und *cosinus* von höhern Vielfachen eines Winkels durch Potenzen dieser Funktionen und umgekehrt ausdrücken, gehört in die höhere Analysis.

$$* \begin{cases} (31)\ 1 + \cos a = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}a \\ (32)\ 1 - \cos a = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}a. \end{cases}$$

Aus (31) und (32) folgt $\cos^2 \frac{1}{2}a = \frac{1 + \cos a}{2}$ und $\sin^2 \frac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{2}$ oder:

$$(33) \begin{cases} \cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{1 + \cos a}{2}} \\ \sin \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{2}}. \end{cases}$$

Dividiert man (32) durch (31), so erhält man:

$$tg^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \frac{(1 - \cos a)(1 + \cos a)}{(1 + \cos a)^2} = \frac{\sin^2 a}{(1 + \cos a)^2}$$

und auch $tg^2 \frac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \frac{(1 - \cos a)^2}{(1 + \cos a)(1 - \cos a)} = \frac{(1 - \cos a)^2}{\sin^2 a}$.

(34) $tg \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$ (und dies nach § 43) $= \frac{1}{\sin a} - \cot a$.

Aus (34) folgt $\frac{1}{tg \frac{1}{2}a} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}} = \frac{1 + \cos a}{\sin a}$ d. i. (§ 44, 6):

(35) $\cot \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{1}{\sin a} + \cot a$ (s. § 43).

$\frac{1 + \cos a}{\cos a} = \frac{1 + \cos a}{\sin a} \cdot \frac{\sin a}{\cos a}$ geht nun mit (35) über in:

$$(36)\ \frac{1 + \cos a}{\cos a} = \cot \frac{a}{2} \cdot tg\, a.$$

$\frac{1 - \cos a}{\cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a} \cdot \frac{\sin a}{\cos a}$ wird mit (34):

$$(37)\ \frac{1 - \cos a}{\cos a} = tg \frac{a}{2} \cdot tg\, a.$$

51.

Setzt man in den Formeln 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24 $a = 45^0$, und beachtet, daſs $\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $tg\, 45 = \cot 45^0 = 1$, so hat man:

$$(38)\quad \sin(45+b)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b+\sin b)$$

$$(39)\quad \sin(45-b)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b-\sin b)$$

$$(40)\quad \cos(45+b)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b-\sin b)$$

$$(41)\quad \cos(45-b)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b+\sin b)$$

$$(42)\quad tg(45+b)=\frac{1+tg\,b}{1-tg\,b}$$

$$(43)\quad tg(45-b)=\frac{1-tg\,b}{1+tg\,b}$$

$$(44)\quad cot(45+b)=\frac{cot\,b-1}{cot\,b+1}$$

$$(45)\quad cot(45-b)=\frac{cot\,b+1}{cot\,b-1}.$$

52.

Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

erhält man:

$$(46)\quad \sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cdot\cos b$$
$$(47)\quad \sin(a+b)-\sin(a-b)=2\cos a\cdot\sin b$$

oder, indem man $a+b=p$ und $a-b=q$, folglich $a=\frac{p+q}{2}$ und $b=\frac{p-q}{2}$ setzt:

$$(48)\quad \sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$(49)\quad \sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}.$$

Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b$$

erhält man:

$$(50)\quad \cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cdot\cos b$$
$$(51)\quad \cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin a\cdot\sin b$$

oder, indem man wieder $a + b = p$ und $a - b = q$ setzt:

$$(52) \quad \cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$(53) \quad \cos \overset{p}{q} - \cos \overset{q}{p} = 2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}.$$

Durch diese 4 wichtigen Formeln: 48, 49, 52, 53 kann man also die Summen und Differenzen zweier *sinus* oder *cosinus* in Produkte verwandeln. Dividiert man noch (49) durch (48), so erhält man:

$$\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{\cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}}{\sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}}$$

oder, indem man rechter Hand Zähler und Nenner durch $\cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$ dividiert:

$$(54) \quad \frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{tg \frac{p-q}{2}}{tg \frac{p+q}{2}}.$$

Setzt man in Formel 48: $q = 90^0 - p$, so entsteht mit Rücksicht auf § 5:

$$\sin p + \cos p = 2 \sin \frac{p + (90^0 - p)}{2} \cos \frac{2p - 90^0}{2}$$

$$= 2 \sin 45^0 \cos (p - 45^0) \text{ oder (s. Formel 20)}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos (45^0 - p), \text{ d. i. (s. § 5):}$$

$$(55) \quad \begin{cases} \sin p + \cos p = \sqrt{2} \cdot \sin (45^0 + p). \text{ In gleicher Weise ergiebt sich aus Formel 49:} \\ \sin p - \cos p = \sqrt{2} \cdot \cos (45^0 + p). \end{cases}$$

53.

Setzt man in (48) und (49) $p = 90^0$, so ist mit Rücksicht auf § 5:

$$(56) \quad 1 + \sin q = 2 \sin (45 + \tfrac{1}{2}q) \cos (45 - \tfrac{1}{2}q) = 2 \sin^2 (45 + \tfrac{1}{2}q)$$

$$(57) \quad 1 - \sin q = 2 \cos (45 + \tfrac{1}{2}q) \sin (45 - \tfrac{1}{2}q) = 2 \cos^2 (45 + \tfrac{1}{2}q).$$

Es ist $\frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{\cos a \cos b}$, d. i.

$$(58) \quad tg\, a \pm tg\, b = \frac{\sin (a \pm b)}{\cos a \cos b}.$$

Ebenso wird aus $\frac{\cos a}{\sin a} \pm \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin b \ \cos a \pm \cos b \ \sin a}{\sin a \ \sin b}$, d. i.

$$(59) \quad \cot a \pm \cot b = \frac{\sin (b \pm a)}{\sin a \ \sin b}.$$

Mit $b = 90^0 - a$ geht 58 (1. Formel) über in

$$tg\, a + tg\, (90^0 - a) = \frac{\sin (a + 90^0 - a)}{\cos a \ \sin a} = 1 : (\cos a \ \sin a)$$

$$= 1 : \frac{\sin 2a}{2} \text{ (s. Formel 27) oder}$$

$$(60) \quad tg\, a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}.$$

Multipliziert man die letzte Formel von (27) mit 2, so erhält man:

$$(61) \quad \begin{cases} \cot a - tg\, a = 2 \cot 2a; \text{ oder} \\ tg\, a - \cot a = -2 \cot 2a. \end{cases}$$

Dividiert man in (58) die erste Formel durch die zweite, so entsteht:

$$(62) \quad \frac{tg\, a + tg\, b}{tg\, a - tg\, b} = \frac{\sin (a + b)}{\sin (a - b)}.$$

Dividiert man (55) durch $\cos p$, so entsteht:

$$(63) \quad 1 + tg\, p = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin (45^0 + p)}{\cos p} \text{ und}$$

$$(64) \quad 1 - tg\, p = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos (45^0 + p)}{\cos p}.$$

(55) durch $\sin p$ dividiert, giebt:

$$(65) \quad 1 + \cot p = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin (45^0 + p)}{\sin p}$$

$$(66) \quad 1 - \cot p = -\frac{\sqrt{2} \cdot \cos (45^0 + p)}{\sin p}.$$

Nach Formel 61 ist

$$tg\, a\, (\cot a - tg\, a) = tg\, a \cdot 2 \cot 2a, \text{ d. i.}$$

$$tg\, a \cdot \cot a - tg^2\, a = 2\, tg\, a \cot 2a, \text{ oder}$$

$$(67) \quad 1 - tg^2\, a = 2\, tg\, a \cot 2a.$$

In gleicher Weise:

$$\cot a\, (tg\, a - \cot a) = \cot a \cdot (-2 \cot 2a), \text{ oder}$$

$$(68) \quad 1 - \cot^2 a = -2 \cot a \ \cot 2a.$$

Durch ähnliche Kombinationen könnte man solcher goniometrischen Formeln leicht noch mehrere finden, wir glauben jedoch an vorstehenden vollkommen genug zu haben.