Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1884

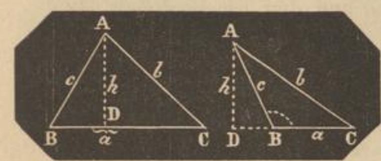
Viertes Buch. Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks

urn:nbn:de:bsz:31-273442

Viertes Buch.

Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.

27.



Lehrsatz. In jedem Dreieck verhalten sich je zwei Seiten zu einander wie die *sinus* der gegenüber liegenden Winkel.*)

Beweis. Man denke das Perpendikel AD $= h$ gefällt, so hat man aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken ADB und ADC:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{h}{c} = \sin \mathrm{B} \ldots . (1) \\ \frac{h}{b} = \sin \mathrm{C} \ldots . (2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{dividiert man (1) durch (2),} \\ \text{so folgt:} \end{array}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{C}}.$$

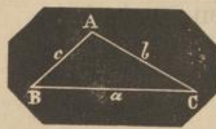
Da die *sinus* zweier Nebenwinkel, zufolge des § 21 erweiterten Begriffs, einander gleich sind, so ist der hier ausgesprochene wichtige Satz: daſs sich in jedem Dreieck die Seiten wie die *sinus* der gegenüber liegenden Winkel verhalten, allgemein giltig, das Dreieck möge spitzwinklig oder stumpfwinklig sein, denn die beiden Gleichungen (1) und (2) gelten sowohl für Fig. 2 als für Fig. 1. — Denkt man noch vom Winkel C ein Perpendikel auf die gegenüber liegende Seite c (oder deren Verlängerung Fig. 2) gefällt, so findet man durch gleiche Schlüsse $\frac{a}{b} = \frac{\sin \mathrm{A}}{\sin \mathrm{B}}$, mithin ist allgemein:

$$a : b : c = \sin \mathrm{A} : \sin \mathrm{B} : \sin \mathrm{C}.$$

*) Es ist üblich, die Seiten eines Dreiecks mit kleinen und die gegenüber liegenden Winkel mit den gleichnamigen groſsen Buchstaben zu bezeichnen.

Dieser sogenannte *Sinus*-Satz wird immer angewandt, wenn von einem Dreieck eine Seite und zwei Winkel, oder zwei Seiten und ein gegenüber liegender Winkel gegeben sind, mithin jedesmal, wenn eine Gleichung zwischen vier Stücken, die paarweise gegenüber liegen, gesucht wird.

28.



Aufgabe. Von einem Dreiecke, ABC, sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben, z. B. $a = 2057{,}8\,\mathrm{m}$, $B = 54^0\,17'\,12''$, $C = 41^0\,39'\,10''$. Man sucht die beiden andern Seiten b, c und den Flächeninhalt F?

Auflösung. Zuerst findet man den dritten Winkel $A = 180 - (B + C) = 84^0\,3'\,38''$; dann, nach dem *Sinus*-Satz:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} \qquad\qquad \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$\text{folglich } b = a\,\frac{\sin B}{\sin A} \qquad\qquad c = a\,\frac{\sin C}{\sin A}$$

$$\begin{array}{rl} \log \sin B = & 9{,}9095280 - 10 \\ \log a = & \underline{3{,}3134032} \\ & 13{,}2229312 - 10 \\ \log \sin A = & \underline{9{,}9976624 - 10} \\ \log b = & 3{,}2252688 \\ b = & 1679{,}843 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \log \sin C = & 9{,}8225700 - 10 \\ \log a = & \underline{3{,}3134032} \\ & 13{,}1359732 \\ \log \sin A = & \underline{9{,}9976624} \\ \log c = & 3{,}1383108 \\ c = & 1375{,}025. \end{array}$$

Um den Inhalt F zu erhalten, suche man erst das von der Spitze A auf die Grundlinie a gefällte Perpendikel h. Weil $\frac{h}{b} = \sin C$, so ist: $h = b \sin C$, und da, wie vorhin gefunden: $b = a\frac{\sin B}{\sin A}$, so ist auch: $h = a\frac{\sin B}{\sin A}\sin C$, mithin ist:

$$F = \tfrac{1}{2}a^2\,\frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}$$

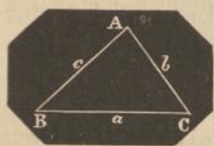
$$\begin{array}{rl} \log \sin B = & 9{,}9095280 - 10 \\ \log \sin C = & 9{,}8225700 - 10 \\ \log a^2 = & 6{,}6268064 \\ \log 0{,}5 = & \underline{0{,}6989700 - 1} \\ & 27{,}0578744 - 21 \\ \log \sin A = & \underline{9{,}9976624 - 10} \\ \log F = & 6{,}0602120 \\ F = & 1148714\,\square\mathrm{m}. \end{array}$$

Anmerkung. Es ist also $\sin A = \sin[180^0 - (B + C)] = \sin(B + C)$, siehe § 21. Oder: Der *sinus* eines Winkels im Dreieck ist = dem Sinus der Summe der beiden andern Winkel. Die Seite b hätte man in vorstehender Aufgabe mithin noch bequemer in folgender Weise gefunden:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{a \sin B}{\sin(B + C)} = \frac{2057{,}8 \sin 54^0\, 17'\, 12''}{\sin(54^0\, 17'\, 12'' + 41^0\, 39'\, 10'')} =$$

$$\frac{2057{,}8 \sin 54^0\, 17'\, 12''}{\sin 95^0\, 56'\, 22''} = \frac{2057{,}8 \sin 54^0\, 17'\, 12''}{\cos 5^0\, 56'\, 22''} \text{ (s. § 26, Zusatz).}$$

29.



Aufgabe. Von einem Dreieck, ABC, sind zwei Seiten b, c und ein der gröfsern Seite c gegenüber liegender Winkel, C, gegeben. Man sucht die übrigen Stücke.

Auflösung. Man suche zuerst den, der kleinern Seite b gegenüber liegenden Winkel B. Nach dem *Sinus*-Satze ist

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$$

$$\sin B = \frac{b}{c} \sin C.$$

Weil $b < c$, so mufs auch $B < C$, mithin Winkel B jedenfalls spitz sein.*) Ferner hat man nun $A = 180 - (B + C)$, und dann:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \text{ woraus: } a = b\frac{\sin A}{\sin B}.$$

Anmerkung. Sind 2 Seiten und der Gegenwinkel der kleinern dieser beiden Seiten gegeben, so ist die Auflösung unbestimmt. Es sind alsdann 2 verschiedene Dreiecke möglich (s. Geom. §§ 43 und 56).

Aufgabe. $b = 19$ Meter, $c = 23$ Meter, $\angle B = 41^0\, 37'$. Wie grofs sind die übrigen Stücke?

Auflösung. Man suche zunächst $\angle C$.

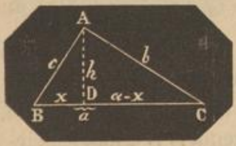
$$\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}, \text{ folglich } \sin B = \frac{c \sin B}{b} = \frac{23 \sin 41^0\, 37'}{19}.$$

$$\begin{aligned} \log 23 &= 1{,}3617278 \\ \log \sin 41^0\, 37' &= 9{,}8222621 - 10 \\ \hline &\ 1{,}1839900 \\ \log 19 &= 1{,}2787536 \\ \hline \log \sin C &= 9{,}9052364 - 10. \end{aligned}$$

*) Siehe auch Lübsens Elementar-Geometrie (25. Aufl.) §§ 43 u. 56.

In den Tafeln findet man C = 53° 30′ 37″. Nach § 23 ist aber auch C = 180° — 53° 30′ 37″ = 126° 29′ 23″. Man hat demnach 2 verschiedene Dreiecke, das eine mit $b = 19$, $c = 23$, B = 41° 37′, C = 53° 30′ 37″, das andere mit $b = 19$, $c = 23$, B = 41° 37′, C = 126° 29′ 23″. Sehr leicht findet sich nun auch in jedem Dreieck der 3. Winkel und nach dem *Sinus*-Satze die 3. Seite.

30.



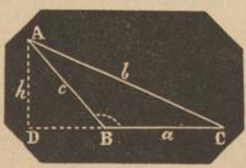
Lehrsatz. In jedem Dreieck ist der *cosinus* eines Winkels gleich der Summe der Quadrate der beiden ihn einschliefsenden Seiten; weniger dem Quadrate der ihm gegenüber liegenden Seite, dividiert durch das doppelte Produkt der beiden ihn einschliefsenden Seiten.*)

Es ist z. B. in Bezug auf den Winkel B:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Beweis. Denkt man das Perpendikel AD = h gefällt, und setzt BD = x, also DC = $a - x$, so hat man: $h^2 = c^2 - x^2$ und auch $h^2 = b^2 - (a - x)^2$; mithin: $b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2$. Aus dieser Gleichung folgt: $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. Dieser Quotient durch c dividiert, giebt obigen Ausdruck, denn es ist $\cos B = \frac{x}{c}$.

Anmerkung. Der Ausdruck $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ giebt an, wie weit der Fufspunkt D des Perpendikels AD von B gegen C hin fällt. Wäre z. B. $a = 8'$, $b = 6'$, $c = 4'$, so wäre $x = \frac{44}{16}$, und es wäre dann: $\cos B = \frac{11}{16}$.



Ist der Winkel B ein stumpfer (Fig. 2), so fällt das Perpendikel AD aufserhalb des Dreiecks auf die rückwärts verlängerte Linie BC, und es ist dann $b^2 > a^2 + c^2$. Obiger, für den Abstand des Punktes D von B gefundene Aus-

*) Dieser Satz, der sogenannte *Cosinus*-Satz, ist wichtig und deshalb dem Gedächtnis wohl einzuprägen.

druck: $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$, gilt aber auch für diesen Fall, wenn man nur das Vorzeichen des Resultats, welches hier negativ wird, richtig deutet. Wäre z. B. $a = 8$ m, $b = 12$ m, $c = 6$ m, so wäre $x = -\frac{11}{4}$ m. Das Minuszeichen deutet hier nun an, daſs der Fuſspunkt D des Perpendikels nicht, wie bei der Ableitung der Formel $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ vorläufig angenommen, in der Richtung BC, sondern in gerade entgegengesetzter Richtung BD um $\frac{11}{4}$ m von B entfernt liegt.*) Nimmt man aber diese negative Gröſse $x = -DB$ als positiv und dividiert durch c, so ist der Quotient $\frac{DB}{c}$ der *cosinus* von dem spitzen Nebenwinkel ABD, durch dessen Subtraktion von 180° der fragliche stumpfe Winkel B bestimmt wird. Der erste Begründer der Trigonometrie kam deshalb auf den nahe liegenden Gedanken: auch den Begriff des *cosinus* zu erweitern und auf stumpfe Winkel auszudehnen, nämlich: der *cosinus* eines stumpfen Winkels ist an Gröſse gleich dem *cosinus* des Nebenwinkels, aber negativ. Es ist also (s. letzte Fig.) $\cos ABC = -\cos ABD$.

31.

Mit dieser Erweiterung des Begriffs *cosinus* umfaſst also die vorhin aufgestellte Formel: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, beide Fälle, der Winkel B möge spitz oder stumpf sein. Giebt die Formel ein positives Resultat, so schlägt man den dazu gehörigen spitzen Winkel unmittelbar in den Tafeln auf. Giebt die Formel ein negatives Resultat, so sehe man es vorläufig als positiv an, suche den dazu gehörigen spitzen Winkel in den Tafeln und subtrahiere denselben von 180°.

32.

Es folgt hieraus zugleich, daſs es nicht nötig war, auch die stumpfen Winkel in die Tafeln aufzunehmen, indem diese durch ihre Nebenwinkel bestimmt sind, und da nach Ableitung

*) Vergleiche wegen dieses, für den Anfänger schwierigen Punktes, Lübsens Arithmetik (und Algebra) § 144.

und Festsetzung der Begriffe die *sinus* zweier Nebenwinkel vollkommen gleich sind und ebenso die *cosinus* zweier Nebenwinkel gleich grofs und nur entgegengesetzt sind, so folgt, dafs man auch mit Hilfe der Tafeln den *cosinus* eines stumpfen Winkels findet, indem man ihn nur von seinem spitzen Nebenwinkel, aber mit dem *Minus*-Zeichen (negativ) nimmt. Denn nach § 30 ist $\cos \angle ABC = -\cos \angle ABD$ (s. zweite Fig. des § 30), d. i. $\cos(180^0 - \angle ABD) = -\cos \angle ABD$, oder

$$\cos(180^0 - a) = -\cos a.$$

Ferner geht $\cos \angle ABC = -\cos \angle ABD$ über in $\cos \angle ABC = -\cos(180^0 - \angle ABC)$, oder

$$\cos a = -\cos(180^0 - a).$$

Z. B.: $\cos 120^0 = -\cos(180^0 - 120^0) = -\cos 60^0.$

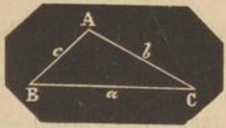
$\cos 171^0\,23' = -\cos(180^0 - 171^0\,23') = -\cos 8^0\,37'.$

Setzt man in der letzten Formel $a = 90^0 + b$, so entsteht $\cos(90^0 + b) = -\cos[180^0 - (90^0 + b)]$, d. i. $\cos(90^0 + b) = -\cos(90^0 - b)$ oder

$$\cos(90^0 + b) = -\sin b.$$

Z. B.: $\cos 125^0\,46' = \cos(90^0 + 35^0\,46') = -\sin 35^0\,46'$. (Vergl. den Zusatz zu § 21.)

33.



Aufgabe. Es sind alle drei Seiten eines Dreiecks gegeben: z. B. $a = 13$, $b = 10$, $c = 7$. Man sucht die Winkel.

Auflösung. Nach § 30 hat man:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{169 + 49 - 100}{2 \cdot 13 \cdot 7} \text{ oder:}$$

$$\cos B = \frac{118}{182} \qquad \begin{aligned} \log 118 &= 2{,}0718820 \\ \log 182 &= 2{,}2600714 \\ \hline \log \cos B &= 9{,}8118106 - 10 \\ B &= 49^0\,34'\,57'',3 \end{aligned}$$

Ebenso hat man § 30:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{169 + 100 - 49}{2 \cdot 13 \cdot 10} \text{ oder:}$$

$$\cos C = \frac{220}{260} \qquad \begin{aligned} \log 220 &= 2{,}3424227 \\ \log 260 &= 2{,}4149733 \\ \hline \log \cos C &= 9{,}9274494 - 10 \\ C &= 32^0\,12'\,15'',1. \end{aligned}$$

Ferner § 30:

$$\cos \mathrm{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{100 + 49 - 169}{2 \cdot 10 \cdot 7}$$

$\cos \mathrm{A} = -\frac{20}{140}$. Vergleicht man diese Gleichung mit $\cos(180^0 - a) = -\cos a$ (s. § 32), so ist $\mathrm{A} = 180^0 - a$, wenn $\frac{20}{140} = \cos a$. Folglich sucht man aus $\cos a = \frac{20}{140}$ den Winkel a und findet alsdann $\mathrm{A} = 180^0 - a$.

$$\begin{aligned} lg\ 20 &= 1{,}3010300 \\ lg\ 140 &= 2{,}1461280 \\ \hline lg\ \cos a &= 9{,}1549020 - 10 \\ a &= 81^0\,47'\,12'',4 \\ \mathrm{A} &= 180^0 - 81^0\,47'\,12'',4 \\ &= 98^0\,12'\,47'',6 \end{aligned}$$

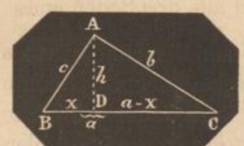
Die Winkel sind also

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= 98^0\,12'\,47'',6 \\ \mathrm{B} &= 49^0\,34'\,57'',3 \\ \mathrm{C} &= 32^0\,12'\,15'',1 \\ \hline \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} &= 180^0. \end{aligned}$$

34.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei gegebenen Seiten a, b, c eines Dreiecks den Flächeninhalt F desselben berechnen kann.

Auflösung. Obgleich diese Aufgabe in jedem Lehrbuche der Elementar-Geometrie schon vorkommt, so darf sie doch hier bei der Berechnung der verschiedenen Teile des Dreiecks nicht fehlen.



Setzt man die erst zu findende unbekannte Höhe des Dreiecks AD $= h$ und BD $=$ x, so ist:

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x)$$

und wenn man hierin den § 30 für x gefundenen Ausdruck $\left(\mathrm{x} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$ substituiert:

$$h^2 = \left(c + \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2a}\right)\left(c - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2a}\right)$$

$$h^2 = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}$$

$$h^2 = \frac{(a + c)^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - (a - c)^2}{2a}$$

$$h^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)}{4a^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}}{2a}$$

Multipliziert man diesen für die Höhe gefundenen Ausdruck mit der halben Grundlinie $\left(\frac{a}{2}\right)$, so erhält man die merkwürdige und wichtige Formel für den Flächeninhalt, nämlich:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Um sie für die numerische Rechnung noch etwas bequemer zu formen, setze man die Summe der drei Seiten $= s$, nämlich:

$$a+b+c = s = 2 \cdot \tfrac{1}{2}s, \text{ mithin:}$$
$$a+b-c = 2 \cdot \tfrac{1}{2}s - 2c = 2\left(\tfrac{1}{2}s - c\right)$$
$$a+c-b = 2\left(\tfrac{1}{2}s - b\right)$$
$$b+c-a = 2\left(\tfrac{1}{2}s - a\right).$$

Dies in obige Formel substituiert, kommt:

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}s\left(\tfrac{1}{2}s - a\right)\left(\tfrac{1}{2}s - b\right)\left(\tfrac{1}{2}s - c\right)}.$$

Es sei z. B.:

Gegeben:	so ist:	Logarithmen:
$a = 13$ m	$\frac{1}{2}s = 15$	1,1760913
$b = 10$	$\frac{1}{2}s - a = 2$	0,3010300
$c = 7$	$\frac{1}{2}s - b = 5$	0,6989700
$s = 30$	$\frac{1}{2}s - c = 8$	0,9030900
		3,0791813 : 2
	log F =	1,5395906
	F =	34,641 □m.

35.

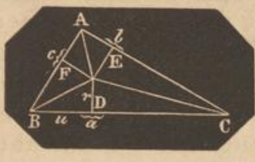
Obgleich die § 30 entwickelte Formel zur Berechnung eines Winkels aus den drei Seiten eines Dreiecks, der sogenannte *Cosinus*-Satz, theoretisch wichtig ist, so ist sie doch für die logarithmische Rechnung, wenn die Seiten durch große Zahlen gegeben sind, sehr unbequem, und wir wollen deshalb, für diesen rein praktischen Zweck, noch eine besondere, für die numerische Rechnung bequemere Formel ableiten.

Denkt man sich die drei Winkel des Dreiecks halbiert, vom gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Halbierungslinien Perpendikel auf die drei Seiten gefällt, und bezeichnet diese gleichen Perpendikel mit r (Geometrie § 76), den als bekannt anzusehenden Flächeninhalt mit F, so hat man:

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = F, \text{ woraus:}$$

$$r = \frac{2F}{a+b+c}.$$

Setzt man noch BD $= u$, so ist (weil BF $=$ BD, AF $=$ AE und CE $=$ CD, also CD $+$ AF $=$ AC $= b$):



$$2u + 2b = a + b + c, \text{ hieraus:}$$

$$u = \frac{a + c - b}{2}.$$

Nun ist $tg\,\frac{1}{2}\mathrm{B} = \frac{r}{u} = \frac{2\mathrm{F}}{a+b+c} \cdot \frac{2}{a+c\mp b}$. Hierin für F seinen Wert aus vorhergehendem Paragraph gesetzt:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \frac{\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)}}{(a+b+c)\,(a+c-b)}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \sqrt{\frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)}{(a+b+c)^2\,(a+c-b)^2}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \sqrt{\frac{(a+b-c)}{(a+b+c)}\,\frac{(b+c-a)}{(a+c-b)}}$$

Oder, wenn man Kürze halber wieder, wie in § 34, $a + b + c = s$ setzt:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - a)\,(\frac{1}{2}s - c)}{\frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s - b)}}.$$

Beispiel. Es sei wieder, wie in § 33:

gegeben:	so ist:	
$a = 13$	$\frac{1}{2}s = 15$	$log\,(\frac{1}{2}s - a) = 0{,}3010300$
$b = 10$	$\frac{1}{2}s - a = 2$	$log\,(\frac{1}{2}s - c) = 0{,}9030900$
$c = 7$	$\frac{1}{2}s - b = 5$	$1{,}2041200$
$s = 30$	$\frac{1}{2}s - c = 8$	$log\,\frac{1}{2}s = 1{,}1760913$
		$log\,(\frac{1}{2}s - b) = 0{,}6989700$
		$1{,}8750613$

$$\begin{array}{l} 1{,}2041200 \\ \underline{1{,}8750613} \\ 0{,}3290587 - 1 = 1{,}3290587 - 2, \text{ mithin:} \end{array}$$

$log\,tg\,\frac{1}{2}\mathrm{B} = 9{,}6645293 - 10$, also $\frac{1}{2}\mathrm{B} = 24^0\,47'\,28'',6$ u. $\mathrm{B} = 49^0\,34'\,57'',2$.

Ebenso findet man die Winkel A und C aus:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - b)\,(\frac{1}{2}s - c)}{\frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s - a)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{C} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - a)\,(\frac{1}{2}s - b)}{\frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s - c)}}.$$

Anmerkung. Mit dem *cos* des halben Winkels wird die Berechnung noch etwas einfacher (s. u. § 63 a).

auf folgende Weise: Man setze erst 0 als Ganze und das Decimalzeichen, hänge darauf dem Zähler eine Null an und dividiere mit dem Nenner, so giebt der Quotient die Anzahl der vollen Zehntel an, welche der Bruch enthält (an dessen Stelle man aber eine Null setzen muſs, wenn der Bruch keine Zehntel enthält), dem Rest hänge man wieder eine Null an, und dividiere abermals durch den Nenner, so erhält man Hundertel, und so fahre man fort bis die Division entweder aufgeht, oder bis man so viele Decimalen bestimmt hat, als es die Genauigkeit der Rechnung verlangt. Mehr als sieben Decimalstellen sind höchst selten erforderlich. Manchmal genügen schon zwei, drei oder fünf. Die letzte Decimale pflegt man um eine Einheit zu vergröſsern, wenn die folgende eine 5 oder darüber ist. Wollte man von dem Bruche 0,8468 nur die drei ersten Decimalstellen beibehalten, so würde 0,847 den wahren Wert genauer darstellen als 0,846, ersterer ist nur um $\frac{2}{10000}$ zu groſs, letzterer aber um $\frac{8}{10000}$ zu klein. Läſst sich der Nenner des in einen Decimalbruch umzuformenden Bruchs in die einfachen Faktoren 2 und 5 auflösen, wie $\frac{3}{8} = \frac{3}{2.2.2}$; $\frac{3}{20} = \frac{3}{2.2.5}$ &c., so muſs die Division, wenn man sie soweit treiben wollte, jedesmal ein Ende nehmen; läſst sich aber der Nenner nicht in die einfachen Faktoren 2 und 5 auflösen, wie $\frac{5}{6} = \frac{5}{2.3}$; $\frac{4}{15} = \frac{4}{3.5}$ &c., so kann die Division auch niemals aufgehen (317). Beispiele:

$$\tfrac{3}{16} = 0{,}1875;\ \tfrac{7}{8} = 0{,}875;\ \tfrac{6}{2117} = 0{,}0028\ldots$$

Man sage nämlich: 16 in 3 Ganze giebt 0 Ganze, 16 in 30 Zehntel giebt 1 Zehntel und 14 als Rest, 16 in 140 Hundertel giebt 8 Hundertel &c.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen, denn ob man z. B. nach (§ 48) Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{16}$ erst mit einer Rangzahl multipliziert, und dann wieder durch den alten Nenner abkürzt und den dadurch entstehenden Bruch nach (§ 51) ohne Nenner schreibt, oder ob man dem Zähler die Nullen nach und nach anhängt, das ist einerlei. Man hat z. B.

$$\tfrac{3}{16} = \frac{3000}{16.1000} = \frac{187\tfrac{8}{16}}{1000} = 0{,}187.$$

Anmerkungen. 1) Ist der umzuformende Bruch unecht, so muſs man natürlich erst die Ganzen herausziehen und diese statt der Null vor das Decimalzeichen setzen, z. B. $\frac{21}{8} = 2{,}625$; $2\frac{3}{4} = 2{,}75$ &c.

2) Wenn man einem Decimalbruch rechts noch beliebig viele Nullen anhängt, so wird dadurch der Wert desselben nicht geändert, indem dies ebenso gleichgültig ist, als wenn man einer ganzen Zahl noch Nullen vorsetzt. So ist z. B. 0,54 = 0,540 = 0,5400 &c. Man kann also, wenn es die Gleichförmigkeit fordert, mehreren Decimalbrüchen durch angehängte Nullen leicht gleich viele Decimalstellen geben, d. h. sie gleichnamig machen.

3) Wenn beim Verwandeln eines gewöhnlichen Bruchs in einen Decimalbruch die Division kein Ende nimmt, so müssen, wenn die Divison weit genug getrieben wird, notwendig einige Decimalstellen immer in derselben

Auflösung. Die Rechnung wird am leichtesten, wenn man erst die beiden andern Winkel A, B, und dann die dritte Seite sucht. Der eben bewiesene Satz (§ 36) giebt uns:

$$tg\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot tg\frac{A+B}{2}.$$

Nach dieser Formel findet man, da $\frac{A+B}{2}=\frac{180^0-C}{2}$ bekannt ist, $\frac{A-B}{2}$ dann aus der halben Summe und halben Differenz, die Winkel A und B selbst. Es ist nämlich:

$$\frac{A+B}{2}=90-\tfrac{1}{2}C=35^0\,23'\,6''; \; a+b=51612{,}06; \; a-b=9389{,}28$$

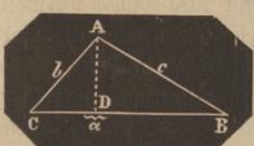
$$\begin{aligned}
log\,tg\frac{A+B}{2}&=9{,}8514229-10 \\
log\,(a-b)&=3{,}9726323 \\
&\,3{,}8240552 \\
log\,(a+b)&=4{,}7127512 \\
log\,tg\frac{A-B}{2}&=9{,}1113040-10
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{A}{2}+\frac{B}{2}&=35^0\,23'\;\,6'' \\
\frac{A}{2}-\frac{B}{2}&=\;\;7^0\,21'\,45'' \\
A&=42^0\,44'\,51'' \\
B&=28^0\;\;1'\,21''.
\end{aligned}$$

Die Seite c findet man jetzt nach dem *Sinus*-Satz:

$$\frac{c}{a}=\frac{sin\,C}{sin\,A} \qquad c=\frac{a\,sin\,C}{sin\,A}$$

$$\begin{aligned}
log\,sin\,C&=9{,}9750658-10 \\
log\,a&=4{,}4843094 \\
&\,4{,}4593752 \\
log\,sin\,A&=9{,}8317217-10 \\
log\,c&=4{,}6276535 \\
c&=42428{,}08.
\end{aligned}$$

38 a.



Will man aus zwei Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel C die übrigen Stücke direkt berechnen, so kann man dies zwar auch, aber die Formeln fallen für die numerische Rechnung sehr unbequem aus, weshalb man sie auch in der Regel nicht anwendet, sondern wie in § 37 verfährt.

1) Zur direkten Bestimmung der Seite c folgt aus dem *Cosinus*-Satz (§ 30), $cos\,C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, folglich

$$2ab\cdot cos\,C=a^2+b^2-c^2,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot cos\,C \text{ und daher}$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\;cos\,C}.$$

Zu berücksichtigen ist, dafs das Glied $2ab\ cos\ C$ für einen stumpfen Winkel C nicht subtrahiert, sondern addiert wird, weil der *cos* eines solchen Winkels negativ ist (s. §§ 30 u. 32). Wäre daher $C = 90^0 + \gamma$, so ist $-2ab \cdot cos\ C = -2ab \cdot cos\ (90^0 + \gamma) = -2ab \cdot (-sin\ \gamma)$ [s. § 32] $= +2ab\ sin\ \gamma$, oder es ist

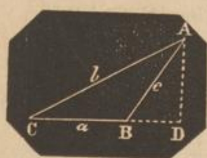
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\ sin\ \gamma}.$$

2) Zur Bestimmung des Winkels B aus 2 Seiten a, b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel C hat man (das Perpendikel AD gefällt), $tg\ B = \frac{AD}{BD}$ oder, da $AD = b\ sin\ C$ und $CD = b\ cos\ C$, also $BD = a - b \cdot cos\ C$

$$tg\ B = \frac{b\ sin\ C}{a - b\ cos\ C}$$

$$\text{oder: } cot\ B = \frac{a - b\ cos\ C}{b\ sin\ C},$$

wobei wieder das Vorzeichen von *cos* C zu beachten ist. Wäre der zu bestimmende Winkel B stumpf, so fällt das Perpendikel AD aufserhalb des Dreiecks. In diesem Falle ist dann $CD > a$, d. i. $b\ cos\ C > a$ und deshalb in obigen Formeln die Gröfse: $a - b\ cos\ C = BD$, in sich negativ. Nimmt man aber, während der Rechnung, BD als positiv, so geben die obigen Formeln die *tang* und *cot* des Nebenwinkels, durch dessen Subtraktion von 180⁰ man den gesuchten stumpfen Winkel B hat. Damit also obige Formeln beide Fälle zugleich umfassen, dringt sich hier wieder die Notwendigkeit auf, auch die Begriffe der *tangente* und *cotangente* zu erweitern und auch auf stumpfe Winkel auszudehnen, so dafs also die *tangenten* und ebenso die *cotangenten* zweier Nebenwinkel an Gröfse vollkommen gleich, aber entgegengesetzt, nämlich von stumpfen Winkeln negativ sind. Es ist z. B. $tg\ 120^0 = -tg\ 60^0$; $cot\ 120^0 = -cot\ 60$. Allgemein, wenn a irgend einen Winkel bedeutet:



$$tg\ (180^0 - a) = -tg\ a \qquad cot\ (180^0 - a) = -tg\ a$$

$$\text{oder } tg\ a = -tg\ (180^0 - a) \qquad cot\ a = -cot\ (180^0 - a).$$

und wenn man $a = 90^0 + b$ setzt (vergl. § 32):

$$tg\ (90^0 + b) = -cot\ b \qquad cot\ (90^0 + b) = -tg\ b.$$

38 b.

Um aus 2 Seiten b und c (s. die beiden Fig. zu § 27) und einem Gegenwinkel C die 3. Seite $BC = a$ unmittelbar zu finden, fälle man das Perpendikel AD, welches entweder innerhalb oder aufserhalb des Dreiecks fällt. In beiden Fällen (s. die beiden Figuren) ist

$$\frac{CD}{b} = \cos C, \qquad \frac{AD}{b} = \sin C,$$

$$\text{folglich } CD = b \cos C, \qquad AD = b \sin C.$$

$$\text{Ferner } BD = \sqrt{c^2 - AD^2} = \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C}.$$

Für die 1. Figur ist nun $a = CD + BD$,
für die 2. Figur $a = CD - BD$.

Beide für a gefundenen Formeln lassen sich mithin schreiben:

$$✽ \quad a = CD \pm BD = b \cos C \pm \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C}.$$

Beide Auflösungen sind möglich, wenn

$$\sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C} < b \cos C,$$

d. i. $c^2 - b^2 \sin^2 C < b^2 \cos^2 C$,

$$c^2 < b^2 \sin^2 C + b^2 \cos^2 C,$$

$$c^2 < b^2 (\sin^2 C + \cos^2 C),$$

$$c^2 < b^2 \cdot 1,$$

also wenn $c < b$.

Nur 1 Auflösung (mit der positiv genommenen Wurzel) ist möglich, wenn

$$\sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C} > b \cos C,$$

also wenn $c > b$.

(Die Ableitung wie auf der linken Seite.)

38 c.

Um den Flächeninhalt aus 2 Seiten a und b und dem von diesen eingeschlossenen Winkel C zu berechnen (s. 1. Fig. des § 38 a), findet man zunächst Höhe $AD = b \sin C$ und dann

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{a \cdot b \sin C}{2}, \text{ oder}$$

der Flächeninhalt ist das halbe Produkt aus 2 Seiten und dem *sinus* des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Aufgabe. Es sei $b = 67$ Meter, $c = 89$ Meter, $\angle A = 123^0\, 45'$. Wie grofs ist der Flächeninhalt?

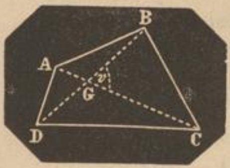
Auflösung. Nach vorstehendem Satze ist der

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{67 \cdot 89 \cdot \sin 123^0\, 45'}{2} = 2981{,}5 \sin (90^0 + 33^0\, 45')$$

$$= 2981{,}5 \cos 33^0\, 45' \text{ (s. § 32)} = 2479{,}027 \, \square\text{m}.$$

Hiermit ist die eigentliche ebene Trigonometrie, welche nur die Regeln verlangte, aus gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreiecks, die dadurch bestimmten, nicht durch Zeichnung, sondern durch Rechnung zu finden, im allgemeinen entwickelt. Es fehlen nur noch 2 in besondern Fällen anwendbare Sätze (§ 63 a, I und II).

39.



Aufgabe. Es sind die beiden Diagonalen eines Vierecks gegeben $AC = d$, $BD = d'$, sowie der Winkel v, den sie miteinander bilden; man soll hieraus den Flächeninhalt des Vierecks bestimmen.

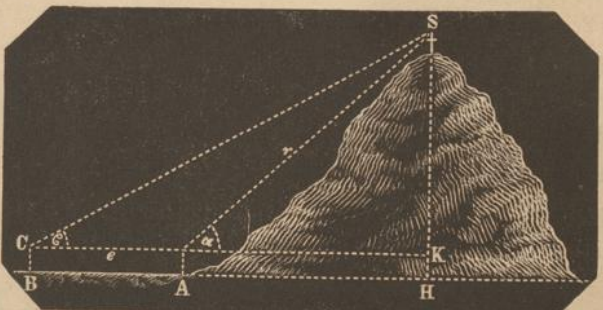
Auflösung. Denkt man von B und D auf $AC = d$ die Perpendikel p und p′ gefällt, so ist erstlich $p = BG \, sin\, v$ und $p' = DG \cdot sin\, v$, mithin $F = \frac{1}{2} d \cdot \overline{BG}\, sin\, v + \frac{1}{2} d \cdot \overline{DG}\, sin\, v$ und hieraus, weil $BG + DG = d'$:

$$F = \tfrac{1}{2} dd' \, sin\, v.$$

40 a.

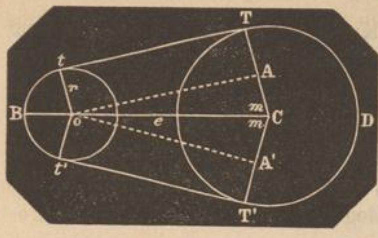
Aufgabe. Die Höhe $SH = h$ eines Turmes (Berges) zu bestimmen.

Auflösung. Man messe zuerst eine horizontale Standlinie $\overline{AB} = e$, und dann mittelst eines Winkelmessers, dessen



Limbus vertikal gestellt werden kann, die beiden Winkel α und β, dann ist der Winkel bei $S = \alpha - \beta$, und man hat zuerst aus $\frac{r}{e} = \frac{sin\, \beta}{sin\, (\alpha - \beta)}$, $r = \frac{e\, sin\, \beta}{sin\, (\alpha - \beta)}$, dann $SK = r\, sin\, \alpha = \frac{e\, sin\, \alpha \cdot sin\, \beta}{sin\, (\alpha - \beta)}$, wozu nun noch die Höhe BC des Instruments addiert werden muſs.

40 b.



Aufgabe. Es sind die Radien zweier Rollen gegeben, $R = 3$ m, $r = 1$ m, sowie der Abstand ihrer Mittelpunkte $CO = e = 6$ m. Man sucht die erforderliche Länge l eines darum zu legenden Riemens.

Auflösung. Weil der Riemen in den Endpunkten der beiden umschlungenen Bögen die Rollen berührt, so sind die Winkel bei T, t rechte. Zieht man $OA \parallel tT$, so ist $CA = R - r$ und man hat zur Bestimmung des unbekannten Winkels m:

$$\cos m = \frac{AC}{CO} = \frac{R-r}{e}, \text{ woraus } m = 70^0\, 31'\, 43'',6$$

$$\text{oder } m = 70^0,52878.$$

Da nun $\angle tOB = m$, $tBt' = 2m$ und

$360^0 : \angle tBt' =$ Umfang des Kreises O : Bog. tBt', d. i.

$360^0 : 2m = 2\pi r :$ Bog. tBt', so ist

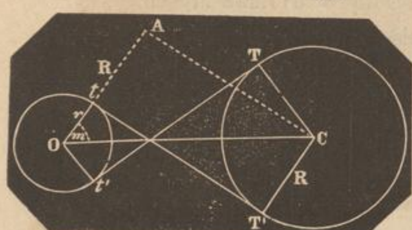
$$\text{Bog. } tBt' = \frac{\pi r m}{90^0}, \text{ der entsprechende Bog. } TT' = \frac{\pi R m}{90^0}, \text{ daher}$$

$$\text{Bog. } TDT' = 2\pi R - \frac{\pi R m}{90}, \text{ ferner}$$

$$Tt = OA = e \sin m, \text{ folglich}$$

$$l = 2e \sin m + \frac{\pi r m}{90} + 2\pi R - \frac{Rm}{90}, \text{ oder}$$

$$l = 2e \sin m + \pi \left[2R - \frac{m}{90}(R - r)\right] = 25{,}24 \text{ Meter.}$$



Findet eine Kreuzung des Riemens statt, so ist offenbar:

$$\cos m = \frac{OA}{OC} = \frac{R+r}{e}$$

$$m = 48^0\, 11'\, 23''$$

$$l = 2e \sin m + \pi \left[2(R + r) - \frac{m}{90}(R + r)\right], \text{ oder}$$

$$l = 2e \sin m + \pi (R + r)\left(2 - \frac{m}{90}\right) = 27{,}35 \text{ Meter.}$$

40c.

Aufgabe. Die Erde, als Kugel betrachtet, sei der Umfang eines gröfsten Kreises (Äquators) = 5400 Meilen, mithin der Radius desselben $r = 859{,}4367$ Meilen (6377390 Meter) und ein Bogen von einem Grade = 15 Meilen (1 Meile = 7420,44 Meter). Wie lang ist hiernach die Sehne c eines Bogens von einem Grade und die mit der Sehne parallele, zwischen den verlängerten Radien enthaltene Tangente T dieses Bogens?

Auflösung. Man findet leicht:

$$c = 2r \sin 30' = 14{,}99981 \text{ Meilen} = 111305{,}2 \text{ Meter},$$
$$T = 2r \operatorname{tg} 30' = 15{,}00038 \text{ Meilen} = 111309{,}2 \text{ Meter}.$$

Es ist mithin die Sehne nur um 1,4 Meter kürzer und die Tangente nur um 2,6 Meter länger, als der Bogen. Dies zeigt, dafs man in vielen Fällen bedeutende Stücke von der Erdoberfläche als eben betrachten kann.

40d.

Aufgabe. Wie grofs ist der Radius r' eines Parallelkreises, dessen geographische Breite $b = 53^0$, und wie grofs ist die Länge s eines Grades dieses Parallelkreises, wenn der Radius des Äquators $r = 859{,}4367$ Meilen, ein Grad des Äquators also = 15 Meilen?

Auflösung. In der Fig. zu § 7 bedeute A den Äquator, B den Pol, $\alpha = 53^0$ geogr. Breite, dann ist QM = CP der Radius r' des Parallelkreises. Da nun

$$CP = CM \cos \alpha, \text{ so ist}$$
$$r' = 859{,}4367 \cdot \cos 53^0 = 517{,}222 \text{ Meilen}.$$

Der Umfang des Parallelkreises (dessen Rad. = QM) ist $= 2\pi r'$, daher ein Grad desselben

$$s = \frac{2\pi r'}{360} = \frac{\pi}{180} \cdot r' = 9{,}027225 \text{ Meilen}.$$