Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1884

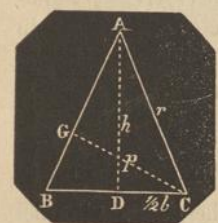
Drittes Buch. Berechnung der gleichschenkligen Dreiecke und regelmäßigen Vielecke

Drittes Buch.

Berechnung der gleichschenkligen Dreiecke und regelmäſsigen Vielecke.

20.

Das gleichschenklige Dreieck zerlegt man fast stets durch die Höhe zur ungleichen Seite in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.



Aufgabe. Es sind die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks und der Winkel an der Spitze gegeben, nämlich: $AB = AC = r = 15079{,}38$ m und $\angle BAC = A = 50^0\ 16'\ 48''$. Man sucht die Grundlinie $BC = b$, die Höhe $AD = h$ und den Flächeninhalt F.

Auflösung. Weil durch das Perpendikel AD das gleichschenklige Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige zerlegt wird, so hat man:

$$\frac{\frac{1}{2}b}{r} = \sin \tfrac{1}{2}A \qquad\qquad \frac{h}{r} = \cos \tfrac{1}{2}A$$

$$b = 2r \sin \tfrac{1}{2}A \qquad\qquad h = r \cos \tfrac{1}{2}A$$

$$\log \sin \tfrac{1}{2}A = 9{,}6282167 - 10 \qquad\qquad \log \cos \tfrac{1}{2}A = 9{,}9567793 - 10$$

$$\log r = 4{,}1783834 \qquad\qquad \log r = \underline{4{,}1783834}$$

$$\log 2 = \underline{0{,}3010300} \qquad\qquad \log h = 4{,}1351627$$

$$\log b = 4{,}1076301 \qquad\qquad h = 13650{,}94.$$

$$b = 12812{,}39$$

Den Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}bh$ könnte man erhalten, indem man die für $\frac{1}{2}b$ und h gefundenen Ausdrücke $r \sin \frac{1}{2}A$ und $r \cos \frac{1}{2}A$ mit einander multipliziert, dies gäbe $F = r^2 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A$. Man erhält aber für den Inhalt F eine bequemere Formel, wenn man $AB = r$ als Grundlinie betrachtet und auf diese das Perpendikel

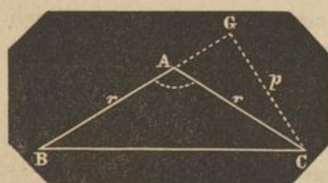
$CG = p$ fällt; dann hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck ACG, $\frac{p}{r} = \sin A$, mithin $p = r \sin A$. Dies mit der halben Grundlinie $(\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}r)$ multipliziert, kommt:

✽ $F = \frac{1}{2} r^2 \sin A$

$$\begin{aligned} \log \sin A &= 9{,}8860260 - 10 \\ 2 \log r &= 8{,}3567668 \\ \log 0{,}5 &= 0{,}6989700 - 1 \\ \hline \log F &= 7{,}9417628 \\ F &= 87450600 \ \square\text{m.} \end{aligned}$$

21.

Bei vorstehender Formel für den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks $(F = \frac{1}{2} r^2 \sin A)$ ist jedoch zu bemerken,



dafs, wenn der Winkel A an der Spitze ein stumpfer ist, das Perpendikel $CG = p$, womit die halbe Grundlinie $(\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}r)$ multipliziert werden mufs, aufserhalb des Dreiecks auf die Verlängerung der Grundlinie fällt. Da aber aus dem gegebenen stumpfen Winkel A leicht sein Nebenwinkel $\angle GAC = 180 - A$ zu berechnen und dann $\frac{p}{r} = \sin (180 - A)$ ist, so hat man: $p = r \sin (180 - A)$. Die vorhergehende Formel für den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks: $F = \frac{1}{2} r^2 \sin A$, könnte also, im Fall der Winkel A stumpf wäre, durch $F = \frac{1}{2} r^2 \sin (180 - A)$ ausgedrückt werden. Allein dieser Fall braucht gar nicht als besonderer betrachtet und durch eine eigene Formel dargestellt zu werden. Der erste Begründer der Trigonometrie bemerkte nämlich bald, dafs erstere Formel $F = \frac{1}{2} r^2 \sin A$ beide Fälle begreift und folglich allgemein ist, der Winkel A möge spitz oder stumpf sein, wenn man nur den Begriff des *sinus*, der anfangs auf spitze Winkel beschränkt wurde, erweitert und auch auf stumpfe Winkel ausdehnt, wobei man dann aber die kleine Regel zu merken hat: dafs der *sinus* eines stumpfen Winkels gleich ist dem *sinus* seines Nebenwinkels, und dafs man — weil in den trigonometrischen Tafeln keine stumpfen Winkel vorkommen — um den *sinus* eines stumpfen Winkels mittelst der Tafeln zu finden, diesen Winkel erst von 180° abziehen und dann zu dem Reste den *sinus* nehmen mufs; so ist z. B.: $sin\,150^0 = sin\,(180 - 150) = sin\,30^0$, $sin\,120^0 = sin\,60^0$. Allgemein, wenn a irgend einen Winkel, spitz oder stumpf, bedeutet:

$$sin\,(180 - a) = sin\,a.$$

Zusatz. Setzt man hier $a = 90^0 - b$, so entsteht

$$sin\,[180 - (90^0 - b)] = sin\,(90^0 - b), \text{ d. i.}$$

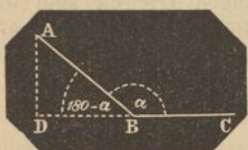
$$sin\,(90^0 + b) = cos\,b.$$

Diese praktische Formel macht die in der vorhergehenden ausgesprochene beschwerliche Subtraktion von 180^0 entbehrlich. Z. B.:

$$sin\,132^0\,43'\,18'',7 = sin\,(90^0 + 42^0\,43'\,18'',7) = cos\,42^0\,43'\,18'',7.$$

22.

Diese Erweiterung des Begriffes *sinus* hebt aber keineswegs die § 2 gegebene Erklärung desselben auf, denn es sei $\angle ABC = a$ ein stumpfer Winkel. Schneidet man von dem einen Schenkel ein beliebiges Stück, BA, ab, fällt von A auf den andern Schenkel (hier also auf die Verlängerung desselben) das Perpendikel AD, so kann man dies Perpendikel AD sowohl dem Winkel a, als auch seinem Nebenwinkel $180^0 - a$ gegenüber liegend betrachten, und es ist dann, nach der gegebenen Erklärung, $sin\,a = sin\,(180 - a) = \frac{AD}{AB}$ *).



23.

Aus vorhergehendem Paragraph folgt, dafs die *sinus* zweier Nebenwinkel vollkommen gleich sind, ferner, dafs der zu einem bestimmten Winkel gehörige *sinus* vollkommen bestimmt ist, der Winkel möge spitz oder stumpf sein. Umgekehrt aber, dafs der zu einem bestimmten *sinus* gehörige Winkel unbestimmt ist, indem zu ihm, aufser dem spitzen Winkel, den man in den Tafeln aufschlägt, auch noch der stumpfe Nebenwinkel gehört.

Ist z. B. $sin\,x = 0{,}567$, so ist $lg\,sin\,x = lg\,0{,}567 = 9{,}7535831 - 10$ und man findet zunächst in den Tafeln $x = 34^0\,32'\,28'',66$. Es ist aber auch $x = 180^0 - 34^0\,32'\,28'',66 = 145^0\,27'\,31'',34$.

*) Hätten wir den Begriff des *sinus*, so wie nun erst hier geschehen, schon zu Anfang des § 2 auf den stumpfen Nebenwinkel ausdehnen wollen, so hätte der Anfänger noch nicht den Zweck und Nutzen davon einsehen, also auch nicht mit klaren Begriffen folgen können.

24 a.

Aufgabe. Es ist von einem gleichschenkligen Dreieck der Winkel an der Spitze $A = 140^0\,16'\,28''$ und die Länge der Schenkel $AB = AC = r = 505{,}67$ m gegeben. Man sucht den Inhalt F?

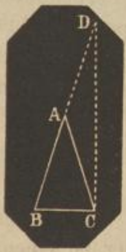
Auflösung. Nach § 21 hat man:

$$
\begin{aligned}
F &= \tfrac{1}{2} r^2 \sin A \\
\log \sin A &= 9{,}8055762 - 10 \\
\log r^2 &= 5{,}4077344 \\
\log 0{,}5 &= \underline{0{,}6989700 - 1} \\
\log F &= 4{,}9122806 \\
F &= 81711 \,\square\text{m}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
& 180^0 \\
A &= \underline{140 \cdot 16 \cdot 28} \\
180 - A &= 39^0\,43'\,32''.
\end{aligned}
$$

24 b.

Aufgabe. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind die Schenkel $AB = AC = r = 304$ m und der Flächeninhalt $F = 7945 \,\square$m gegeben. Wie grofs ist der Winkel A an der Spitze?

Auflösung. Aus der Formel $F = \frac{1}{2} r^2 \sin A$ (§ 24) folgt:

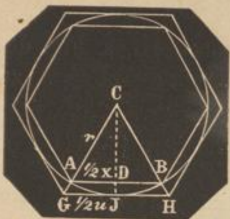


$$
\begin{aligned}
\sin A &= \frac{2F}{r^2} \\
\log F &= 3{,}9000939 \\
\log 2 &= \underline{0{,}3010300} \\
& \quad 4{,}2011239 \\
2 \log r &= \underline{4{,}9657472} \\
\log \sin A &= 9{,}2353767 - 10 \\
\text{also } A &= 9^0\,54'\,2'' \\
\text{oder auch } A &= 170^0\,5'\,58'' \text{ (§ 23).}
\end{aligned}
$$

Dafs die vollständige Auflösung hier zwei Winkel geben mufs, ist leicht einzusehen, weil die beiden Dreiecke CAB und CAD (wenn man AD = AB nimmt), wegen gemeinschaftlicher Spitze C und gleicher Grundlinien, AB = AD, auch gleichen Inhalt haben. Der gesuchte Winkel A kann also sowohl $\angle BAC = 9^0\,54'\,2''$ als auch $\angle CAD = 170^0\,5'\,58''$ sein. Vergleiche Geometrie § 202.

25.

Aufgabe. Es ist der Radius eines Kreises, $AC = r$, gegeben. Man sucht die Seiten $AB = x$, und $GH = u$, der ein- und umgeschriebenen regelmäfsigen nEcke, sowie deren Inhalte f und F.



Auflösung. Es ist der Winkel ACB $=$ $C = \frac{360}{n}$, daher: $\frac{\frac{1}{2}x}{r} = \sin \frac{1}{2}C$ und

$$\frac{GJ}{CJ} = \frac{\frac{1}{2}u}{r} = tg\,\frac{1}{2}C;$$ hieraus:

$$x = 2r \sin \frac{1}{2}C \qquad f = n \cdot \tfrac{1}{2}r^2 \sin C$$
$$u = 2r\ tg\ \frac{1}{2}C \qquad F = n \cdot r^2\ tg\ \frac{1}{2}C$$

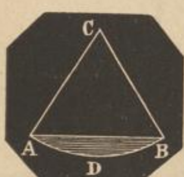
Sei z. B. $r = 1$m, $n = 7$ gegeben, so findet man:

$C = 51^0\,25'\,42\frac{6}{7}''$; $\frac{1}{2}C = 25^0\,42'\,51\frac{3}{7}''$; $n \cdot \frac{1}{2}r^2 = \frac{7}{2} = 3{,}5$; $n \cdot r^2 = 7$.

$$\begin{aligned}
\log \sin \tfrac{1}{2}C &= 9{,}6373733 - 10 \\
\log 2r &= 0{,}3010300 \\
\hline
\log x &= 0{,}9384033 - 1 \\
x &= 0{,}8677674 \\
\log tg\ \tfrac{1}{2}C &= 9{,}6826636 - 10 \\
\log 2r &= 0{,}3010300 \\
\hline
\log u &= 0{,}9836936 - 1 \\
u &= 0{,}96315
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log \sin C &= 9{,}8931131 - 10 \\
\log n \cdot \tfrac{1}{2}r^2 &= 0{,}5440680 \\
\hline
\log f &= 0{,}4371811 \\
f &= 2{,}73641 \\
\log tg\ \tfrac{1}{2}C &= 9{,}6826636 - 10 \\
\log n \cdot r^2 &= 0{,}8450980 \\
\hline
\log F &= 0{,}5277616 \\
F &= 3{,}371021.
\end{aligned}$$

26a.

Aufgabe. Gegeben: $AC = r = 12{,}5$m, $C = 42^0\,13' = 42^0{,}21667$. Man sucht die Fläche des Kreisabschnitts $ADB = F$?



Auflösung. Die Fläche des Ausschnitts ist $= r^2\pi \frac{C}{360}$ und die des Dreiecks $= \frac{1}{2}r^2 \sin C$ (§ 21), mithin die Fläche des Abschnitts:

$F = r^2\pi \frac{C}{360} - \frac{1}{2}r^2 \sin C$, wobei C im ersten Gliede der rechten Seite stets in Graden ausgedrückt sein mufs.

$$\begin{aligned}
\log r^2 &= 2{,}1938200 \\
\log \pi &= 0{,}4971499 \\
\log C &= 1{,}6254840 \\
\hline
&\ 4{,}3164539 \\
\log 360 &= 2{,}5563025 \\
\hline
\log r^2\pi \frac{C}{360} &= 1{,}7601514 \\
r^2\pi \frac{C}{360} &= 57{,}56405
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log \sin C &= 9{,}8273279 - 10 \\
\log r^2 &= 2{,}1938200 \\
\log 0{,}5 &= 0{,}6989700 - 1 \\
\hline
\log \tfrac{1}{2}r^2 \sin C &= 1{,}7201179 \\
\tfrac{1}{2}r^2 \sin C &= 52{,}495
\end{aligned}$$

$$F = 5{,}06905\ \square\text{m}.$$

26 b.

Aufgabe. Den Inhalt eines Kreissegments AJB, s. Fig. des § 25, aus der Sehne AB $= a$ und der Sagitte DJ $= h$ zu berechnen.

Auflösung. Man ziehe die Gerade AJ und setze $\angle JAD = \varphi$, dann ist

$$\text{I.} \quad tg\,\varphi = \frac{DJ}{AD} = h : \frac{a}{2} = \frac{2h}{a}.$$

Da $\angle JAD$ und $\angle BCJ$ auf demselben Bogen BJ stehen, so ist $\angle BCJ$ als Centriwinkel $= 2 \cdot \angle JAD = 2\,\varphi$, daher $\angle ACB = 4\,\varphi$. Ferner $r = AC = \dfrac{AD}{\sin ACD} = \dfrac{a}{\sin 2\varphi}$.

$$\text{Sektor } ACB = \pi r^2 \cdot \frac{\angle ACB}{360^0} = \pi \cdot \frac{a^2}{4 \sin^2 2\varphi} \cdot \frac{4\,\varphi}{360} = \frac{\pi\, a^2\, \varphi}{360 \sin 2\varphi};$$

$\dfrac{CD}{AD} = \cot 2\varphi$, daher $CD = \dfrac{a}{2} \cot 2\varphi$.

$$\triangle ABC = AD \cdot CD = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cot 2\varphi = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cot 2\varphi.$$

$$\text{II.} \quad \text{Segment} = \text{Sektor} - \triangle = \frac{\pi\, a^2\, \varphi}{360 \sin^2 2\varphi} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cot 2\varphi.$$