Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1884

Erstes Buch. Benennung der trigonometrischen Funktionen. Berechnung [...]

urn:nbn:de:bsz:31-273442

Erstes Buch.

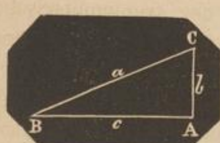
Benennung der trigonometrischen Funktionen. Berechnung derselben. Grenzen, zwischen welchen sie enthalten sind. Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

Benennung der trigonometrischen Funktionen.

1.

Die in der Einleitung erwähnten vier Quotienten: $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}$, welche in einem rechtwinkligen Dreieck, ABC, in bezug auf einen der beiden spitzen Winkel, B, je zwei Seiten durch einander dividiert, geben, sind, wie wir gesehen haben, durch die Größe des Winkels B vollkommen bestimmt, und also Funktionen dieses Winkels (Algebra § 148). Man benennt sie deshalb mit dem gemeinschaftlichen Namen: trigonometrische Funktionen oder goniometrische Funktionen. Da nun aber von diesen vier trigonometrischen Funktionen bald die eine, bald die andere gebraucht wird, so ist es, um Verwechselungen und Weitläufigkeiten im Vortrage zu vermeiden, offenbar notwendig, jede mit einem eigenen Namen zu benennen. Diese Namen sind, wie alle Eigennamen, ursprünglich ganz willkürlich, und der Anfänger muß deshalb in den folgenden etwas seltsam klingenden Namen keinen verborgenen Sinn suchen wollen.

2.



Man nennt nämlich in jedem rechtwinkligen Dreieck, ABC, in bezug auf einen der beiden spitzen Winkel, z. B. $\angle$ B:

1. *sinus* des Winkels B (sprich kurz: *sinus* B): die ihm gegenüber liegende Kathete durch die Hypotenuse dividiert. In Zeichen: $\sin B = \frac{b}{a}$.

2. *cosinus* des Winkels B: die ihm anliegende Kathete durch die Hypotenuse dividiert. In Zeichen: $\cos B = \frac{c}{a}$.

3. *tangente* des Winkels B: die ihm gegenüber liegende Kathete durch die anliegende dividiert. In Zeichen: $tg\, B = \frac{b}{c}$. (Lies: „Tangente B“ oder „*tangens* B“.)

4. *cotangente* des Winkels B: die ihm anliegende Kathete durch die gegenüber liegende dividiert. In Zeichen: $\cot B = \frac{c}{b}$. (Lies: „Cotangente B“ oder „*cotangens* B“.)

Diese vier Kunstwörter und ihre Bedeutung mufs der Anfänger sich wohl merken, so wie auch, dafs die trigonometrischen Funktionen (*sinus*, *cosinus*, *tangente* und *cotangente*) abstrakte Zahlen, nicht aber Linien sind, und also das Wort *tangente* hier eine ganz andere Bedeutung hat, als in der Geometrie, wo es eine berührende Linie bedeutet, wiewohl letztere zu jenem trigonometrischen Begriffe Veranlassung gab (s. Fig. zum 7. Paragraph: $tg\, a = \frac{AT}{AC}$).

Die Lehre von den trigonometrischen Funktionen und ihren gegenseitigen Beziehungen nennt man Goniometrie. Trigonometrie ist die Anwendung derselben auf Berechnung der Dreiecke und ihrer Teile.

Anmerkung. Die Ausdrücke *cos* und *cot* entstanden in folgender Weise. Es ist $\sin C = \frac{c}{a}$, d. i. der *sin.* des Komplementwinkels von $B = \frac{c}{a}$, oder: *complementi sinus* $B = \frac{c}{a}$, abgekürzt: *co. sin.* $B = \frac{c}{a}$ und endlich *cosin* $B = \frac{c}{a}$.

Berechnung der trigonometrischen Funktionen.

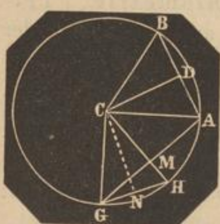
3.

Mit der ursprünglichen Berechnung der trigonometrischen Funktionen verhält es sich, gleichnisweise, wie mit der ursprünglichen Berechnung der Logarithmen. Als man diese sehr mühsame Arbeit unternahm, waren die kurzen und leichten Methoden, welche die seitdem erfundene höhere Mathematik jetzt darbietet, noch nicht bekannt, und wir müssen uns deshalb auch, weil wir die höhere Mathematik hier nicht als bekannt voraussetzen dürfen, damit begnügen, an ein paar Beispielen die Möglichkeit der Berechnung nach dem ältern mühsamen Verfahren zu erklären. Die ersten Berechner der trigonometrischen Tabellen haben der Wissenschaft einen unschätzbaren Dienst geleistet, und wir können auch hier wieder von ihnen sagen, daſs sie über diese sehr mühsame Arbeit ihr Leben verkürzt haben, um das unsrige zu verlängern.

Die Möglichkeit, die trigonometrischen Funktionen zu berechnen, erkannte der erste Erfinder darin: daſs man die Seiten aller regelmäſsigen Vielecke, welche man konstruieren kann, auch bloſs durch Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes, der sich hier in seiner gröſsten Wichtigkeit zeigt, zu berechnen imstande ist.

4.

In der Elementar-Geometrie ist nämlich § 194 gezeigt, daſs man aus dem *radius* eines Kreises die Seiten AG, GH, AB... aller regelmäſsigen Vielecke von 4, 8, 16, 32, 64,...; 3, 6, 12, 24,....; 5, 10, 20,....; 15, 30, 60,...... Seiten berechnen kann. Da nun die, diesen Seiten am Mittelpunkt gegenüber liegenden Winkel beziehlich 90°, 45°, 22° 30′....; 120°, 60°, 30°, 15°..; 72°, 36°, 18°....; 24°, 12°, 6°... sind, und die Hälfte jeder berechneten Vielecksseite, wie z. B. BD, durch den



radius CB dividiert, nämlich: $\frac{BD}{CB}$, den *sinus* des entsprechenden halben Winkels am Mittelpunkt giebt, $\left(\frac{BD}{CB} = \mathit{sin}\, BCD\right)$, dann aus dem *radius* CB und der halben Vielecksseite BD auch leicht das darauf gefällte Perpendikel CD, mithin auch der *cosinus*, dann die *tangente* und *cotangente* vom Winkel BCD, nämlich: $\frac{CD}{CB}, \frac{BD}{CD}, \frac{CD}{BD}$ zu finden sind, so hat man zuerst die trigonometrischen Funktionen von folgenden Winkeln:

45°	30°	36°	12°
22° 30′	15°	18°	6°
11° 15′	7° 30′	9°	3°
5° 37′ 30″	3° 45′	4° 30′	1° 30′
2° 48′ 45″	1° 52′ 30″	2° 15′	0° 45′
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Wäre z. B. AB die Seite des regelmäſsigen Sechsecks, folglich $AB = CB$, so ist, wenn man der leichtern Rechnung halber den *radius* $CB = 1$ setzt*), $BD = \frac{1}{2}$, $\angle BCA = 60^0$, $\angle BCD = 30^0$, daher $sin\ BCD = \frac{BD}{CB} = \frac{\frac{1}{2}}{1}$, oder $sin\ 30^0 = \frac{1}{2}$. Ferner $CD = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also: $cos\ 30^0 = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; dann $tg\ 30^0 = \frac{BD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und $cot\ 30^0 = \frac{CD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. Die vier trigonometrischen Funktionen des Winkels von 30^0 sind also:

$$sin\ 30^0 = \tfrac{1}{2} = 0{,}5 \qquad tg\ 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}5773502$$

$$cos\ 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660254 \qquad cot\ 30^0 = \sqrt{3} = 1{,}7320508$$

Aus demselben $\triangle$ BCD ergeben sich auch die trigonometrischen Funktionen des Winkels von 60^0, denn so groſs ist $\angle CBD$. Es ist nämlich

$$sin\ CBD = sin\ 60^0 = \frac{CD}{BC} = \frac{CD}{1} = CD = \tfrac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$cos\ CBD = cos\ 60^0 = \frac{BD}{BC} = BD = \tfrac{1}{2};$$

$$tg\ CBD = tg\ 60^0 = \frac{CD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3};$$

$$cot\ CBD = cot\ 60^0 = \frac{BD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ist AG die Seite des regelmäſsigen Vierecks, so hat man (CA wieder $= 1$ gesetzt): $AG = \sqrt{2}$, also, weil $\angle ACM = \angle CAM = 45^0$; $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $CM = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, daher:

$$sin\ 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \qquad tg\ 45^0 = 1$$

$$cos\ 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \qquad cot\ 45^0 = 1.$$

Eben so könnte man für die übrigen angeführten unzähligen Winkel die entsprechenden trigonometrischen Funktionen be-

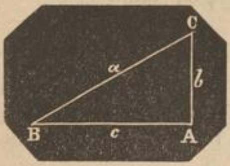
---

*) Nähme man den *radius* CB, r mal, z. B. 10mal, so groſs, so würden auch die Linien BD, CD eben so viel mal so groſs, wobei aber die Quotienten $\frac{BD}{CB}$, $\frac{CD}{CB}$ etc., dieselben bleiben, als wenn man, der leichtern Rechnung halber, $CB = 1$ setzt, wo dann die halben Vielecksseiten BD, AM schon die *sinus*, und die darauf gefällten Perpendikel CD, CM, die *cosinus* der entsprechenden Winkel BCD, ACM selbst sind, denn es ist $sin\ BCD = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{1} = BD$.

rechnen. Man sieht aber leicht, daſs dennoch eine sehr groſse Lücke bleibt.

5.

Aus der Erklärung der trigonometrischen Funktionen folgt aber, und konnte auch vom ersten Erfinder nicht unbemerkt bleiben, daſs in einem rechtwinkligen Dreieck, ABC, irgend eine trigonometrische Funktion des einen spitzen Winkels, B, zugleich auch die sinnverwandte trigonometrische Funktion des andern spitzen Winkels, C, ist. Der Quotient $\frac{b}{a}$ z. B. ist der *sinus* vom Winkel B (nämlich die gegenüber liegende Kathete durch die Hypotenuse dividiert, § 2), derselbe Quotient $\frac{b}{a}$ ist aber in Beziehung auf den andern spitzen Winkel C der *cosinus* vom Winkel C (nämlich die anliegende Kathete durch die Hypotenuse dividiert). In Zeichen:



$$\sin B = \frac{b}{a} = \cos C \qquad tg\, B = \frac{b}{c} = \cot C$$

$$\cos B = \frac{c}{a} = \sin C \qquad \cot B = \frac{c}{b} = tg\, C.$$

Wäre z. B. $B = 30^0$, mithin $C = 90 - 30 = 60^0$, so haben wir bereits gefunden (§ 4), daſs:

$$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^0 \qquad tg\, 60^0 = \sqrt{3} = \cot 30^0$$

$$\cos 60^0 = \tfrac{1}{2} = \sin 30^0 \qquad \cot 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = tg\, 30^0.$$

Wäre $C = 80^0$, mithin $B = 10^0$, so wäre:

$$\sin 80^0 = \cos (90^0 - 80^0) = \cos 10^0 \text{ und}$$
$$\cos 80^0 = \sin (90^0 - 80^0) = \sin 10^0.$$

Allgemein, wenn a einen beliebigen spitzen Winkel bedeutet:

$$\sin (90 - a) = \cos a \qquad tg\, (90 - a) = \cot a$$
$$\cos (90 - a) = \sin a \qquad \cot (90 - a) = tg\, a.$$

Setzt man in den vorstehenden Formeln $a = 45^0 + b$, so erhält man

$$\sin [90^0 - (45^0 + b)] = \cos (45^0 + b) \text{ u. s. w.}$$

oder

$$\sin (45^0 - b) = \cos (45^0 + b) \qquad tg\, (45^0 - b) = \cot (45^0 + b)$$
$$\cos (45^0 - b) = \sin (45^0 + b) \qquad \cot (45^0 - b) = tg\, (45^0 + b).$$

Anmerkung. Man nennt

sin	die	Kofunktion	(sinnverwandte	Funktion)	von	*cos*,
cos	"	"	"	"	"	*sin*,
tg	"	"	"	"	"	*cot*,
cot	"	"	"	"	"	*tg*.

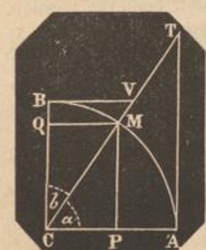
6.

Durch vorhergehenden wichtigen Satz ist also — was die Berechnung der trigonometrischen Funktionen für alle Winkel von 0 bis 90° betrifft — die Arbeit offenbar auf die Hälfte reduziert, weil man die trigonometrischen Funktionen für alle Winkel von 45 bis 90° erhält, indem man nur die sinnverwandten Funktionen derjenigen Winkel wieder abschreibt, welche erstere zu 90° ergänzen. So ist z. B.:

$$sin\ 46^0 = cos\ (90^0 - 46^0) = cos\ 44^0,$$
$$cos\ 46^0 = sin\ (90^0 - 46^0) = sin\ 44^0,$$
$$sin\ 47^0 = cos\ (90^0 - 47^0) = cos\ 43^0,$$
$$cos\ 47^0 = sin\ (90^0 - 47^0) = sin\ 43^0,$$
$$cot\ 83^0\ 39' = tg\ (90^0 - 83^0\ 39') = tg\ 6^0\ 21'.$$

Es brauchten also die trigonometrischen Funktionen nur für alle Winkel von 0 bis 45° berechnet zu werden. Dies geschah zuerst mit Zwischenräumen, welche dann durch Einschalten der Proportionalteile und durch Hilfe der §§ 45 und 47 ausgefüllt wurden, nach welchen man, aus bereits bekannten trigon. Funktionen beliebiger Winkel, sehr leicht die trigon. Funktionen für die Summen und Differenzen dieser Winkel finden und dadurch die gelassenen Zwischenräume der Tafel ausfüllen konnte. (Der wißbegierige Anfänger, der die Möglichkeit hiervon einsehen will, kann schon jetzt die, des Raumes halber hier nicht mit aufgenommenen, zitierten Sätze §§ 45 und 47 nachlesen.)

7.



Durch Hilfe des Kreises lassen sich die erklärten vier trigonometrischen Funktionen, so wie auch der vorhergehende Satz § 5 auf folgende Weise versinnlichen.

So wie man nämlich die Zahlenbegriffe: e i n s, z w e i etc. durch die Zeichen 1, 2, 3 ⋯ darstellen kann, so kann man sie auch durch Linien darstellen. Läſst man die Linie CA die Zahl **eins** bedeuten, so stellt offenbar eine zweimal so lange Linie die Zahl **zwei**, eine halb so lange Linie den Bruch $\frac{1}{2}$ dar etc.

Beschreibt man nun zwischen den Schenkeln eines Winkels, a, mit der Linear-Einheit (Radius) $CA = 1$ einen Bogen AM und fällt von dem Endpunkte M auf CA das Perpendikel MP, so stellt schon MP ($=$ CQ) den *sinus*, und CP ($=$ QM) den *cosinus* des Winkels a dar, weil hier die Division durch die Hypotenuse, da sie die Einheit ist ($CM = CA = 1$), wegfällt, indem $\frac{MP}{CM} = \frac{MP}{1} = MP$ etc.

Um die *tangente* des Winkels a durch eine einzige Linie zu versinnlichen, ziehe man durch A eine Berührungslinie, welche den verlängerten Schenkel CM in T schneidet, so stellt, weil $CA = 1$ ist, die Linie AT die *tangente* des Winkels a dar: denn im $\triangle$ ACT ist AT die dem $\angle a$ gegenüber liegende, AC die ihm anliegende Kathete.

Um endlich auch die *cotangente* des Winkels a durch eine einzige Linie darzustellen, sei der Bogen AM bis zu einem Viertelkreise (Quadranten) fortgeführt, mithin der *radius* BC senkrecht auf AC, so dafs also der Winkel b den Winkel a zu 90^0 ergänzt. Zieht man nun in B eine Berührungslinie BV an den Kreis, so ist $\angle BVC = \angle ACV$, weil BV parallel CA, und folglich ist $\angle BVC = a$. Die Berührende BV stellt nun die **Cotangente** des Winkels a dar, denn im $\triangle$ BCV ist BV die dem $\angle a$ ($= \angle V$) anliegende Kathete, CB die demselben Winkel gegenüber liegende Kathete und folglich ist $cot\ a = \frac{BV}{BC} = \frac{BV}{1} = BV$.

Diese Darstellung erscheint zwar weniger einfach als die in § 4, dient aber oft zur schnelleren Entwickelung gewisser Formen und Beziehungen *).

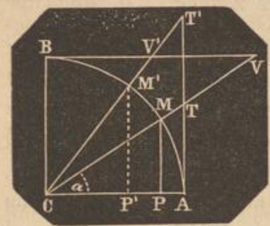
---

*) Zur historischen Notiz dienend, möge hier noch bemerkt werden, dafs in der alten Kunstsprache: die Linie AP, als Zahl gedacht (für $CA = 1$), der *sinus versus* des Winkels a, und wenn von M auf BC das Perpendikel MQ gefällt wird, die Linie BQ der *cosinus versus*, ferner die Linie CT die *secante*, und CV die *cosecante* des Winkels a genannt wird, so dafs also: $sin\ vers\ a = 1 - cos\ a$; $cos\ vers\ a = 1 - sin\ a$; $sec\ a = \frac{1}{cos\ a}$; $cosec\ a = \frac{1}{sin\ a}$ (wie aus $CP : CM = AC : CT$, d. i. $cos\ a : 1 = 1 : sec\ a$ und aus $QC : CM = BC : CV$, d. i. $sin\ a : 1 = 1 : cosec\ a$ folgt).

Grenzen der trigonometrischen Funktionen.

8.

Aus der eben gezeigten bildlichen Darstellung der trigonometrischen Funktionen oder auch aus dem rechtwinkligen Dreieck ist nun leicht zu ersehen, daſs mit dem Wachsen eines Winkels auch dessen *sinus* und *tangente* wachsen, *cosinus* und *cotangente* aber abnehmen. Denn es sei CA = 1 der festliegende Schenkel des Winkels MCA = a, und dessen beweglicher Schenkel MC = 1 in die Lage M'C gekommen, so ist der Winkel MCA gröſser, nämlich M'CP geworden, zugleich ist aber auch die ihm gegenüber liegende Kathete (sein *sinus*) MP gröſser, nämlich M'P' geworden. Fällt der bewegliche Schenkel MC mit BC (senkrecht auf CA) zusammen, so wird MP auch = MC = 1, oder was dasselbe ist: in dem Bruche $\frac{MP}{CM} = \sin a$, wird für $a = 90^0$ der Zähler dem Nenner gleich, mithin $\sin 90^0 = 1$. Wird dagegen der Winkel a immer kleiner, so wird auch sein *sinus*, MP, immer kleiner, und verschwindet mit dem Winkel, oder, was dasselbe sagt, in dem Bruche $\frac{MP}{CM} = \sin a$, wird für $a = 0^0$, der Zähler MP = 0, folglich $\sin 0^0 = \frac{0}{CM} = 0$. Die *sinus* sind also immer echte Brüche (höchstens = 1).



Der *cosinus* eines Winkels MCP = a, nämlich CP, wird mit dem Wachsen des Winkels immer kleiner und für $a = 90^0$, wo P in C fällt, offenbar = 0, folglich $\cos 90^0 = 0$. Dies folgt auch aus dem rechtwinkligen Dreieck MCP, indem der Zähler des Bruches $\frac{CP}{CM} = \cos a$, für $a = 90^0$, Null wird, daher $\cos 90^0 = \frac{0}{CM} = 0$. Mit dem Abnehmen des Winkels a dagegen wird sein *cosinus*, nämlich CP, immer gröſser und zuletzt gleich CA = 1, oder, was dasselbe ist: die anliegende Kathete wird, für $a = 0^0$, der Hypotenuse gleich, daher im Bruche $\frac{CP}{CM} = \cos a$, für

$a = 0^0$, der Zähler dem Nenner gleich, mithin *cos* $0^0 = 1$. Die *cosinus* sind also auch immer echte Brüche (höchstens $= 1$).

Mit dem Abnehmen des Winkels a wird (für $CA = 1$) die *tangente* AT offenbar immer kleiner und verschwindet mit dem Winkel, indem dann T auf A fällt, oder in dem Bruche $\frac{MP}{CP} = tg\ a$, wird, für $a = 0^0$, auch der Zähler $= 0$, und der Nenner gleich CA, $= 1$, daher $tg\ 0^0 = \frac{0}{1} = 0$. Wächst dagegen der Winkel a, so wächst auch seine *tangente*, und mufs zuletzt jede noch so grofse Zahl überschreiten. Ist der Winkel a schon beinahe 90^0 geworden, so geht die Linie CT fast parallel mit AT, der Durchschnittspunkt T rückt, mit dem Wachsen des Winkels a, immer weiter von A, es ist also, wenn a sehr nahe $= 90^0$ ist, auch CA in AT (oder CP in MP) sehr viele mal (hundert, tausend, millionen ······ mal) enthalten. Wird aber $a = 90^0$, so hat (für $CA = 1$) die *tangente* AT alle bestimmten Zahlen überschritten, und ist also unendlich grofs (∞) geworden, daher $tg\ 90^0 = \infty$. Dasselbe folgt auch: weil in dem Quotienten $\frac{MP}{CP} = tg\ a$, für $a = 90^0$, die gegenüber liegende Kathete $MP = BC$, und die anliegende Kathete $CP = 0$ wird; daher: $tg\ 90^0 = \frac{BC}{0} = \infty$.*)

Mit dem Wachsen des Winkels $MCP = a$ wird offenbar die *cotangente* BV immer kleiner, und verschwindet für $a = 90^0$, wo V auf B fällt, daher $cot\ 90^0 = 0$. Dasselbe folgt aus dem Bruche $\frac{CP}{MP} = cot\ a$, in welchem, für $a = 90^0$, der Zähler (die anliegende Kathete) $CP = 0$, und der Nenner $MP = CM = CB$ wird; daher $cot\ 90^0 = \frac{0}{BC} = 0$. Nimmt dagegen der Winkel a

*) Dividiert man eine Zahl, z. B. die Einheit, durch immer kleinere Zahlen, so wird der Quotient immer gröfser, z. B. $\frac{1}{0,1} = 10$; $\frac{1}{0,01} = 100$; $\frac{1}{0,001} = 1000$ etc., $\frac{1}{0} = \infty$. Eben so verhält es sich mit dem Ausdruck $\frac{MP}{CP} = tg\ a$. Wächst a von 0 bis 90^0, so wird der Zähler MP immer gröfser, der Nenner CP immer kleiner, und zuletzt, für $a = 90^0$, wird $\frac{MP}{CP} = \frac{BC}{0} = \infty$.

immer fort bis 0 ab, so wird die *cotangente* dabei immer gröſser und gröſser, und es giebt keine so groſse Zahl, welche sie nicht überschreiten könnte, daher $cot\ 0 = \infty$. Wir haben demnach folgende wohl zu merkende Formeln:*)

$$\begin{array}{ll} \sin 0 = 0 & \sin 90 = 1 \\ \cos 0 = 1 & \cos 90 = 0 \\ tg\ 0 = 0 & tg\ 90 = \infty \\ \cot 0 = \infty & \cot 90 = 0. \end{array}$$

Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

9.

In der Einleitung ist gezeigt, daſs wir vermittelst der trigonometrischen Funktionen aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten Stücke leicht berechnen können, und zwar durch eine einfache Multiplikation oder Division. Da man diese Operationen aber immer am bequemsten mit Logarithmen vollzieht, und es also sehr umständlich sein würde, zu gegebenen Winkeln erst die trigonometrischen Funktionen und dann zu diesen Funktionen wieder die Logarithmen zu suchen, so sind offenbar viel zweckmäſsiger die trigonometrischen Funktionen nicht selbst, sondern sogleich ihre Logarithmen eingetragen.

Da nach den §§ 5—8 alle Sinusse, Cosinusse und Tangenten von 0^0 bis 45^0 kleiner als 1 (also echte Brüche), so sind ihre Logarithmen negativ. Dagegen ist $cot\ 45^0 = 1$, $cot\ 0^0 = \infty$, folglich liegen alle Cotangenten von 0^0 bis 45^0 zwischen ∞ und 1 und ihre Logarithmen sind positiv. Es ist daher

$$\begin{aligned} \sin 30^0 &= \tfrac{1}{2} = 0{,}5 \quad (\text{s. § } 8), \\ \sin 5^0 &= 0{,}0871557 \\ \sin 0^0\,30' &= 0{,}0087265, \text{ und folglich} \\ lg \sin 30^0 &= 0{,}6989700 - 1 \\ lg \sin 5^0 &= 0{,}9402960 - 2 \\ lg \sin 0^0\,30' &= 0{,}9408419 - 3. \end{aligned}$$

Um nun in den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln Raum zu sparen, benutzt man die negativen Logarithmen nicht mit veränderlichen negativen Kennziffern, sondern setzt die negative

*) Wir werden sämtliche Formeln, so wie wir sie nach und nach entwickeln, in § 100 übersichtlich zum Nachschlagen zusammenstellen.

Kennziffer unveränderlich — 10, und weil $0 - 1 = 9 - 10$, $0 - 2 = 8 - 10$, $0 - 3 = 7 - 10$, so ist alsdann

$$lg\ sin\ 30^0 = 9{,}6989700 - 10,$$
$$lg\ sin\ \ 5^0 = 8{,}9402960 - 10,$$
$$lg\ sin\ 0^0\,30' = 7{,}9408419 - 10.$$

In den Tafeln kann nun die negative Kennziffer — 10 weggelassen werden, nur hat man sich zu merken, bei welchen Logarithmen diese weggelassene — 10 hinzuzudenken ist. Wie schon vorher gezeigt wurde, ist dies bei *sin*, *cos* und *tg* von 0^0 bis 45^0 der Fall, während *lg cot* 0^0 bis 45^0 positiv, also — 10 nicht zu ergänzen ist (z. B. *cot* $40^0 = 1{,}1917536$, folglich *lg cot* $40^0 = 0{,}0761865$ ohne — 10).

Die Bruhnsschen Tafeln, auf welche wir uns hier allein beziehen, zeigen 4 Kolumnen, deren Überschriften *sin*, *cos*, *tg*, *cot* für den Winkel von 0^0 bis 45^0 gelten. Folglich hat man sich in den 3 ersten Kolumnen — 10 hinzuzudenken, in der 4. Kolumne jedoch nicht, vielmehr enthält die 4. Kolumne (die letzte rechts) den Logarithmus stets vollständig. So findet man z. B.

S. 429, 1. Zeile oben:	$lg\ sin\ 15^0\,10'\ 0'' = 9{,}4176837 - 10$
„ 546, 1. „ „ :	$lg\ cos\ 34^0\,40'\ 0'' = 9{,}9151228 - 10$
„ 385, 1. „ „ :	$lg\ tg\ 7^0\,50'\ 0'' = 9{,}1385417 - 10$
„ 520, 1. „ „ :	$lg\ cot\ 30^0\,20'\ 0'' = 0{,}2327450$
„ 493, in der Mitte:	$lg\ cos\ 25^0\,54'\,50'' = 9{,}9539779 - 10.$

10.

Für die in den Bruhnsschen Tafeln oben angegebenen Funktionen gelten die darüber (am Kopfe der Seite) stehenden Grade und die in der 1. Kolumne links befindlichen Minuten und Sekunden (s. die letzten Beispiele in § 9). Für die unten angegebenen Funktionen gelten die darunter (am Fuſse der Seite) stehenden Grade und die in der letzten Kolumne rechts befindlichen, von unten nach oben zu zählenden Minuten und Sekunden. Z. B.

S. 493, letzte Zeile:	$lg\ tg\ 64^0\ 0'\ 0'' = 0{,}3118182;$
„ 493, vorletzte Zeile:	$lg\ cot\ 64^0\ 0'\,10'' = 9{,}6881283 - 10;$
„ 493, 6. Zeile v. u.:	$lg\ cos\ 64^0\ 0'\,50'' = 9{,}9537155 - 10;$
„ 394, in der Mitte:	$lg\ sin\ 80^0\,34'\,50'' = 9{,}2139446 - 10.$

Seite 374—607 (6^0 bis 45^0 und 45^0 bis 84^0) sind die Logarithmen der Funktionen von 10 zu 10 Sekunden angegeben (s. die

9 letzten Beispiele). Der vorausgehende Teil, S. 188 bis 372, gilt für 0^0 bis 6^0 und 84^0 bis 90^0 und enthält die Logarithmen der Funktionen für jede einzelne Sekunde, jedoch sind hier die Kennziffer und die 3 (resp. 2) ersten Decimalen der Logarithmen nur nach je 10 Sekunden mit gröfseren Zahlen angegeben. Z. B.

S. 269, linke Hälfte, oben: $lg\ tg\ 2^0\,32'\,0'' = 8{,}6458528 - 10$
$lg\ tg\ 2^0\,32'\,1'' = 8{,}6459005 - 10$
$lg\ tg\ 2^0\,32'\,14'' = 8{,}6465199 - 10$

„ 269, rechte Hälfte, unten: $lg\ cos\ 87^0\,26'\,6'' = 8{,}6508197 - 10$

„ 207, linke Hälfte, unten: $lg\ tg\ 89^0\,31'\,5'' = 2{,}0751154$

„ 227, rechte Hälfte, Mitte: $lg\ sin\ 1^0\,9'\,29'' = 8{,}3055772 - 10.$

Ist in diesem ersten Teile der trigon. Tafel die viert- (resp. fünft-) letzte Stelle des Logarithmus mit einem * oder Strich versehen, so sind die weiter unten folgenden gröfser gedruckten Ziffern vorzusetzen. Z. B.

S. 247, rechte Hälfte: $lg\ cot\ 1^0\,49'\,27'' = 1{,}4969113.$

„ 213, linke Hälfte: $lg\ sin\ 0^0\,40'\,24'' = 8{,}0700975 - 10.$

11.

Die mit *d.* oder *d. c. (differentia communis)* überschriebenen Kolumnen enthalten die Differenz von je 2 auf einander folgenden Logarithmen. Nur im 1. Teile sind dieselben bei den Cosinussen von 0^0 bis 6^0 weggelassen, da sie hier sehr leicht gebildet werden können.

Die Logarithmen der *tg* und *cot* haben gleiche Differenzen (*d. c.*), denn ist (s. § 2)

$$tg\ B = \frac{b}{c},\ \text{so ist}\ cot\ B = \frac{c}{b},\ \text{folglich}$$

$$tg\ B\ .\ cot\ B = \frac{b}{c}\ .\ \frac{c}{b} = 1,\ \text{mithin}$$

$$lg\ tg\ B + lg\ cot\ B = lg\ 1 = 0\ \text{und folglich}$$

$$lg\ cot\ B = -\,lg\ tg\ B.$$

Sind nun B und B′ 2 in den Tafeln unmittelbar auf einander folgende Winkel, so ist (da auch

$$lg\ cot\ B' = -\,lg\ tg\ B'\ \text{sein mufs}):$$

$$lg\ cot\ B - lg\ cot\ B' = -\,lg\ tg\ B - (-\,lg\ tg\ B'),\ \text{d. i.}$$

$$lg\ cot\ B - lg\ cot\ B' = lg\ tg\ B' - lg\ tg\ B,\ \text{also gleiche Diff.}$$

Aus vorstehenden Gleichungen folgt zugleich, dafs $lg\ tg\ a = (10{,}0000000 - 10) - lg\ cot\ a$ und $lg\ cot\ a = (10{,}00\ldots - 10) - lg\ tg\ a.$

Dafs ferner jeder Logarithmus für 2 sinnverwandte Funktionen und für 2 sich zu 90^0 ergänzende Winkel gilt, folgt aus § 5. So ist z. B. (s. S. 433, 1. Zeile oben):

$$lg\ cos\ 15^0\ 50'\ 0'' = 9{,}9832019 - 10,$$
$$lg\ sin\ 74^0\ 10'\ 0'' = lg\ sin\ (90^0 - 15^0\ 50'\ 0'') = 9{,}9832019 - 10.$$

12.

I. Um die Logarithmen der Funktionen von Winkeln zu bestimmen, die nicht unmittelbar in den Bruhnsschen Tafeln enthalten sind, hat man zunächst zu berücksichtigen, dafs die in den Tafeln angegebene Differenz im 2. Teile (S. 374 bis 607) für 10 Sekunden, im 1. Teile (S. 188 bis 372) jedoch für 1 Sekunde gilt und dafs für zunehmende Winkel die Logarithmen der Sinusse und Tangenten zu-, die Logarithmen der Cosinusse und Cotangenten dagegen abnehmen, denn je gröfser der Winkel, desto gröfser Sinus und Tangente und desto kleiner Cosinus und Cotangente.

Es sei z. B. $lg\ sin\ 32^0\ 10'\ 6'',45$ zu bestimmen. S. 531 findet man in der 1. Zeile oben

$$lg\ sin\ 32^0\ 10'\ 0'' = 9{,}7262249.$$

Daneben steht 335 als Zuwachs für 10 Sekunden, daraus folgt für 1 Sekunde 33,5 und für die gegebenen 6,45 Sekunden: $33{,}5 \,.\, 6{,}45 = 216$. Daher

$$\begin{array}{r} 9{,}7262249 \\ +\ 216 \\ \hline \end{array}$$

sin $lg\ \underline{tg}\ 32^0\ 10'\ 6'',45 = 9{,}7262465 - 10.$

2. Beispiel. $lg\ tg\ 87^0\ 27'\ 33'',76$?

Seite 269, Mitte der linken Hälfte findet man:

$$lg\ tg\ 87^0\ 27'\ 33'' = 1{,}3528616.$$

Der Zuwachs beträgt, wie daneben angegeben ist, für 1 Sek. 476, folglich für 0,76 Sek.: $476 \,.\, 0{,}76 = 362$. Daher

$$\begin{array}{r} 1{,}3528616 \\ +\ 362 \\ \hline \end{array}$$

$$lg\ tg\ 87^0\ 27'\ 33'',76 = 1{,}3528978.$$

II. Für *cos* und *cot* weicht die Berechnung von der vorstehenden nur insofern ab, als der aus der Differenz berechnete Betrag nicht addiert, sondern subtrahiert wird.

1. Beispiel. $lg\ cot\ 60^0\ 25'\ 46'',09$?

S. 515, etwas oberhalb der Mitte findet man:

$$lg\ cot\ 60^0\, 25'\, 40'' = 9{,}7539184,$$

und als Abnahme für 10 Sek. 491, daher für 1 Sek. 49,1 und für die gegebenen 6,09 Sek.: 49,1 . 6,09 = 299. Folglich

$$\begin{array}{r} 9{,}7539184 \\ -\ 299 \\ \hline \end{array}$$

$$lg\ cot\ 60^0\, 25'\, 46'',09 = 9{,}7538885 - 10.$$

2. Beispiel. $lg\ cos\ 86^0\, 56'\, 35'',16$?

S. 284, Mitte der rechten Hälfte findet man:

$$lg\ cos\ 86^0\, 56'\, 35'' = 8{,}7269588,$$

und als Abnahme für 1 Sek. 394, daher für die gegebenen 0,16 Sek.: 394 . 0,16 = 42. Folglich

$$\begin{array}{r} 8{,}7269588 \\ -\ 42 \\ \hline \end{array}$$

$$lg\ cos\ 86^0\, 56'\, 35,''16 = 8{,}7269546 - 10.$$

III. Für die Logarithmen der *sin* und *tg* von $0^0\, 0'$ bis etwa $0^0\, 30'$ sind die Differenzen der Zunahme der Winkel nicht proportional. Wächst z. B. $\angle\, 0^0\, 10'\, 0''$ (s. S. 198 links oben) um 1 Sek., so nimmt der *lg sin* um 7232 zu, bei einer Zunahme um 20 Sek. jedoch nicht um 2 . 7232, sondern um 7232 + 7220. Die soeben gelehrte Berechnungsweise würde daher auch kein vollkommen richtiges Resultat geben. Ein solches ergiebt sich aber, wenn man die Seite 2 bis 185 unterhalb der Logarithmen der natürlichen Zahlen angegebene Tabelle in folgender Weise benutzt.

Man addiert zu dem Log. der gegebenen Sekundenzahl bei *sin* die Zahl S, bei *tg* die Zahl T.

Beispiel. $lg\ tg\ 0^0\, 19'\, 48'',9$?

Seite 9 findet man zunächst, daſs $0^0\, 19'\, 40'' = 1180$ Sek.,
daher $0^0\, 19'\, 48'',9 = 1188{,}9$ Sek.

Daneben ist für T: 4,6855797 angegeben. Folglich:

$$\begin{array}{rl} lg\ 1188{,}9 = & 3{,}0751453 \text{ (auf derselben 9. Seite)} \\ +\ T = & 4{,}6855797 \\ \hline \end{array}$$

$lg\ tg\ 0^0\, 19'\, 48'',9 = 7{,}7607250 - 10$. (Vergl. S. 202, rechte Hälfte, 12. Zeile von unten.)

13.

I. Ist *lg sin* oder *lg tg* gegeben und soll der zugehörige Winkel gefunden werden, so vermindert man den gegebenen

Log. um den in den Tafeln enthaltenen **nächstkleinern** Log. Der Rest durch die in den Tafeln S. 188 bis 372 angegebene Logarithmen-Differenz oder durch den 10. Teil der S. 374 bis 607 angegebenen Log.-Diff. dividiert, giebt die Sekundenzahl, um welche der jenem nächstkleinern Log. zugehörige Winkel zu vermehren ist.

1. Beispiel. $lg\,tg\,x = 0{,}3462691$.

S. 483 findet man: $\underline{0{,}3462244} = lg\,tg\,65^0\,44'\,40''$ mit d. Diff. 562.

Rest 447.

Folglich ist $x = 65^0\,44'\,40'' + \frac{447}{56{,}2}$ Sek. (denn für je 56,2 nimmt der Winkel um 1 Sek. zu)

$= 65^0\,44'\,40'' + 7'',95 = 65^0\,44'\,47'',95$.

2. Beispiel. $lg\,sin\,x = 8{,}6471413 - 10$.

S. 269 findet man: $\underline{8{,}6471380} = lg\,sin\,2^0\,32'\,36''$ mit d. Diff. 474.

Rest 33.

Folglich ist $x = 2^0\,32'\,36'' + \frac{33}{474}$ Sek. (474 giebt 1 Sek., wieviel Sek. giebt 33?)

$= 2^0\,32'\,36'' + 0'',07 = 2^0\,32'\,36'',07$.

II. Für *cos* und *cot* weicht die Berechnung des Winkels von der vorstehenden nur insofern ab, als man den gegebenen *lg* von dem in den Tafeln enthaltenen **nächstgrößsern** Log. subtrahiert.

1. Beispiel. $lg\,cos\,x = 9{,}8650263 - 10$.

S. 595 findet man: $lg\,cos\,42^0\,52'\,20'' = 9{,}8650286$ (Diff. = 195).

Der gegebene Log. $\underline{\quad 0263}$ subtrahiert.

Rest 23.

Folglich ist $x = 22^0\,41'\,20'' + \frac{20}{19{,}5}$ Sek. (für eine Abnahme von je 19,5 nimmt der Winkel um 1 Sek. zu)

$= 22^0\,41'\,20'' + 1'',03 = 22^0\,41'\,21'',03$.

2. Beispiel. $lg\,cot\,x = 8{,}5158500 - 10$.

S. 249 findet man: $lg\,cot\,88^0\,7'\,17'' = 8{,}5158699$ (Diff. = 642).

Der gegebene Log. $\underline{\quad 8500}$ subtr.

Rest 199.

Folglich ist $x = 88^0\,7'\,17'' + \frac{199}{642}$ Sek. (642 giebt 1 Sek., wieviel Sek. giebt 199?)

$= 88^0\,7'\,17'' + 0'',31 = 88^0\,7'\,17'',31$.

III. Ist *lg sin* oder *lg tg* kleiner als 7,94.... gegeben, so würde der gesuchte Winkel aus dem in § 12, III angegebenen

Grunde durch den vorstehenden Abschnitt I nicht genau berechnet werden können. Man sucht in diesem Falle in Seite 188 bis 207 den zunächstliegenden Winkel (in ganzen Sekunden) und bestimmt für denselben aus Seite 2 bis 20 das zugehörige S (bei *sin*) oder T (bei *tg*).

Dieses S, resp. T vom gegebenen *lg* subtrahiert, giebt den Logarithmus der Sekundenzahl des gesuchten Winkels.

Beispiel. $lg\ sin\ x = 7{,}5528765 - 10$. Seite 199 giebt annähernd $x = 0^0\ 12'\ 17''$. Für diesen Winkel aber findet man Seite 5:

$$\begin{array}{ll} S = \underline{4{,}6855739} & \text{vom gegebenen } lg \text{ subtr.:} \\ \text{Rest } 2{,}8673026. & \end{array}$$

Da diese Zahl $= lg\ 736{,}72$ (s. S. 133, oberhalb der Mitte), so ist $x = 736'',72 = 0^0\ 12'\ 16'',72$.

IV. Dem Anfänger bereitet das Aufsuchen eines gegebenen Log. oft Schwierigkeiten. Man merke sich daher, daſs bei *sin* und *cos* der Log., welcher kleiner als 9,8495 ist, stets in der 1. Kolumne der Bruhnsschen Tafeln, derjenige, welcher gröſser als 9,8495, stets in der 2. Kolumne aufgesucht wird. Bei *tg* und *cot* ist der negative Log. (also 9,.... — 10 oder 8,.... — 10 u. s. w.) stets in der 3. Kolumne, der positive Log. (also 0,..... oder 1,..... u. s. w.) stets in der 4. Kolumne aufzusuchen.

14.

Wie schon oben bemerkt wurde, enthalten die Tafeln nur die Log. der trigonometrischen Funktionen. Will man daher die trigonometrische Funktion selbst kennen lernen, so hat man noch für den Log. die absolute Zahl zu bestimmen.

Es werde z. B. $tg\ 16^0\ 17'\ 18'',9$ gesucht.

S. 435 findet man:

$$\begin{aligned} lg\ tg\ 16^0\ 17'\ 18'',9 &= 9{,}4656168 + 78{,}2 \,.\, 8'',9 \\ &= 9{,}4656168 + 696 \\ &= 9{,}4656864 - 10. \end{aligned}$$

Die Bruhnsschen Tafeln geben Seite 44:

$$9{,}4656864 - 10 = lg\ 0{,}2922042.$$

Daher: $\quad tg\ 16^0\ 17'\ 18'',9 = 0{,}2922042.$

Mit diesen Vorkenntnissen ausgerüstet, können wir nun zur eigentlichen Trigonometrie (Berechnung der Dreiecke) schreiten.