Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1884

Erster Teil. Ebene Trigonometrie

Erster Teil.
Ebene Trigonometrie.

Einleitung.

Die Elementar-Geometrie lehrt schon, dafs unter allen räumlichen Gröfsen das einfache Dreieck insofern sich am wichtigsten zeigt, als es gleichsam ein Schlüssel ist, durch dessen Vermittelung wir zur Kenntnis der meisten übrigen Figuren gelangen. Kreis und Dreieck sind höchst verschiedene Gestalten, aber nur durch Hilfe des Dreiecks konnten wir die vielen merkwürdigen Eigenschaften des Kreises entdecken, seinen Umfang und seinen Inhalt finden. Dasselbe gilt von vielen anderen räumlichen Gröfsen, Kegel, Kugel etc. Nicht allein die reine Geometrie kommt auf das einfache Dreieck zurück, sondern fast auch die ganze praktische Geometrie, mithin ganze, für das bürgerliche Leben wichtige und unentbehrliche Wissenschaften. Geodäsie (Geographie, Land- und Seekarten), Schiffahrtskunde, Astronomie, Mechanik, Optik etc. konnten erst in neuerer Zeit durch eine vervollkommnete Theorie des Dreiecks (Trigonometrie) fest begründet, praktisch sicher und fruchtbar gemacht werden. Aus diesen Gründen ist die vollständige Theorie des Dreiecks (Trigonometrie) von so grofser Wichtigkeit für die Wissenschaft selbst und für das praktische Leben, und man kann behaupten, einer der wichtigsten Teile der gesamten Mathematik, und deshalb ein gründliches Studium derselben die darauf verwandte Zeit und Mühe reichlich lohnend.

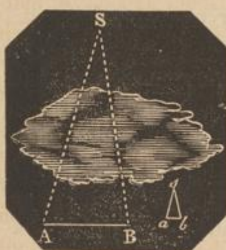
Aus der Elementar-Geometrie wissen wir, durch welche von den sechs Bestandteilen eines Dreiecks (drei Seiten und drei

Winkel) die übrigen bestimmt sind, mithin das ganze Dreieck vollkommen bestimmt ist, nämlich durch:

1. Zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel.
2. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.
3. Alle drei Seiten.
4. Zwei Seiten und den der gröfseren dieser beiden Seiten gegenüber liegenden Winkel.

Auch lehrt die Geometrie das Verfahren, wenn irgend drei dieser Bestimmungsstücke der Gröfse nach gegeben sind, die dadurch bestimmte Gröfse der übrigen drei Stücke durch Konstruierung des ganzen Dreiecks zu finden.

In rein theoretischer Hinsicht läfst sich gegen die Richtigkeit dieses zeichnenden Verfahrens auch nichts einwenden, in praktischer Hinsicht aber, wo möglichste Genauigkeit gefordert wird, ist dieses Verfahren, wegen Unzulänglichkeit unserer Sinne und Unvollkommenheit der beim Konstruieren gebrauchten Werkzeuge, höchst selten zuverlässig und genügend, oft auch ganz unausführbar.



Um dieses einleuchtend zu machen, bedarf es nur eines Beispiels aus der Geodäsie.

Angenommen: es solle die Entfernung eines Punktes, S, von einem Punkte, A, bestimmt werden. Ist die Entfernung wegen eines zwischenliegenden Hindernisses nicht unmittelbar zu messen, so mufs es durch Hilfe eines erst zu bildenden Dreiecks geschehen.

Es werde deshalb eine beliebig grofse sogenannte Standlinie, AB, unmittelbar und möglichst genau gemessen, ebenso die beiden Winkel A und B an derselben, mittelst eines bis auf die Sekunde genau messenden Winkelmessers,

z. B. $AB = 800$ Meter, $\angle A = 78^0\,14'\,36''$; $\angle B = 85^0\,20'\,17''$.

Wollte man nun aus diesen in Zahlen gegebenen Gröfsen die fragliche Länge der Linie AS durch Zeichnung finden, so müfste man erst ein ähnliches Dreieck konstruieren, und also nach einem verjüngten Mafsstabe eine Linie, $ab = 800$ Meter, auf einem Zeichenbrette abstecken und hieran die Winkel $a = A$, $b = B$ zeichnen. So grofs dann die Linie as, nach demselben verjüngten Mafsstabe gemessen, ist, so grofs müfste AS in der Wirklichkeit sein, wenn das mit ABS ähnliche Dreieck abs vollkommen genau gezeichnet wäre. Diese Genauigkeit ist aber durch Zeichnung schon deshalb nicht möglich, weil sich die, bis auf die Sekunde genau gemessenen Winkel nicht so genau wieder zeichnen lassen. Ein paar Minuten gröſser oder kleiner könnte aber, namentlich wenn die Summe der beiden Winkel A, B nahe an 180° käme, einen Fehler verursachen, wodurch die Länge von *as*, also auch AS um mehr als die Hälfte zu groſs oder zu klein ausfiele, abgesehen von der groſsen Umständlichkeit dieses zeichnenden Verfahrens, und daſs auſserdem der Durchschnittspunkt *s* eine so groſse Entfernung von *a* und *b* haben könnte, daſs die Linie *as*, *bs* fast parallel liefen, auf dem Zeichenbrette, und wenn es auch die Gröſse einer Provinz hätte, gar nicht zum Durchschnitt kämen, und deshalb gar keine Zeichnung möglich wäre. Eben so ungenaue Resultate würde das Konstruktionsverfahren geben, wenn man darnach aus den drei in Zahlen gegebenen Seiten eines Dreiecks die Gröſsen der dadurch bestimmten Winkel in Zahlen genau finden wollte.

Diese Beispiele, deren wir nicht nur aus der Geodäsie, sondern auch aus anderen Teilen der angewandten Mathematik noch viele anführen könnten, wo man nämlich aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten mit möglichster Genauigkeit finden soll, zeigen deutlich, daſs dies, aus angeführten Gründen, durch geometrische Konstruktionen durchaus unmöglich ist, und daſs wir in allen solchen Fällen auf genaue und sichere Praxis entweder ganz verzichten, oder noch ein anderes, von unsern Sinnen und Werkzeugen unabhängiges Verfahren erfinden, kurzum, die Theorie des Dreiecks erst noch vervollkommnen müssen, und es fragt sich nun, ob und wie sich dieser wichtige Gedanke, den, wie wir eben angedeutet, nicht müſsige Spekulationen, sondern vielfache, rein praktische Bedürfnisse hervorgerufen habe, verwirklichen lasse?

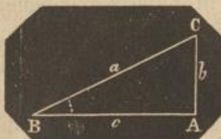
Der Einfall: Hilfe in der Arithmetik zu suchen, stellt sich hier von selbst ein. Denn, könnten wir allgemeine arithmetische Regeln finden, nach welchen man aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten Stücke berechnen könnte, so wäre damit jener Gedanke offenbar verwirklicht, weil alle durch Rechnung erhaltenen Resultate reines Produkt des Geistes, mithin von der Unzulänglichkeit unserer Sinne ganz unabhängig, also vollkommen genau und zuverlässig sind, wie es die Arithmetik selbst ist.

Daſs solche allgemeine arithmetische Regeln existieren müssen, läſst sich wenigstens mutmaſsen. Auch sind diese Regeln, obwohl die Wissenschaft, zu ihrem eigenen und zum groſsen Nachteil der Praxis, wegen vernachlässigter Ausbildung der den Alten fast gänzlich unbekannten arithmetischen Wissenschaften, sehr lange darauf warten muſste, in den letzten anderthalb hundert Jahren gefunden, und machen zusammen nun denjenigen Teil der Mathematik aus, welchem man den Titel Trigonometrie (Dreiecksrechnung) giebt.

Der Zweck und Begriff dieser jetzt zu bildenden Wissenschaft ist vorläufig nun wohl so deutlich ausgesprochen, daſs der Anfänger, dadurch vorbereitet und angeregt, auf den Gang der Erfindung und Entwickelung gespannt sein wird.

Denn so leicht ist die Sache nicht. Und wer den unaufhaltsamen Fortschritt in den Wissenschaften mit Aufmerksamkeit betrachtet und wahrnimmt, auf welche sinnreiche Weise der menschliche Geist scheinbar unüberwindliche Schwierigkeiten zu beseitigen weiſs, der wird auch hier das Verdienst desjenigen anerkennen und dessen Scharfsinn bewundern, der als der erste Erfinder der Trigonometrie betrachtet werden muſs. Auf welche sinnreiche Weise er zu Werke ging, wollen wir jetzt zeigen.

Durch die Überlegung, daſs jedes Dreieck durch ein Perpendikel immer in zwei rechtwinklige zerlegt werden kann, und deshalb die ganze Trigonometrie auf die des einfacheren rechtwinkligen Dreiecks zurückkommt, war die allgemeine Aufgabe vorläufig auf die weit einfachere gebracht: aus beliebigen in Zahlen gegebenen Bestimmungsstücken eines rechtwinkligen Dreiecks die übrigen Stücke desselben durch Rechnung zu finden; und es war ein sehr glücklicher, gleich auf die beste und bequemste Methode führender Gedanke, durch Herbeischaffung folgender Hilfsgröſsen diese Aufgabe leicht zu lösen.



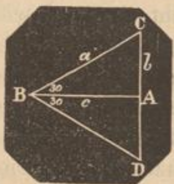
Man denke sich, sagte der erste Erfinder, auf dem einen Schenkel eines bestimmten Winkels, B, ein beliebiges Stück, BC, abgeschnitten und von dem Endpunkt C eine Senkrechte, CA, auf den andern Schenkel gefällt, so entsteht ein bei A rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten a, b, c heiſsen mögen.

Denken wir uns die Längen dieser Seiten nach einer beliebigen Längeneinheit gemessen und durch Zahlen ausgedrückt, so ist klar, dafs die Verhältnisse von je zwei dieser Seiten oder die unbenannten Quotienten, die je zwei Seiten durch einander dividiert geben $\left(\text{wie } \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}\right)$*), durch die Gröfse des Winkels B vollkommen bestimmt sind.

Wäre z. B. $\angle B = 30^0$, so wäre:

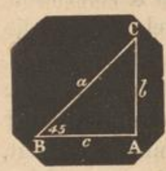
$$\frac{b}{a} = \tfrac{1}{2};\ \frac{c}{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3};\ \frac{b}{c} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3};\ \frac{c}{b} = \sqrt{3}.$$

Denn denkt man den Winkel $B = 30^0$ auch unterhalb BA angetragen und CA bis D verlängert, so ist BCD ein gleichseitiges Dreieck (weil jeder Winkel $= 60^0$), folglich $b = \frac{1}{2}a$; $c = \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, mithin



$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \tfrac{1}{2};\ \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3};\ \frac{b}{c} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$
$$\frac{c}{b} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}.$$

Ferner ist auch klar, dafs diese vier Quotienten nur von der Gröfse des Winkels B, nicht aber von der absoluten Gröfse der Seiten a, b, c abhängen; denn wird eine dieser Seiten, z. B. $BC = a$, 2, $3 \cdots n$mal so grofs genommen, so werden (vermöge Ähnlichkeit der Dreiecke) auch die beiden andern Seiten b und c in demselben Verhältnisse gröfser, und die Quotienten bleiben deshalb für denselben Winkel noch dieselben. In der Figur zum 7. Satze ist z. B. für denselben $\angle a$ das Verhältnis $\frac{MP}{CM} = \frac{AT}{CT}$.



Ändern sich jedoch die Winkel, so ändern sich auch die Quotienten.

Wäre z. B. $\angle B = 45^0$, so wären die erwähnten Quotienten:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\tfrac{1}{2}};\ \frac{c}{a} = \sqrt{\tfrac{1}{2}};\ \frac{b}{c} = 1,\ \frac{c}{b} = 1.$$

Denn wenn in dem bei A rechtwinkligen Dreieck CAB der Winkel $B = 45^0$ ist, so ist auch $\angle C = 45^0$, und die beiden Katheten b und c sind einander gleich. Setzen wir die Länge dieser

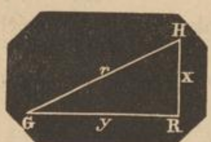
*) Die beiden Quotienten $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ sind überflüssig.

gleichen Katheten $= x$, so ist: $x^2 + x^2 = a^2$ oder $x^2 = \frac{1}{2}a^2$, mithin $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$; folglich, wie oben, $\frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\frac{b}{c} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1$ etc.

Könnte man nun diese vier Quotienten, wie hier für 30^0 und 45^0, auch für jeden andern Zustand des Winkels B, von 0^0 bis 90^0 berechnen, und dann alle nebst den zugehörigen Winkeln in einer Tabelle leicht übersichtlich zusammenstellen, etwa so:

Winkel	Quotienten			
	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{c}{b}$
$0^0\,0'\,0''$	...	...	...	...
.				
.				
.				
$30^0\,0'\,0''$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$45^0\,0'\,0''$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	1
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

so leuchtet der grofse praktische Nutzen einer solchen Tabelle leicht ein, und wir wollen zeigen, dafs durch Anfertigung derselben die Aufgabe der Trigonometrie schon so gut wie gelöst wäre. Denn wären dann von einem rechtwinkligen Dreieck (und darauf kommt, wie gesagt, alles zurück) zwei Bestimmungsstücke gegeben, so könnte man mittelst einer solchen vollständigen trigonometrischen Tafel die übrigen Stücke durch eine einfache Multiplikation oder Division sehr leicht berechnen.



Wären z. B. in dem bei R rechtwinkligen Dreieck GHR der Winkel $G = 30^0$, die Hypotenuse $GH = r = 2530$ Meter gegeben, und die dem Winkel G gegenüber liegende Senkrechte $HR = x$, so wie auch die ihr anliegende $GR = y$ zu bestimmen verlangt, so giebt offenbar x durch r dividiert denselben Quotienten, welcher in der ersten Spalte der Tafel neben dem Winkel von 30^0 steht; daher $\frac{x}{2530} = \frac{1}{2}$, und hieraus durch eine leichte Multiplikation $x = 1265$ Meter. Ebenso ist der Quotient $\frac{y}{2530}$ für den Winkel $G = 30^0$ vollkommen bestimmt. Sucht man diesen Quotienten neben dem Winkel von 30^0 in der zweiten Spalte, so ist $\frac{y}{2530} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $y = 2530 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Einen gleichen Nutzen gewähren offenbar die beiden andern Spalten, wenn von einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete und ein spitzer Winkel gegeben sind; auch merkt man wohl schon, wie die Tafel (als vollständig vorausgesetzt) dienen kann, um in einem rechtwinkligen Dreieck die beiden spitzen Winkel zu bestimmen, wenn irgend zwei Seiten desselben gegeben sind.

Der groſse Nutzen einer solchen vollständigen Tafel ist aus dem Gesagten nun wohl einleuchtend, und der Erste, der den Gedanken an eine solche Tabelle faſste, muſs als der eigentliche Erfinder der Trigonometrie betrachtet werden, denn alles folgende, die ganze Trigonometrie, ist nur Bearbeitung und Ausführung dieses Gedankens, woran nun Viele teilnehmen und ihren Scharfsinn zeigen konnten, und den die Zeit bald zur Reife bringen muſste; denn eines folgt aus dem andern fast von selbst. Hier gilt wieder, was Descartes von den Fortschritten der Mathematik überhaupt sagt: „wenn man nur erst die zwei oder drei ersten Glieder hat, so ist es nicht schwer, auch die übrigen zu finden.“

Erstes Buch.

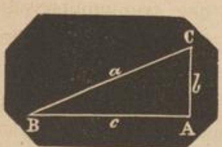
Benennung der trigonometrischen Funktionen. Berechnung derselben. Grenzen, zwischen welchen sie enthalten sind. Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

Benennung der trigonometrischen Funktionen.

1.

Die in der Einleitung erwähnten vier Quotienten: $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}$, welche in einem rechtwinkligen Dreieck, ABC, in bezug auf einen der beiden spitzen Winkel, B, je zwei Seiten durch einander dividiert, geben, sind, wie wir gesehen haben, durch die Gröfse des Winkels B vollkommen bestimmt, und also Funktionen dieses Winkels (Algebra § 148). Man benennt sie deshalb mit dem gemeinschaftlichen Namen: trigonometrische Funktionen oder goniometrische Funktionen. Da nun aber von diesen vier trigonometrischen Funktionen bald die eine, bald die andere gebraucht wird, so ist es, um Verwechselungen und Weitläufigkeiten im Vortrage zu vermeiden, offenbar notwendig, jede mit einem eigenen Namen zu benennen. Diese Namen sind, wie alle Eigennamen, ursprünglich ganz willkürlich, und der Anfänger mufs deshalb in den folgenden etwas seltsam klingenden Namen keinen verborgenen Sinn suchen wollen.

2.



Man nennt nämlich in jedem rechtwinkligen Dreieck, ABC, in bezug auf einen der beiden spitzen Winkel, z. B. $\angle$ B:

1. *sinus* des Winkels B (sprich kurz: *sinus* B): die ihm gegenüber liegende Kathete durch die Hypotenuse dividiert. In Zeichen: $\sin B = \frac{b}{a}$.

2. *cosinus* des Winkels B: die ihm anliegende Kathete durch die Hypotenuse dividiert. In Zeichen: $cos\,B = \frac{c}{a}$.

3. *tangente* des Winkels B: die ihm gegenüber liegende Kathete durch die anliegende dividiert. In Zeichen: $tg\,B = \frac{b}{c}$. (Lies: „Tangente B“ oder „*tangens* B“.)

4. *cotangente* des Winkels B: die ihm anliegende Kathete durch die gegenüber liegende dividiert. In Zeichen: $cot\,B = \frac{c}{b}$. (Lies: „Cotangente B“ oder „*cotangens* B“.)

Diese vier Kunstwörter und ihre Bedeutung mufs der Anfänger sich wohl merken, so wie auch, dafs die trigonometrischen Funktionen (*sinus*, *cosinus*, *tangente* und *cotangente*) abstrakte Zahlen, nicht aber Linien sind, und also das Wort *tangente* hier eine ganz andere Bedeutung hat, als in der Geometrie, wo es eine berührende Linie bedeutet, wiewohl letztere zu jenem trigonometrischen Begriffe Veranlassung gab (s. Fig. zum 7. Paragraph: $tg\,a = \frac{AT}{AC}$).

Die Lehre von den trigonometrischen Funktionen und ihren gegenseitigen Beziehungen nennt man Goniometrie. Trigonometrie ist die Anwendung derselben auf Berechnung der Dreiecke und ihrer Teile.

Anmerkung. Die Ausdrücke *cos* und *cot* entstanden in folgender Weise. Es ist $sin\,C = \frac{c}{a}$, d. i. der *sin.* des Komplementwinkels von $B = \frac{c}{a}$, oder: *complementi sinus* $B = \frac{c}{a}$, abgekürzt: $co.\ sin.\ B = \frac{c}{a}$ und endlich $cosin\,B = \frac{c}{a}$.

Berechnung der trigonometrischen Funktionen.

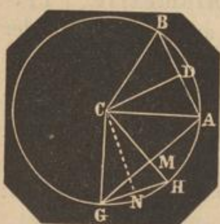
3.

Mit der ursprünglichen Berechnung der trigonometrischen Funktionen verhält es sich, gleichnisweise, wie mit der ursprünglichen Berechnung der Logarithmen. Als man diese sehr mühsame Arbeit unternahm, waren die kurzen und leichten Methoden, welche die seitdem erfundene höhere Mathematik jetzt darbietet, noch nicht bekannt, und wir müssen uns deshalb auch, weil wir die höhere Mathematik hier nicht als bekannt voraussetzen dürfen, damit begnügen, an ein paar Beispielen die Möglichkeit der Berechnung nach dem ältern mühsamen Verfahren zu erklären. Die ersten Berechner der trigonometrischen Tabellen haben der Wissenschaft einen unschätzbaren Dienst geleistet, und wir können auch hier wieder von ihnen sagen, daſs sie über diese sehr mühsame Arbeit ihr Leben verkürzt haben, um das unsrige zu verlängern.

Die Möglichkeit, die trigonometrischen Funktionen zu berechnen, erkannte der erste Erfinder darin: daſs man die Seiten aller regelmäſsigen Vielecke, welche man konstruieren kann, auch bloſs durch Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes, der sich hier in seiner gröſsten Wichtigkeit zeigt, zu berechnen imstande ist.

4.

In der Elementar-Geometrie ist nämlich § 194 gezeigt, daſs man aus dem *radius* eines Kreises die Seiten AG, GH, AB... aller regelmäſsigen Vielecke von 4, 8, 16, 32, 64,...; 3 6, 12, 24,....; 5, 10, 20,....; 15, 30, 60,...... Seiten berechnen kann. Da nun die, diesen Seiten am Mittelpunkt gegenüber liegenden Winkel beziehlich 90°, 45°, 22° 30′....; 120°, 60°, 30°, 15°..; 72°, 36°, 18°....; 24°, 12°, 6°... sind, und die Hälfte jeder berechneten Vielecksseite, wie z. B. BD, durch den *radius* CB dividiert, nämlich: $\frac{BD}{CB}$, den *sinus* des entsprechenden halben Winkels am Mittelpunkt giebt, $\left(\frac{BD}{CB} = \sin BCD\right)$, dann aus dem *radius* CB und der halben Vielecksseite BD auch leicht das darauf gefällte Perpendikel CD, mithin auch der *cosinus*, dann die *tangente* und *cotangente* vom Winkel BCD, nämlich: $\frac{CD}{CB}, \frac{BD}{CD}, \frac{CD}{BD}$ zu finden sind, so hat man zuerst die trigonometrischen Funktionen von folgenden Winkeln:



45°	30°	36°	12°
22° 30′	15°	18°	6°
11° 15′	7° 30′	9°	3°
5° 37′ 30″	3° 45′	4° 30′	1° 30′
2° 48′ 45″	1° 52′ 30″	2° 15′	0° 45′
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Wäre z. B. AB die Seite des regelmäſsigen Sechsecks, folglich $AB = CB$, so ist, wenn man der leichtern Rechnung halber den *radius* $CB = 1$ setzt*), $BD = \frac{1}{2}$, $\angle BCA = 60^0$, $\angle BCD = 30^0$, daher $\sin BCD = \frac{BD}{CB} = \frac{\frac{1}{2}}{1}$, oder $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$. Ferner $CD = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also: $\cos 30^0 = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; dann $tg\ 30^0 = \frac{BD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und $\cot 30^0 = \frac{CD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. Die vier trigonometrischen Funktionen des Winkels von 30^0 sind also:

$$\sin 30^0 = \tfrac{1}{2} = 0{,}5 \qquad tg\ 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}5773502$$

$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660254 \qquad \cot 30^0 = \sqrt{3} = 1{,}7320508$$

Aus demselben $\triangle$ BCD ergeben sich auch die trigonometrischen Funktionen des Winkels von 60^0, denn so groſs ist $\angle CBD$. Es ist nämlich

$$\sin CBD = \sin 60^0 = \frac{CD}{BC} = \frac{CD}{1} = CD = \tfrac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\cos CBD = \cos 60^0 = \frac{BD}{BC} = BD = \tfrac{1}{2};$$

$$tg\ CBD = tg\ 60^0 = \frac{CD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3};$$

$$\cot CBD = \cot 60^0 = \frac{BD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ist AG die Seite des regelmäſsigen Vierecks, so hat man (CA wieder $= 1$ gesetzt): $AG = \sqrt{2}$, also, weil $\angle ACM = \angle CAM = 45^0$; $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $CM = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, daher:

$$\sin 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \qquad tg\ 45^0 = 1$$
$$\cos 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \cot 45^0 = 1.$$

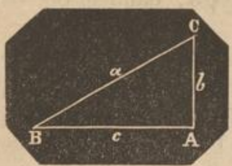
Eben so könnte man für die übrigen angeführten unzähligen Winkel die entsprechenden trigonometrischen Funktionen be-

*) Nähme man den *radius* CB, r mal, z. B. 10mal, so groſs, so würden auch die Linien BD, CD eben so viel mal so groſs, wobei aber die Quotienten $\frac{BD}{CB}$, $\frac{CD}{CB}$ etc., dieselben bleiben, als wenn man, der leichtern Rechnung halber, $CB = 1$ setzt, wo dann die halben Vielecksseiten BD, AM schon die *sinus*, und die darauf gefällten Perpendikel CD, CM, die *cosinus* der entsprechenden Winkel BCD, ACM selbst sind, denn es ist $\sin BCD = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{1} = BD$.

rechnen. Man sieht aber leicht, daſs dennoch eine sehr groſse Lücke bleibt.

5.

Aus der Erklärung der trigonometrischen Funktionen folgt aber, und konnte auch vom ersten Erfinder nicht unbemerkt bleiben, daſs in einem rechtwinkligen Dreieck, ABC, irgend eine trigonometrische Funktion des einen spitzen Winkels, B, zugleich auch die sinnverwandte trigonometrische Funktion des andern spitzen Winkels, C, ist. Der Quotient $\frac{b}{a}$ z. B. ist der *sinus* vom Winkel B (nämlich die gegenüber liegende Kathete durch die Hypotenuse dividiert, § 2), derselbe Quotient $\frac{b}{a}$ ist aber in Beziehung auf den andern spitzen Winkel C der *cosinus* vom Winkel C (nämlich die anliegende Kathete durch die Hypotenuse dividiert). In Zeichen:



$$\sin \mathrm{B} = \frac{b}{a} = \cos \mathrm{C} \qquad tg\, \mathrm{B} = \frac{b}{c} = \cot \mathrm{C}$$

$$\cos \mathrm{B} = \frac{c}{a} = \sin \mathrm{C} \qquad \cot \mathrm{B} = \frac{c}{b} = tg\, \mathrm{C}.$$

Wäre z. B. $\mathrm{B} = 30^0$, mithin $\mathrm{C} = 90 - 30 = 60^0$, so haben wir bereits gefunden (§ 4), daſs:

$$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^0 \qquad tg\, 60^0 = \sqrt{3} = \cot 30^0$$

$$\cos 60^0 = \tfrac{1}{2} = \sin 30^0 \qquad \cot 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = tg\, 30^0.$$

Wäre $\mathrm{C} = 80^0$, mithin $\mathrm{B} = 10^0$, so wäre:

$$\sin 80^0 = \cos (90^0 - 80^0) = \cos 10^0 \text{ und}$$
$$\cos 80^0 = \sin (90^0 - 80^0) = \sin 10^0.$$

Allgemein, wenn a einen beliebigen spitzen Winkel bedeutet:

$$\sin (90 - a) = \cos a \qquad tg\, (90 - a) = \cot a$$
$$\cos (90 - a) = \sin a \qquad \cot (90 - a) = tg\, a.$$

Setzt man in den vorstehenden Formeln $a = 45^0 + b$, so erhält man

$$\sin [90^0 - (45^0 + b)] = \cos (45^0 + b) \text{ u. s. w.}$$

oder

$$\sin (45^0 - b) = \cos (45^0 + b) \qquad tg\, (45^0 - b) = \cot (45^0 + b)$$
$$\cos (45^0 - b) = \sin (45^0 + b) \qquad \cot (45^0 - b) = tg\, (45^0 + b).$$

Anmerkung. Man nennt

sin	die	Kofunktion	(sinnverwandte	Funktion)	von	*cos*,
cos	„	„	„	„	„	*sin*,
tg	„	„	„	„	„	*cot*,
cot	„	„	„	„	„	*tg*.

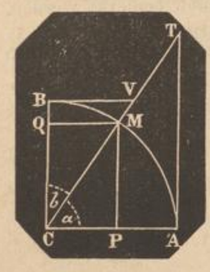
6.

Durch vorhergehenden wichtigen Satz ist also — was die Berechnung der trigonometrischen Funktionen für alle Winkel von 0 bis 90° betrifft — die Arbeit offenbar auf die Hälfte reduziert, weil man die trigonometrischen Funktionen für alle Winkel von 45 bis 90° erhält, indem man nur die sinnverwandten Funktionen derjenigen Winkel wieder abschreibt, welche erstere zu 90° ergänzen. So ist z. B.:

$$\begin{aligned} sin\ 46^0 &= cos\ (90^0 - 46^0) = cos\ 44^0, \\ cos\ 46^0 &= sin\ (90^0 - 46^0) = sin\ 44^0, \\ sin\ 47^0 &= cos\ (90^0 - 47^0) = cos\ 43^0, \\ cos\ 47^0 &= sin\ (90^0 - 47^0) = sin\ 43^0, \\ cot\ 83^0\ 39' &= tg\ (90^0 - 83^0\ 39') = tg\ 6^0\ 21'. \end{aligned}$$

Es brauchten also die trigonometrischen Funktionen nur für alle Winkel von 0 bis 45° berechnet zu werden. Dies geschah zuerst mit Zwischenräumen, welche dann durch Einschalten der Proportionalteile und durch Hilfe der §§ 45 und 47 ausgefüllt wurden, nach welchen man, aus bereits bekannten trigon. Funktionen beliebiger Winkel, sehr leicht die trigon. Funktionen für die Summen und Differenzen dieser Winkel finden und dadurch die gelassenen Zwischenräume der Tafel ausfüllen konnte. (Der wißbegierige Anfänger, der die Möglichkeit hiervon einsehen will, kann schon jetzt die, des Raumes halber hier nicht mit aufgenommenen, zitierten Sätze §§ 45 und 47 nachlesen.)

7.



Durch Hilfe des Kreises lassen sich die erklärten vier trigonometrischen Funktionen, so wie auch der vorhergehende Satz § 5 auf folgende Weise versinnlichen.

So wie man nämlich die Zahlenbegriffe: e i n s, z w e i etc. durch die Zeichen 1, 2, 3 ··· darstellen kann, so kann man sie auch durch Linien darstellen. Läßt man die Linie CA die Zahl **eins** bedeuten, so stellt offenbar eine zweimal so lange Linie die Zahl **zwei**, eine halb so lange Linie den Bruch $\frac{1}{2}$ dar etc.

Beschreibt man nun zwischen den Schenkeln eines Winkels, a, mit der Linear-Einheit (Radius) $CA = 1$ einen Bogen AM und fällt von dem Endpunkte M auf CA das Perpendikel MP, so stellt schon MP ($= CQ$) den *sinus*, und CP ($= QM$) den *cosinus* des Winkels a dar, weil hier die Division durch die Hypotenuse, da sie die Einheit ist ($CM = CA = 1$), wegfällt, indem $\frac{MP}{CM} = \frac{MP}{1} = MP$ etc.

Um die *tangente* des Winkels a durch eine einzige Linie zu versinnlichen, ziehe man durch A eine Berührungslinie, welche den verlängerten Schenkel CM in T schneidet, so stellt, weil $CA = 1$ ist, die Linie AT die *tangente* des Winkels a dar: denn im $\triangle ACT$ ist AT die dem $\angle a$ gegenüber liegende, AC die ihm anliegende Kathete.

Um endlich auch die *cotangente* des Winkels a durch eine einzige Linie darzustellen, sei der Bogen AM bis zu einem Viertelkreise (Quadranten) fortgeführt, mithin der *radius* BC senkrecht auf AC, so dafs also der Winkel b den Winkel a zu 90^0 ergänzt. Zieht man nun in B eine Berührungslinie BV an den Kreis, so ist $\angle BVC = \angle ACV$, weil BV parallel CA, und folglich ist $\angle BVC = a$. Die Berührende BV stellt nun die **Cotangente** des Winkels a dar, denn im $\triangle BCV$ ist BV die dem $\angle a$ ($= \angle V$) anliegende Kathete, CB die demselben Winkel gegenüber liegende Kathete und folglich ist $cot\ a = \frac{BV}{BC} = \frac{BV}{1} = BV$.

Diese Darstellung erscheint zwar weniger einfach als die in § 4, dient aber oft zur schnelleren Entwickelung gewisser Formen und Beziehungen *).

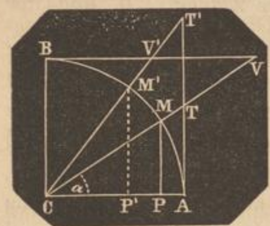
---

*) Zur historischen Notiz dienend, möge hier noch bemerkt werden, dafs in der alten Kunstsprache: die Linie AP, als Zahl gedacht (für $CA = 1$), der *sinus versus* des Winkels a, und wenn von M auf BC das Perpendikel MQ gefällt wird, die Linie BQ der *cosinus versus*, ferner die Linie CT die *secante*, und CV die *cosecante* des Winkels a genannt wird, so dafs also: $sin\ vers\ a = 1 - cos\ a$; $cos\ vers\ a = 1 - sin\ a$; $sec\ a = \frac{1}{cos\ a}$; $cosec\ a = \frac{1}{sin\ a}$ (wie aus $CP : CM = AC : CT$, d. i. $cos\ a : 1 = 1 : sec\ a$ und aus $QC : CM = BC : CV$, d. i. $sin\ a : 1 = 1 : cosec\ a$ folgt).

Grenzen der trigonometrischen Funktionen.

8.

Aus der eben gezeigten bildlichen Darstellung der trigonometrischen Funktionen oder auch aus dem rechtwinkligen Dreieck ist nun leicht zu ersehen, daſs mit dem Wachsen eines Winkels auch dessen *sinus* und *tangente* wachsen, *cosinus* und *cotangente* aber abnehmen. Denn es sei CA $= 1$ der festliegende Schenkel des Winkels MCA $= a$, und dessen beweglicher Schenkel MC $= 1$ in die Lage M'C gekommen, so ist der Winkel MCA gröſser, nämlich M'CP geworden, zugleich ist aber auch die ihm gegenüber liegende Kathete (sein *sinus*) MP gröſser, nämlich M'P' geworden. Fällt der bewegliche Schenkel MC mit BC (senkrecht auf CA) zusammen, so wird MP auch $=$ MC $= 1$, oder was dasselbe ist: in dem Bruche $\frac{MP}{CM} = sin\ a$, wird für $a = 90^0$ der Zähler dem Nenner gleich, mithin $sin\ 90^0 = 1$. Wird dagegen der Winkel a immer kleiner, so wird auch sein *sinus*, MP, immer kleiner, und verschwindet mit dem Winkel, oder, was dasselbe sagt, in dem Bruche $\frac{MP}{CM} = sin\ a$, wird für $a = 0^0$, der Zähler MP $= 0$, folglich $sin\ 0^0 = \frac{0}{CM} = 0$. Die *sinus* sind also immer echte Brüche (höchstens $= 1$).



Der *cosinus* eines Winkels MCP $= a$, nämlich CP, wird mit dem Wachsen des Winkels immer kleiner und für $a = 90^0$, wo P in C fällt, offenbar $= 0$, folglich $cos\ 90^0 = 0$. Dies folgt auch aus dem rechtwinkligen Dreieck MCP, indem der Zähler des Bruches $\frac{CP}{CM} = cos\ a$, für $a = 90^0$, Null wird, daher $cos\ 90^0 = \frac{0}{CM} = 0$. Mit dem Abnehmen des Winkels a dagegen wird sein *cosinus*, nämlich CP, immer gröſser und zuletzt gleich CA $= 1$, oder, was dasselbe ist: die anliegende Kathete wird, für $a = 0^0$, der Hypotenuse gleich, daher im Bruche $\frac{CP}{CM} = cos\ a$, für

$a = 0^0$, der Zähler dem Nenner gleich, mithin $cos\ 0^0 = 1$. Die *cosinus* sind also auch immer echte Brüche (höchstens $= 1$).

Mit dem Abnehmen des Winkels a wird (für $CA = 1$) die *tangente* AT offenbar immer kleiner und verschwindet mit dem Winkel, indem dann T auf A fällt, oder in dem Bruche $\frac{MP}{CP} = tg\ a$, wird, für $a = 0^0$, auch der Zähler $= 0$, und der Nenner gleich CA, $= 1$, daher $tg\ 0^0 = \frac{0}{1} = 0$. Wächst dagegen der Winkel a, so wächst auch seine *tangente*, und mufs zuletzt jede noch so grofse Zahl überschreiten. Ist der Winkel a schon beinahe 90^0 geworden, so geht die Linie CT fast parallel mit AT, der Durchschnittspunkt T rückt, mit dem Wachsen des Winkels a, immer weiter von A, es ist also, wenn a sehr nahe $= 90^0$ ist, auch CA in AT (oder CP in MP) sehr viele mal (hundert, tausend, millionen $\cdots\cdots$ mal) enthalten. Wird aber $a = 90^0$, so hat (für $CA = 1$) die *tangente* AT alle bestimmten Zahlen überschritten, und ist also unendlich grofs (∞) geworden, daher $tg\ 90^0 = \infty$. Dasselbe folgt auch: weil in dem Quotienten $\frac{MP}{CP} = tg\ a$, für $a = 90^0$, die gegenüber liegende Kathete $MP = BC$, und die anliegende Kathete $CP = 0$ wird; daher: $tg\ 90^0 = \frac{BC}{0} = \infty$. *)

Mit dem Wachsen des Winkels $MCP = a$ wird offenbar die *cotangente* BV immer kleiner, und verschwindet für $a = 90^0$, wo V auf B fällt, daher $cot\ 90^0 = 0$. Dasselbe folgt aus dem Bruche $\frac{CP}{MP} = cot\ a$, in welchem, für $a = 90^0$, der Zähler (die anliegende Kathete) $CP = 0$, und der Nenner $MP = CM = CB$ wird; daher $cot\ 90^0 = \frac{0}{BC} = 0$. Nimmt dagegen der Winkel a

---

*) Dividiert man eine Zahl, z. B. die Einheit, durch immer kleinere Zahlen, so wird der Quotient immer gröfser, z. B. $\frac{1}{0,1} = 10$; $\frac{1}{0,01} = 100$; $\frac{1}{0,001} = 1000$ etc., $\frac{1}{0} = \infty$. Eben so verhält es sich mit dem Ausdruck $\frac{MP}{CP} = tg\ a$. Wächst a von 0 bis 90^0, so wird der Zähler MP immer gröfser, der Nenner CP immer kleiner, und zuletzt, für $a = 90^0$, wird $\frac{MP}{CP} = \frac{BC}{0} = \infty$.

immer fort bis 0 ab, so wird die *cotangente* dabei immer gröſser und gröſser, und es giebt keine so groſse Zahl, welche sie nicht überschreiten könnte, daher $cot\ 0 = \infty$. Wir haben demnach folgende wohl zu merkende Formeln:*)

$$\begin{array}{ll} sin\ 0 = 0 & sin\ 90 = 1 \\ cos\ 0 = 1 & cos\ 90 = 0 \\ tg\ 0 = 0 & tg\ 90 = \infty \\ cot\ 0 = \infty & cot\ 90 = 0. \end{array}$$

Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

9.

In der Einleitung ist gezeigt, daſs wir vermittelst der trigonometrischen Funktionen aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten Stücke leicht berechnen können, und zwar durch eine einfache Multiplikation oder Division. Da man diese Operationen aber immer am bequemsten mit Logarithmen vollzieht, und es also sehr umständlich sein würde, zu gegebenen Winkeln erst die trigonometrischen Funktionen und dann zu diesen Funktionen wieder die Logarithmen zu suchen, so sind offenbar viel zweckmäſsiger die trigonometrischen Funktionen nicht selbst, sondern sogleich ihre Logarithmen eingetragen.

Da nach den §§ 5—8 alle Sinusse, Cosinusse und Tangenten von 0^0 bis 45^0 kleiner als 1 (also echte Brüche), so sind ihre Logarithmen negativ. Dagegen ist $cot\ 45^0 = 1$, $cot\ 0^0 = \infty$, folglich liegen alle Cotangenten von 0^0 bis 45^0 zwischen ∞ und 1 und ihre Logarithmen sind positiv. Es ist daher

$$\begin{aligned} sin\ 30^0 &= \tfrac{1}{2} = 0{,}5 \ \text{(s. § 8)}, \\ sin\ \ 5^0 &= 0{,}0871557 \\ sin\ 0^0\,30' &= 0{,}0087265, \text{ und folglich} \\ lg\ sin\ 30^0 &= 0{,}6989700 - 1 \\ lg\ sin\ \ 5^0 &= 0{,}9402960 - 2 \\ lg\ sin\ 0^0\,30' &= 0{,}9408419 - 3. \end{aligned}$$

Um nun in den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln Raum zu sparen, benutzt man die negativen Logarithmen nicht mit veränderlichen negativen Kennziffern, sondern setzt die negative

*) Wir werden sämtliche Formeln, so wie wir sie nach und nach entwickeln, in § 100 übersichtlich zum Nachschlagen zusammenstellen.

Kennziffer unveränderlich — 10, und weil $0 - 1 = 9 - 10$, $0 - 2 = 8 - 10$, $0 - 3 = 7 - 10$, so ist alsdann

$$lg\ sin\ 30^0 = 9{,}6989700 - 10,$$
$$lg\ sin\ 5^0 = 8{,}9402960 - 10,$$
$$lg\ sin\ 0^0\ 30' = 7{,}9408419 - 10.$$

In den Tafeln kann nun die negative Kennziffer — 10 weggelassen werden, nur hat man sich zu merken, bei welchen Logarithmen diese weggelassene — 10 hinzuzudenken ist. Wie schon vorher gezeigt wurde, ist dies bei *sin*, *cos* und *tg* von 0° bis 45° der Fall, während *lg cot* 0° bis 45° positiv, also — 10 nicht zu ergänzen ist (z. B. *cot* 40° = 1,1917536, folglich *lg cot* 40° = 0,0761865 ohne — 10).

Die Bruhnsschen Tafeln, auf welche wir uns hier allein beziehen, zeigen 4 Kolumnen, deren Überschriften *sin*, *cos*, *tg*, *cot* für den Winkel von 0° bis 45° gelten. Folglich hat man sich in den 3 ersten Kolumnen — 10 hinzuzudenken, in der 4. Kolumne jedoch nicht, vielmehr enthält die 4. Kolumne (die letzte rechts) den Logarithmus stets vollständig. So findet man z. B.

S. 429, 1. Zeile oben: $lg\ sin\ 15^0\ 10'\ 0'' = 9{,}4176837 - 10$
„ 546, 1. „ „ : $lg\ cos\ 34^0\ 40'\ 0'' = 9{,}9151228 - 10$
„ 385, 1. „ „ : $lg\ tg\ 7^0\ 50'\ 0'' = 9{,}1385417 - 10$
„ 520, 1. „ „ : $lg\ cot\ 30^0\ 20'\ 0'' = 0{,}2327450$
„ 493, in der Mitte: $lg\ cos\ 25^0\ 54'\ 50'' = 9{,}9539779 - 10.$

10.

Für die in den Bruhnsschen Tafeln oben angegebenen Funktionen gelten die darüber (am Kopfe der Seite) stehenden Grade und die in der 1. Kolumne links befindlichen Minuten und Sekunden (s. die letzten Beispiele in § 9). Für die unten angegebenen Funktionen gelten die darunter (am Fuſse der Seite) stehenden Grade und die in der letzten Kolumne rechts befindlichen, von unten nach oben zu zählenden Minuten und Sekunden. Z. B.

S. 493, letzte Zeile: $lg\ tg\ 64^0\ 0'\ 0'' = 0{,}3118182;$
„ 493, vorletzte Zeile: $lg\ cot\ 64^0\ 0'\ 10'' = 9{,}6881283 - 10;$
„ 493, 6. Zeile v. u.: $lg\ cos\ 64^0\ 0'\ 50'' = 9{,}9537155 - 10;$
„ 394, in der Mitte: $lg\ sin\ 80^0\ 34'\ 50'' = 9{,}2139446 - 10.$

Seite 374—607 (6° bis 45° und 45° bis 84°) sind die Logarithmen der Funktionen von 10 zu 10 Sekunden angegeben (s. die

9 letzten Beispiele). Der vorausgehende Teil, S. 188 bis 372, gilt für 0^0 bis 6^0 und 84^0 bis 90^0 und enthält die Logarithmen der Funktionen für jede einzelne Sekunde, jedoch sind hier die Kennziffer und die 3 (resp. 2) ersten Decimalen der Logarithmen nur nach je 10 Sekunden mit gröſseren Zahlen angegeben. Z. B.

S. 269, linke Hälfte, oben: $lg\ tg\ 2^0\,32'\,0'' = 8{,}6458528 - 10$
$lg\ tg\ 2^0\,32'\,1'' = 8{,}6459005 - 10$
$lg\ tg\ 2^0\,32'\,14'' = 8{,}6465199 - 10$
„ 269, rechte Hälfte, unten: $lg\cos 87^0\,26'\,6'' = 8{,}6508197 - 10$
„ 207, linke Hälfte, unten: $lg\ tg\ 89^0\,31'\,5'' = 2{,}0751154$
„ 227, rechte Hälfte, Mitte: $lg\sin 1^0\,9'\,29'' = 8{,}3055772 - 10.$

Ist in diesem ersten Teile der trigon. Tafel die viert- (resp. fünft-) letzte Stelle des Logarithmus mit einem * oder Strich versehen, so sind die weiter unten folgenden gröſser gedruckten Ziffern vorzusetzen. Z. B.

S. 247, rechte Hälfte: $lg\cot 1^0\,49'\,27'' = 1{,}4969113.$
„ 213, linke Hälfte: $lg\sin 0^0\,40'\,24'' = 8{,}0700975 - 10.$

11.

Die mit *d.* oder *d. c. (differentia communis)* überschriebenen Kolumnen enthalten die Differenz von je 2 auf einander folgenden Logarithmen. Nur im 1. Teile sind dieselben bei den Cosinussen von 0^0 bis 6^0 weggelassen, da sie hier sehr leicht gebildet werden können.

Die Logarithmen der *tg* und *cot* haben gleiche Differenzen (*d. c.*), denn ist (s. § 2)

$$tg\ B = \frac{b}{c},\ \text{so ist}\ \cot B = \frac{c}{b},\ \text{folglich}$$

$$tg\ B\,.\,\cot B = \frac{b}{c}\,.\,\frac{c}{b} = 1,\ \text{mithin}$$

$$lg\ tg\ B + lg\cot B = lg\ 1 = 0\ \text{und folglich}$$

$$lg\cot B = -\,lg\ tg\ B.$$

Sind nun B und B′ 2 in den Tafeln unmittelbar auf einander folgende Winkel, so ist (da auch

$$lg\cot B' = -\,lg\ tg\ B'\ \text{sein muſs}):$$

$$lg\cot B - lg\cot B' = -\,lg\ tg\ B - (-\,lg\ tg\ B'),\ \text{d. i.}$$

$$lg\cot B - lg\cot B' = lg\ tg\ B' - lg\ tg\ B,\ \text{also gleiche Diff.}$$

Aus vorstehenden Gleichungen folgt zugleich, daſs $lg\ tg\ a = (10{,}0000000 - 10) - lg\cot a$ und $lg\cot a = (10{,}00\ldots - 10) - lg\ tg\ a.$

Daſs ferner jeder Logarithmus für 2 sinnverwandte Funktionen und für 2 sich zu 90^0 ergänzende Winkel gilt, folgt aus § 5. So ist z. B. (s. S. 433, 1. Zeile oben):

$lg\ cos\ 15^0\ 50'\ 0'' = 9{,}9832019 - 10,$

$lg\ sin\ 74^0\ 10'\ 0'' = lg\ sin\ (90^0 - 15^0\ 50'\ 0'') = 9{,}9832019 - 10.$

12.

I. Um die Logarithmen der Funktionen von Winkeln zu bestimmen, die nicht unmittelbar in den Bruhnsschen Tafeln enthalten sind, hat man zunächst zu berücksichtigen, daſs die in den Tafeln angegebene Differenz im 2. Teile (S. 374 bis 607) für 10 Sekunden, im 1. Teile (S. 188 bis 372) jedoch für 1 Sekunde gilt und daſs für zunehmende Winkel die Logarithmen der Sinusse und Tangenten zu-, die Logarithmen der Cosinusse und Cotangenten dagegen abnehmen, denn je gröſser der Winkel, desto gröſser Sinus und Tangente und desto kleiner Cosinus und Cotangente.

Es sei z. B. $lg\ sin\ 32^0\ 10'\ 6'',45$ zu bestimmen. S. 531 findet man in der 1. Zeile oben

$$lg\ sin\ 32^0\ 10'\ 0'' = 9{,}7262249.$$

Daneben steht 335 als Zuwachs für 10 Sekunden, daraus folgt für 1 Sekunde 33,5 und für die gegebenen 6,45 Sekunden: $33{,}5 \cdot 6{,}45 = 216$. Daher

$$\begin{array}{r} 9{,}7262249 \\ +\ 216 \\ \hline \end{array}$$

sin $lg\ \underline{tg}\ 32^0\ 10'\ 6'',45 = 9{,}7262465 - 10.$

2. Beispiel. $lg\ tg\ 87^0\ 27'\ 33'',76$?

Seite 269, Mitte der linken Hälfte findet man:

$$lg\ tg\ 87^0\ 27'\ 33'' = 1{,}3528616.$$

Der Zuwachs beträgt, wie daneben angegeben ist, für 1 Sek. 476, folglich für 0,76 Sek.: $476 \cdot 0{,}76 = 362$. Daher

$$\begin{array}{r} 1{,}3528616 \\ +\ 362 \\ \hline \end{array}$$

$$lg\ tg\ 87^0\ 27'\ 33'',76 = 1{,}3528978.$$

II. Für *cos* und *cot* weicht die Berechnung von der vorstehenden nur insofern ab, als der aus der Differenz berechnete Betrag nicht addiert, sondern subtrahiert wird.

1. Beispiel. $lg\ cot\ 60^0\ 25'\ 46'',09$?

S. 515, etwas oberhalb der Mitte findet man:

$$lg\ cot\ 60^0\ 25'\ 40'' = 9{,}7539184,$$

und als Abnahme für 10 Sek. 491, daher für 1 Sek. 49,1 und für die gegebenen 6,09 Sek.: 49,1 . 6,09 = 299. Folglich

$$\begin{array}{r} 9{,}7539184 \\ -\ 299 \\ \hline \end{array}$$

$$lg\ cot\ 60^0\ 25'\ 46'',09 = 9{,}7538885 - 10.$$

2. Beispiel. $lg\ cos\ 86^0\ 56'\ 35'',16$?

S. 284, Mitte der rechten Hälfte findet man:

$$lg\ cos\ 86^0\ 56'\ 35'' = 8{,}7269588,$$

und als Abnahme für 1 Sek. 394, daher für die gegebenen 0,16 Sek.: 394 . 0,16 = 42. Folglich

$$\begin{array}{r} 8{,}7269588 \\ -\ 42 \\ \hline \end{array}$$

$$lg\ cos\ 86^0\ 56'\ 35,''16 = 8{,}7269546 - 10.$$

III. Für die Logarithmen der *sin* und *tg* von $0^0\ 0'$ bis etwa $0^0\ 30'$ sind die Differenzen der Zunahme der Winkel nicht proportional. Wächst z. B. $\angle\ 0^0\ 10'\ 0''$ (s. S. 198 links oben) um 1 Sek., so nimmt der *lg sin* um 7232 zu, bei einer Zunahme um 20 Sek. jedoch nicht um 2 . 7232, sondern um 7232 + 7220. Die soeben gelehrte Berechnungsweise würde daher auch kein vollkommen richtiges Resultat geben. Ein solches ergiebt sich aber, wenn man die Seite 2 bis 185 unterhalb der Logarithmen der natürlichen Zahlen angegebene Tabelle in folgender Weise benutzt.

Man addiert zu dem Log. der gegebenen Sekundenzahl bei *sin* die Zahl S, bei *tg* die Zahl T.

Beispiel. $lg\ tg\ 0^0\ 19'\ 48'',9$?

Seite 9 findet man zunächst, dafs $0^0\ 19'\ 40'' = 1180$ Sek.,
daher $0^0\ 19'\ 48'',9 = 1188{,}9$ Sek.

Daneben ist für T: 4,6855797 angegeben. Folglich:

$$\begin{array}{rl} lg\ 1188{,}9 = 3{,}0751453 & \text{(auf derselben 9. Seite)} \\ +\ T = 4{,}6855797 & \\ \hline \end{array}$$

$lg\ tg\ 0^0\ 19'\ 48'',9 = 7{,}7607250 - 10.$ (Vergl. S. 202, rechte Hälfte, 12. Zeile von unten.)

13.

I. Ist *lg sin* oder *lg tg* gegeben und soll der zugehörige Winkel gefunden werden, so vermindert man den gegebenen

Log. um den in den Tafeln enthaltenen **nächstkleinern** Log. Der Rest durch die in den Tafeln S. 188 bis 372 angegebene Logarithmen-Differenz oder durch den 10. Teil der S. 374 bis 607 angegebenen Log.-Diff. dividiert, giebt die Sekundenzahl, um welche der jenem nächstkleinern Log. zugehörige Winkel zu vermehren ist.

1. Beispiel. $lg\,tg\,x = 0{,}3462691$.

S. 483 findet man: $\underline{0{,}3462244} = lg\,tg\,65^0\,44'\,40''$ mit d. Diff. 562.

Rest 447.

Folglich ist $x = 65^0\,44'\,40'' + \frac{447}{56,2}$ Sek. (denn für je 56,2 nimmt der Winkel um 1 Sek. zu)

$= 65^0\,44'\,40'' + 7'',95 = 65^0\,44'\,47'',95$.

2. Beispiel. $lg\,sin\,x = 8{,}6471413 - 10$.

S. 269 findet man: $\underline{8{,}6471380} = lg\,sin\,2^0\,32'\,36''$ mit d. Diff. 474.

Rest 33.

Folglich ist $x = 2^0\,32'\,36'' + \frac{33}{474}$ Sek. (474 giebt 1 Sek., wieviel Sek. giebt 33?)

$= 2^0\,32'\,36'' + 0'',07 = 2^0\,32'\,36'',07$.

II. Für *cos* und *cot* weicht die Berechnung des Winkels von der vorstehenden nur insofern ab, als man den gegebenen *lg* von dem in den Tafeln enthaltenen **nächstgrößsern** Log. subtrahiert.

1. Beispiel. $lg\,cos\,x = 9{,}8650263 - 10$.

S. 595 findet man: $lg\,cos\,42^0\,52'\,20'' = 9{,}8650286$ (Diff. = 195).

Der gegebene Log. $\underline{\quad 0263}$ subtrahiert.

Rest 23.

Folglich ist $x = 22^0\,41'\,20'' + \frac{20}{19,5}$ Sek. (für eine Abnahme von je 19,5 nimmt der Winkel um 1 Sek. zu)

$= 22^0\,41'\,20'' + 1'',03 = 22^0\,41'\,21'',03$.

2. Beispiel. $lg\,cot\,x = 8{,}5158500 - 10$.

S. 249 findet man: $lg\,cot\,88^0\,7'\,17'' = 8{,}5158699$ (Diff. = 642).

Der gegebene Log. $\underline{\quad 8500}$ subtr.

Rest 199.

Folglich ist $x = 88^0\,7'\,17'' + \frac{199}{642}$ Sek. (642 giebt 1 Sek., wieviel Sek. giebt 199?)

$= 88^0\,7'\,17'' + 0'',31 = 88^0\,7'\,17'',31$.

III. Ist *lg sin* oder *lg tg* kleiner als 7,94.... gegeben, so würde der gesuchte Winkel aus dem in § 12, III angegebenen

Grunde durch den vorstehenden Abschnitt I nicht genau berechnet werden können. Man sucht in diesem Falle in Seite 188 bis 207 den zunächstliegenden Winkel (in ganzen Sekunden) und bestimmt für denselben aus Seite 2 bis 20 das zugehörige S (bei *sin*) oder T (bei *tg*).

Dieses S, resp. T vom gegebenen *lg* subtrahiert, giebt den Logarithmus der Sekundenzahl des gesuchten Winkels.

Beispiel. $lg\ sin\ x = 7{,}5528765 - 10$. Seite 199 giebt annähernd $x = 0^0\,12'\,17''$. Für diesen Winkel aber findet man Seite 5:

$$S = \underline{4{,}6855739} \text{ vom gegebenen } lg \text{ subtr.:}$$
$$\text{Rest } 2{,}8673026.$$

Da diese Zahl $= lg\ 736{,}72$ (s. S. 133, oberhalb der Mitte), so ist $x = 736'',72 = 0^0\,12'\,16'',72$.

IV. Dem Anfänger bereitet das Aufsuchen eines gegebenen Log. oft Schwierigkeiten. Man merke sich daher, daſs bei *sin* und *cos* der Log., welcher kleiner als 9,8495 ist, stets in der 1. Kolumne der Bruhnsschen Tafeln, derjenige, welcher gröſser als 9,8495, stets in der 2. Kolumne aufgesucht wird. Bei *tg* und *cot* ist der negative Log. (also 9,.... — 10 oder 8,.... — 10 u. s. w.) stets in der 3. Kolumne, der positive Log. (also 0,..... oder 1,..... u. s. w.) stets in der 4. Kolumne aufzusuchen.

14.

Wie schon oben bemerkt wurde, enthalten die Tafeln nur die Log. der trigonometrischen Funktionen. Will man daher die trigonometrische Funktion selbst kennen lernen, so hat man noch für den Log. die absolute Zahl zu bestimmen.

Es werde z. B. $tg\ 16^0\,17'\,18'',9$ gesucht.

S. 435 findet man:

$$\begin{aligned} lg\ tg\ 16^0\,17'\,18'',9 &= 9{,}4656168 + 78{,}2\,.\,8'',9 \\ &= 9{,}4656168 + 696 \\ &= 9{,}4656864 - 10. \end{aligned}$$

Die Bruhnsschen Tafeln geben Seite 44:

$$9{,}4656864 - 10 = lg\ 0{,}2922042.$$

Daher: $tg\ 16^0\,17'\,18'',9 = 0{,}2922042.$

Mit diesen Vorkenntnissen ausgerüstet, können wir nun zur eigentlichen Trigonometrie (Berechnung der Dreiecke) schreiten.

Zweites Buch.

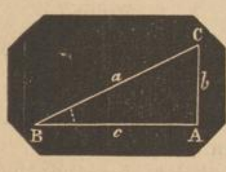
Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

15.

Die leichten Regeln für die Berechnung des **rechtwinkligen** Dreiecks folgen von selbst aus den Erklärungen der trigonometrischen Funktionen (§ 2). Wird nämlich eine Gleichung zwischen zwei Seiten und einem Winkel verlangt, so geben die beiden Seiten, gehörig zur Division (als Quotient) angesetzt, die entsprechende trigonometrische Funktion des betreffenden Winkels, und man braucht dann diese kleine Formel, im Fall nicht der Winkel, sondern die eine Seite gesucht wird, nur noch auf die gesuchte Seite zu reduzieren, wie folgende Beispiele zeigen.

16.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und ein Winkel gegeben: $a = 205{,}7898$, $B = 35^0\,26'\,14''$. Man sucht die übrigen Stücke b, c, C.



Auflösung. Es ist

$$\frac{b}{a} = \sin B \text{ und } \frac{c}{a} = \cos B \text{ (§ 2),}$$

folglich $b = a \sin B$ und $c = a \cos B$,

oder $b = 205{,}7898 \sin 35^0\,26'\,14''$

und $c = 205{,}7898 \cos 35^0\,26'\,14''$.

$$\begin{aligned} lg(sin)\ 205{,}7898 &= 2{,}3134239 \\ lg \sin 35^0\,26'\,14'' &= \underline{9{,}7632861 - 10} \\ \log b &= 2{,}0767100 \\ b &= 119{,}3191. \\ lg\ 205{,}7898 &= 2{,}3134239 \\ lg \cos 35^0\,26'\,14'' &= \underline{9{,}9110251 - 10} \\ \log c &= 2{,}2244490 \\ c &= 167{,}6675. \end{aligned}$$

Unmittelbar löst man die Aufgabe in folgender Weise: Ist $BC = 1$, so ist $AC = \sin B$. Da nun BC a mal so grofs als 1 ist, so mufs auch AC ($= b$) a mal so grofs als $\sin$ B sein. Oder: Die Kathete ist = der Hypotenuse multipliziert entweder mit dem *sin* des gegenüber liegenden Winkels, oder mit dem *cos* des anliegenden Winkels. Noch ist $\angle C = 90^0 - B = 90^0 - 35^0\,26'\,14'' = 54^0\,33'\,46''$.

17.

Aufgabe. Es ist eine Kathete und ein Winkel gegeben, nämlich: $c = 13{,}00579$, $B = 65^0\,18'\,40''$.

Man sucht die übrigen Stücke b, a, C.

Auflösung. Es ist $\frac{b}{c} = tg\,B$

$$b = c\,tg\,B$$

$$\cos B = \frac{c}{a}$$

$$a \cos B = c$$

$$a = \frac{c}{\cos B}$$

$$\begin{aligned} \log tg\,B &= 0{,}3375125 \\ \log c &= 1{,}1141367 \\ \hline \log b &= 1{,}4516492 \\ b &= \;28{,}29106 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log c &= 1{,}1141367 \\ \log \cos B &= 9{,}6208550 - 10 \\ \hline \log a &= 1{,}4932817 \\ a &= 31{,}13735. \end{aligned}$$

18.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse a und eine Kathete, b, gegeben: $a = 3798{,}47$; $b = 1480{,}99$. Man sucht die übrigen Stücke c, B, C.

Auflösung. Man hat:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$$\begin{aligned} \log (a+b) &= 3{,}7225895 \\ \log (a-b) &= 3{,}3650160 \\ \hline & \;7{,}0876055 : 2 \\ \log c &= 3{,}5438027 \\ c &= \;3497{,}862 \end{aligned}$$

$$\sin B = \frac{b}{a} = \cos C$$

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}1705522 \\ \log a &= 3{,}5796087 \\ \hline \log \sin B &= 9{,}5909435 - 10 \\ B &= 22^0\,56'\,52'' \\ C &= 67^0\;\;3'\;\;8''. \end{aligned}$$

19 a.

Aufgabe. Es sind gegeben beide Katheten: $b = 0{,}8745932$, $c = 0{,}5670073$. Man sucht die Winkel B und C und die Hypotenuse a.

Auflösung. Man hat:

$$tg\,B = \frac{b}{c} = \cot C$$

$$\begin{aligned} \log b &= 0{,}9418061 - 1 \\ \log c &= 0{,}7535886 - 1 \\ \hline \log tg\,B &= 0{,}1882175 \\ B &= 57^0\;\;2'\,39'' \\ C &= 32^0\,57'\,21'' \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

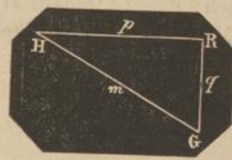
oder kürzer (indem man erst den Winkel B berechnet):

$$a = \frac{b}{\sin B}$$

$$\begin{aligned} \log b &= 0{,}9418061 - 1 \\ \log \sin B &= 9{,}9238086 - 10 \\ \hline \log a &= 0{,}0179975 \\ a &= 1{,}042311 \end{aligned}$$

19 b.

Um Sicherheit und Gewandtheit in der Berechnung rechtwinkliger Dreiecke zu erlangen, wird der Anfänger wohl thun, die folgenden 9 Aufgaben mehrmals zu lösen und dabei jedesmal das bei R rechtwinklige Dreieck in eine andere Lage zu bringen.



	Gegeben	Gesucht.	**Auflösung.**
1	m, G	p, q	$p = m \sin G$ $q = m \cos G$
2	m, H	p, q	$p = m \cos H$ $q = m \sin H$
3	p, H	q, m	$q = p \, tg\, H$ $m = \frac{p}{\cos H}$
4	p, G	q, m	$q = p \cot G = \frac{p}{tg\, G}$ $m = \frac{p}{\sin G}$
5	q, G	p, m	$p = q \, tg\, G$ $m = \frac{q}{\cos G}$
6	q, H	p, m	$p = q \cot H = \frac{q}{tg\, H}$ $m = \frac{q}{\sin H}$
7	m, q	p, H, G	$p = \sqrt{(m+q)(m-q)}$ $\sin H = \frac{q}{m} = \cos G$
8	m, p	q, H, G	$q = \sqrt{(m+p)(m-p)}$ $\cos H = \frac{p}{m} = \sin G$
9	p, q	H, G, m	$tg\, H = \frac{q}{p} = \cot G$ $m = \sqrt{(p^2 + q^2)}$

Anmerkung. Bei der 4ten Aufgabe hat man:

$$\frac{q}{p} = \cot G \text{ und auch}$$

$\frac{p}{q} = tg\, G$. Aus der 1sten Gleichung folgt

$$q = p \cot G \text{ und aus}$$

der 2ten: $q = \frac{p}{tg\, G}$. Es ist also einerlei, ob man eine Gröſse mit der *cotangente* eines Winkels multipliziert oder durch die *tangente* desselben dividiert und umgekehrt. Dies folgt schon aus § 11, wonach immer $tg\, G \cdot \cot G = 1$, mithin:

$$\cot G = \frac{1}{tg\, G} \text{ und}$$

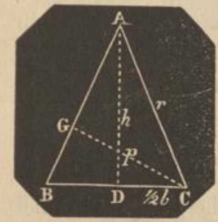
$$tg\, G = \frac{1}{\cot G}.$$

Drittes Buch.

Berechnung der gleichschenkligen Dreiecke und regelmäſsigen Vielecke.

20.

Das gleichschenklige Dreieck zerlegt man fast stets durch die Höhe zur ungleichen Seite in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.



Aufgabe. Es sind die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks und der Winkel an der Spitze gegeben, nämlich: $AB = AC = r = 15079{,}38$ m und $\angle BAC = A = 50^0\, 16'\, 48''$. Man sucht die Grundlinie $BC = b$, die Höhe $AD = h$ und den Flächeninhalt F.

Auflösung. Weil durch das Perpendikel AD das gleichschenklige Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige zerlegt wird, so hat man:

$$\frac{\frac{1}{2}b}{r} = \sin \tfrac{1}{2}A \qquad\qquad \frac{h}{r} = \cos \tfrac{1}{2}A$$

$$b = 2r \sin \tfrac{1}{2}A \qquad\qquad h = r \cos \tfrac{1}{2}A$$

$$\begin{aligned} \log \sin \tfrac{1}{2}A &= 9{,}6282167 - 10 \\ \log r &= 4{,}1783834 \\ \log 2 &= \underline{0{,}3010300} \\ \log b &= 4{,}1076301 \\ b &= 12812{,}39 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \log \cos \tfrac{1}{2}A &= 9{,}9567793 - 10 \\ \log r &= \underline{4{,}1783834} \\ \log h &= 4{,}1351627 \\ h &= 13650{,}94. \end{aligned}$$

Den Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}bh$ könnte man erhalten, indem man die für $\frac{1}{2}b$ und h gefundenen Ausdrücke $r \sin \frac{1}{2}A$ und $r \cos \frac{1}{2}A$ mit einander multipliziert, dies gäbe $F = r^2 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A$. Man erhält aber für den Inhalt F eine bequemere Formel, wenn man $AB = r$ als Grundlinie betrachtet und auf diese das Perpendikel

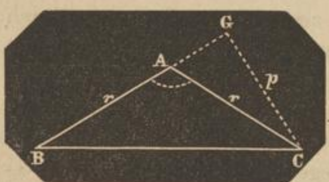
$CG = p$ fällt; dann hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck ACG, $\frac{p}{r} = \sin A$, mithin $p = r \sin A$. Dies mit der halben Grundlinie ($\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}r$) multipliziert, kommt:

$$✽\ F = \tfrac{1}{2}r^2 \sin A$$

$$\begin{aligned} \log \sin A &= 9{,}8860260 - 10 \\ 2 \log r &= 8{,}3567668 \\ \log 0{,}5 &= 0{,}6989700 - 1 \\ \hline \log F &= 7{,}9417628 \\ F &= 87450600 \ \square\text{m}. \end{aligned}$$

21.

Bei vorstehender Formel für den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks ($F = \frac{1}{2}r^2 \sin A$) ist jedoch zu bemerken,



dafs, wenn der Winkel A an der Spitze ein stumpfer ist, das Perpendikel $CG = p$, womit die halbe Grundlinie ($\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}r$) multipliziert werden mufs, aufserhalb des Dreiecks auf die Verlängerung der Grundlinie fällt. Da aber aus dem gegebenen stumpfen Winkel A leicht sein Nebenwinkel $\angle GAC = 180 - A$ zu berechnen und dann $\frac{p}{r} = \sin(180 - A)$ ist, so hat man: $p = r \sin(180 - A)$. Die vorhergehende Formel für den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks: $F = \frac{1}{2}r^2 \sin A$, könnte also, im Fall der Winkel A stumpf wäre, durch $F = \frac{1}{2}r^2 \sin(180 - A)$ ausgedrückt werden. Allein dieser Fall braucht gar nicht als besonderer betrachtet und durch eine eigene Formel dargestellt zu werden. Der erste Begründer der Trigonometrie bemerkte nämlich bald, dafs erstere Formel $F = \frac{1}{2}r^2 \sin A$ beide Fälle begreift und folglich allgemein ist, der Winkel A möge spitz oder stumpf sein, wenn man nur den Begriff des *sinus*, der anfangs auf spitze Winkel beschränkt wurde, erweitert und auch auf stumpfe Winkel ausdehnt, wobei man dann aber die kleine Regel zu merken hat: dafs der *sinus* eines stumpfen Winkels gleich ist dem *sinus* seines Nebenwinkels, und dafs man — weil in den trigonometrischen Tafeln keine stumpfen Winkel vorkommen — um den *sinus* eines stumpfen Winkels mittelst der Tafeln zu finden, diesen Winkel erst von 180° abziehen und dann zu dem Reste den *sinus* nehmen mufs; so ist z. B.: $sin\ 150^0 = sin\ (180 - 150) = sin\ 30^0$, $sin\ 120^0 = sin\ 60^0$. Allgemein, wenn a irgend einen Winkel, spitz oder stumpf, bedeutet:

$$sin\ (180 - a) = sin\ a.$$

Zusatz. Setzt man hier $a = 90^0 - b$, so entsteht

$$sin\ [180 - (90^0 - b)] = sin\ (90^0 - b), \text{ d. i.}$$

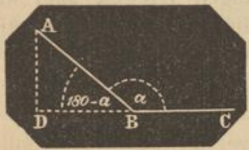
$$sin\ (90^0 + b) = cos\ b.$$

Diese praktische Formel macht die in der vorhergehenden ausgesprochene beschwerliche Subtraktion von 180^0 entbehrlich. Z. B.:

$$sin\ 132^0\ 43'\ 18'',7 = sin\ (90^0 + 42^0\ 43'\ 18'',7) = cos\ 42^0\ 43'\ 18'',7.$$

22.

Diese Erweiterung des Begriffes *sinus* hebt aber keineswegs die § 2 gegebene Erklärung desselben auf, denn es sei $\angle ABC = a$ ein stumpfer Winkel. Schneidet man von dem einen Schenkel ein beliebiges Stück, BA, ab, fällt von A auf den andern Schenkel (hier also auf die Verlängerung desselben) das Perpendikel AD, so kann man dies Perpendikel AD



sowohl dem Winkel a, als auch seinem Nebenwinkel $180^0 - a$ gegenüber liegend betrachten, und es ist dann, nach der gegebenen Erklärung, $sin\ a = sin\ (180 - a) = \frac{AD}{AB}$ *).

23.

Aus vorhergehendem Paragraph folgt, dafs die *sinus* zweier Nebenwinkel vollkommen gleich sind, ferner, dafs der zu einem bestimmten Winkel gehörige *sinus* vollkommen bestimmt ist, der Winkel möge spitz oder stumpf sein. Umgekehrt aber, dafs der zu einem bestimmten *sinus* gehörige Winkel unbestimmt ist, indem zu ihm, aufser dem spitzen Winkel, den man in den Tafeln aufschlägt, auch noch der stumpfe Nebenwinkel gehört.

Ist z. B. $sin\ x = 0{,}567$, so ist $lg\ sin\ x = lg\ 0{,}567 = 9{,}7535831 - 10$ und man findet zunächst in den Tafeln $x = 34^0\ 32'\ 28'',66$. Es ist aber auch $x = 180^0 - 34^0\ 32'\ 28'',66 = 145^0\ 27'\ 31'',34$.

*) Hätten wir den Begriff des *sinus*, so wie nun erst hier geschehen, schon zu Anfang des § 2 auf den stumpfen Nebenwinkel ausdehnen wollen, so hätte der Anfänger noch nicht den Zweck und Nutzen davon einsehen, also auch nicht mit klaren Begriffen folgen können.

24a.

Aufgabe. Es ist von einem gleichschenkligen Dreieck der Winkel an der Spitze $A = 140^0\ 16'\ 28''$ und die Länge der Schenkel $AB = AC = r = 505{,}67$ m gegeben. Man sucht den Inhalt F?

Auflösung. Nach § 21 hat man:

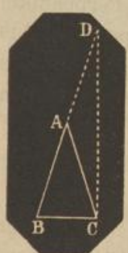
$$\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{2} r^2 \sin A \\ \log \sin A &= 9{,}8055762 - 10 \\ \log r^2 &= 5{,}4077344 \\ \log 0{,}5 &= \underline{0{,}6989700 - 1} \\ \log F &= 4{,}9122806 \\ F &= 81711\ \square\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &180^0 \\ A &= \underline{140 \cdot 16 \cdot 28} \\ 180 - A &= 39^0\ 43'\ 32''. \end{aligned}$$

24b.

Aufgabe. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind die Schenkel $AB = AC = r = 304$ m und der Flächeninhalt $F = 7945\ \square$m gegeben. Wie grofs ist der Winkel A an der Spitze?

Auflösung. Aus der Formel $F = \frac{1}{2} r^2 \sin A$ (§ 24) folgt:

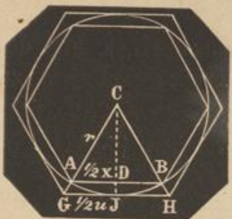


$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{2F}{r^2} \\ \log F &= 3{,}9000939 \\ \log 2 &= \underline{0{,}3010300} \\ & \quad 4{,}2011239 \\ 2 \log r &= \underline{4{,}9657472} \\ \log \sin A &= 9{,}2353767 - 10 \\ \text{also } A &= 9^0\ 54'\ 2'' \\ \text{oder auch } A &= 170^0\ 5'\ 58''\ (\S\ 23). \end{aligned}$$

Dafs die vollständige Auflösung hier zwei Winkel geben mufs, ist leicht einzusehen, weil die beiden Dreiecke CAB und CAD (wenn man $AD = AB$ nimmt), wegen gemeinschaftlicher Spitze C und gleicher Grundlinien, $AB = AD$, auch gleichen Inhalt haben. Der gesuchte Winkel A kann also sowohl $\angle BAC = 9^0\ 54'\ 2''$ als auch $\angle CAD = 170^0\ 5'\ 58''$ sein. Vergleiche Geometrie § 202.

25.

Aufgabe. Es ist der Radius eines Kreises, $AC = r$, gegeben. Man sucht die Seiten $AB = x$, und $GH = u$, der ein- und umgeschriebenen regelmäfsigen nEcke, sowie deren Inhalte f und F.



Auflösung. Es ist der Winkel ACB $=$ $C = \frac{360}{n}$, daher: $\frac{\frac{1}{2}x}{r} = \sin \frac{1}{2}C$ und

$$\frac{GJ}{CJ} = \frac{\frac{1}{2}u}{r} = tg\, \tfrac{1}{2}C; \text{ hieraus:}$$

$$x = 2r \sin \tfrac{1}{2}C \qquad f = n \cdot \tfrac{1}{2}r^2 \sin C$$

$$u = 2r\ tg\ \tfrac{1}{2}C \qquad F = n \cdot r^2\ tg\ \tfrac{1}{2}C$$

Sei z. B. $r = 1$m, $n = 7$ gegeben, so findet man:

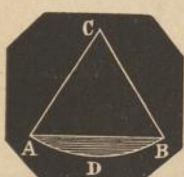
$C = 51^0\, 25'\, 42\tfrac{6}{7}''$; $\tfrac{1}{2}C = 25^0\, 42'\, 51\tfrac{3}{7}''$; $n \cdot \tfrac{1}{2}r^2 = \tfrac{7}{2} = 3{,}5$; $n \cdot r^2 = 7$.

$$\begin{aligned} \log \sin \tfrac{1}{2}C &= 9{,}6373733 - 10 \\ \log 2r &= 0{,}3010300 \\ \hline \log x &= 0{,}9384033 - 1 \\ x &= 0{,}8677674 \\ \log tg\ \tfrac{1}{2}C &= 9{,}6826636 - 10 \\ \log 2r &= 0{,}3010300 \\ \hline \log u &= 0{,}9836936 - 1 \\ u &= 0{,}96315 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin C &= 9{,}8931131 - 10 \\ \log n \cdot \tfrac{1}{2}r^2 &= 0{,}5440680 \\ \hline \log f &= 0{,}4371811 \\ f &= 2{,}73641 \\ \log tg\ \tfrac{1}{2}C &= 9{,}6826636 - 10 \\ \log n \cdot r^2 &= 0{,}8450980 \\ \hline \log F &= 0{,}5277616 \\ F &= 3{,}371021. \end{aligned}$$

26a.

Aufgabe. Gegeben: $AC = r = 12{,}5$ m, $C = 42^0\, 13' = 42^0{,}21667$. Man sucht die Fläche des Kreisabschnitts ADB $= F$?



Auflösung. Die Fläche des Ausschnitts ist $= r^2 \pi \frac{C}{360}$ und die des Dreiecks $= \tfrac{1}{2}r^2 \sin C$ (§ 21), mithin die Fläche des Abschnitts:

$F = r^2 \pi \frac{C}{360} - \tfrac{1}{2}r^2 \sin C$, wobei C im ersten Gliede der rechten Seite stets in Graden ausgedrückt sein muſs.

$$\begin{aligned} \log r^2 &= 2{,}1938200 \\ \log \pi &= 0{,}4971499 \\ \log C &= 1{,}6254840 \\ \hline &\ 4{,}3164539 \\ \log 360 &= 2{,}5563025 \\ \hline \log r^2 \pi \frac{C}{360} &= 1{,}7601514 \\ r^2 \pi \frac{C}{360} &= 57{,}56405 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin C &= 9{,}8273279 - 10 \\ \log r^2 &= 2{,}1938200 \\ \log 0{,}5 &= 0{,}6989700 - 1 \\ \hline \log \tfrac{1}{2}r^2 \sin C &= 1{,}7201179 \\ \tfrac{1}{2}r^2 \sin C &= 52{,}495 \end{aligned}$$

$$F = 5{,}06905\ \square\text{m}.$$

26 b.

Aufgabe. Den Inhalt eines Kreissegments AJB, s. Fig. des § 25, aus der Sehne $AB = a$ und der Sagitte $DJ = h$ zu berechnen.

Auflösung. Man ziehe die Gerade AJ und setze $\angle JAD = \varphi$, dann ist

$$\text{I.} \quad tg\, \varphi = \frac{DJ}{AD} = h : \frac{a}{2} = \frac{2h}{a}.$$

Da $\angle JAD$ und $\angle BCJ$ auf demselben Bogen BJ stehen, so ist $\angle BCJ$ als Centriwinkel $= 2 \cdot \angle JAD = 2\,\varphi$, daher $\angle ACB = 4\,\varphi$. Ferner $r = AC = \dfrac{AD}{sin\ ACD} = \dfrac{a}{sin\ 2\varphi}$.

$$\text{Sektor } ACB = \pi r^2 \cdot \frac{\angle ACB}{360^0} = \pi \cdot \frac{a^2}{4\, sin^2 2\varphi} \cdot \frac{4\varphi}{360} = \frac{\pi a^2 \varphi}{360 sin\, 2\varphi};$$

$\dfrac{CD}{AD} = cot\, 2\varphi$, daher $CD = \dfrac{a}{2}\, cot\, 2\varphi$.

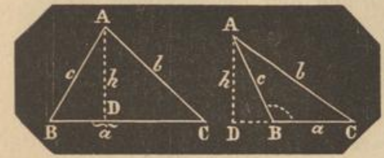
$$\triangle ABC = AD \cdot CD = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\, cot\ 2\varphi = \left(\frac{a}{2}\right)^2 cot\ 2\varphi.$$

$$\text{II.} \quad \text{Segment} = \text{Sektor} - \triangle = \frac{\pi a^2 \varphi}{360\, sin^2 2\varphi} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 cot\ 2\varphi.$$

Viertes Buch.

Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.

27.



Lehrsatz. In jedem Dreieck verhalten sich je zwei Seiten zu einander wie die *sinus* der gegenüber liegenden Winkel.*)

Beweis. Man denke das Perpendikel AD $= h$ gefällt, so hat man aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken ADB und ADC:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{h}{c} = \sin B \ldots . (1)\\[1ex] \frac{h}{b} = \sin C \ldots . (2)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{dividiert man (1) durch (2),}\\[1ex] \text{so folgt:}\end{array}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

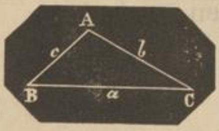
Da die *sinus* zweier Nebenwinkel, zufolge des § 21 erweiterten Begriffs, einander gleich sind, so ist der hier ausgesprochene wichtige Satz: daſs sich in jedem Dreieck die Seiten wie die *sinus* der gegenüber liegenden Winkel verhalten, allgemein giltig, das Dreieck möge spitzwinklig oder stumpfwinklig sein, denn die beiden Gleichungen (1) und (2) gelten sowohl für Fig. 2 als für Fig. 1. — Denkt man noch vom Winkel C ein Perpendikel auf die gegenüber liegende Seite c (oder deren Verlängerung Fig. 2) gefällt, so findet man durch gleiche Schlüsse $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$, mithin ist allgemein:

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C.$$

*) Es ist üblich, die Seiten eines Dreiecks mit kleinen und die gegenüber liegenden Winkel mit den gleichnamigen groſsen Buchstaben zu bezeichnen.

Dieser sogenannte *Sinus*-Satz wird immer angewandt, wenn von einem Dreieck eine Seite und zwei Winkel, oder zwei Seiten und ein gegenüber liegender Winkel gegeben sind, mithin jedesmal, wenn eine Gleichung zwischen vier Stücken, die paarweise gegenüber liegen, gesucht wird.

28.



Aufgabe. Von einem Dreiecke, ABC, sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben, z. B. $a = 2057{,}8$ m, $B = 54^0\,17'\,12''$, $C = 41^0\,39'\,10''$. Man sucht die beiden andern Seiten b, c und den Flächeninhalt F?

Auflösung. Zuerst findet man den dritten Winkel $A = 180 - (B + C) = 84^0\,3'\,38''$; dann, nach dem *Sinus*-Satz:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} \qquad\qquad \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$\text{folglich } b = a\,\frac{\sin B}{\sin A} \qquad\qquad c = a\,\frac{\sin C}{\sin A}$$

$$\begin{array}{rl} \log\sin B = & 9{,}9095280 - 10 \\ \log a = & \underline{3{,}3134032} \\ & 13{,}2229312 - 10 \\ \log\sin A = & \underline{9{,}9976624 - 10} \\ \log b = & 3{,}2252688 \\ b = & 1679{,}843 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \log\sin C = & 9{,}8225700 - 10 \\ \log a = & \underline{3{,}3134032} \\ & 13{,}1359732 \\ \log\sin A = & \underline{9{,}9976624} \\ \log c = & 3{,}1383108 \\ c = & 1375{,}025. \end{array}$$

Um den Inhalt F zu erhalten, suche man erst das von der Spitze A auf die Grundlinie a gefällte Perpendikel h. Weil $\frac{h}{b} = \sin C$, so ist: $h = b \sin C$, und da, wie vorhin gefunden: $b = a\frac{\sin B}{\sin A}$, so ist auch: $h = a\frac{\sin B}{\sin A}\sin C$, mithin ist:

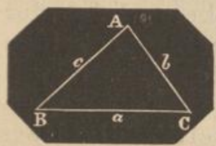
$$F = \tfrac{1}{2}a^2\,\frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}$$

$$\begin{array}{rl} \log\sin B = & 9{,}9095280 - 10 \\ \log\sin C = & 9{,}8225700 - 10 \\ \log a^2 = & 6{,}6268064 \\ \log 0{,}5 = & \underline{0{,}6989700 - 1} \\ & 27{,}0578744 - 21 \\ \log\sin A = & \underline{9{,}9976624 - 10} \\ \log F = & 6{,}0602120 \\ F = & 1148714\,\square\text{m}. \end{array}$$

Anmerkung. Es ist also $\sin A = \sin[180^0 - (B + C)] = \sin(B + C)$, siehe § 21. Oder: Der *sinus* eines Winkels im Dreieck ist = dem Sinus der Summe der beiden andern Winkel. Die Seite b hätte man in vorstehender Aufgabe mithin noch bequemer in folgender Weise gefunden:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{a \sin B}{\sin(B + C)} = \frac{2057{,}8 \sin 54^0\,17'\,12''}{\sin(54^0\,17'\,12'' + 41^0\,39'\,10'')} =$$
$$\frac{2057{,}8 \sin 54^0\,17'\,12''}{\sin 95^0\,56'\,22''} = \frac{2057{,}8 \sin 54^0\,17'\,12''}{\cos 5^0\,56'\,22''} \text{ (s. § 26, Zusatz).}$$

29.



Aufgabe. Von einem Dreieck, ABC, sind zwei Seiten b, c und ein der gröſsern Seite c gegenüber liegender Winkel, C, gegeben. Man sucht die übrigen Stücke.

Auflösung. Man suche zuerst den, der kleinern Seite b gegenüber liegenden Winkel B. Nach dem *Sinus*-Satze ist

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$$
$$\sin B = \frac{b}{c} \sin C.$$

Weil $b < c$, so muſs auch $B < C$, mithin Winkel B jedenfalls spitz sein.*) Ferner hat man nun $A = 180 - (B + C)$, und dann:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \text{ woraus: } a = b\frac{\sin A}{\sin B}.$$

Anmerkung. Sind 2 Seiten und der Gegenwinkel der kleinern dieser beiden Seiten gegeben, so ist die Auflösung unbestimmt. Es sind alsdann 2 verschiedene Dreiecke möglich (s. Geom. §§ 43 und 56).

Aufgabe. $b = 19$ Meter, $c = 23$ Meter, $\angle B = 41^0\,37'$. Wie groſs sind die übrigen Stücke?

Auflösung. Man suche zunächst $\angle C$.

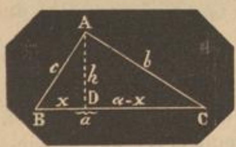
$$\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}, \text{ folglich } \sin B = \frac{c \sin B}{b} = \frac{23 \sin 41^0\,37'}{19}.$$

$$\begin{aligned} \log 23 &= 1{,}3617278 \\ \log \sin 41^0\,37' &= 9{,}8222621 - 10 \\ \hline &\ 1{,}1839900 \\ \log 19 &= 1{,}2787536 \\ \hline \log \sin C &= 9{,}9052364 - 10. \end{aligned}$$

*) Siehe auch Lübsens Elementar-Geometrie (25. Aufl.) §§ 43 u. 56.

In den Tafeln findet man $C = 53^0\,30'\,37''$. Nach § 23 ist aber auch $C = 180^0 - 53^0\,30'\,37'' = 126^0\,29'\,23''$. Man hat demnach 2 verschiedene Dreiecke, das eine mit $b = 19$, $c = 23$, $B = 41^0\,37'$, $C = 53^0\,30'\,37''$, das andere mit $b = 19$, $c = 23$, $B = 41^0\,37'$, $C = 126^0\,29'\,23''$. Sehr leicht findet sich nun auch in jedem Dreieck der 3. Winkel und nach dem *Sinus*-Satze die 3. Seite.

30.



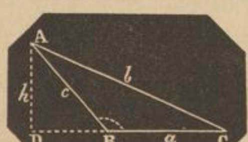
Lehrsatz. In jedem Dreieck ist der *cosinus* eines Winkels gleich der Summe der Quadrate der beiden ihn einschliefsenden Seiten; weniger dem Quadrate der ihm gegenüber liegenden Seite, dividiert durch das doppelte Produkt der beiden ihn einschliefsenden Seiten.*)

Es ist z. B. in Bezug auf den Winkel B:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}.$$

Beweis. Denkt man das Perpendikel $AD = h$ gefällt, und setzt $BD = x$, also $DC = a - x$, so hat man: $h^2 = c^2 - x^2$ und auch $h^2 = b^2 - (a - x)^2$; mithin: $b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2$. Aus dieser Gleichung folgt: $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. Dieser Quotient durch c dividiert, giebt obigen Ausdruck, denn es ist $\cos B = \frac{x}{c}$.

Anmerkung. Der Ausdruck $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ giebt an, wie weit der Fufspunkt D des Perpendikels AD von B gegen C hin fällt. Wäre z. B. $a = 8'$, $b = 6'$, $c = 4'$, so wäre $x = \frac{44}{16}$, und es wäre dann: $\cos B = \frac{11}{16}$.



Ist der Winkel B ein stumpfer (Fig. 2), so fällt das Perpendikel AD aufserhalb des Dreiecks auf die rückwärts verlängerte Linie BC, und es ist dann $b^2 > a^2 + c^2$. Obiger, für den Abstand des Punktes D von B gefundene Aus-

*) Dieser Satz, der sogenannte *Cosinus*-Satz, ist wichtig und deshalb dem Gedächtnis wohl einzuprägen.

druck: $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$, gilt aber auch für diesen Fall, wenn man nur das Vorzeichen des Resultats, welches hier negativ wird, richtig deutet. Wäre z. B. $a = 8$ m, $b = 12$ m, $c = 6$ m, so wäre $x = -\frac{11}{4}$ m. Das Minuszeichen deutet hier nun an, daſs der Fuſspunkt D des Perpendikels nicht, wie bei der Ableitung der Formel $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ vorläufig angenommen, in der Richtung BC, sondern in gerade entgegengesetzter Richtung BD um $\frac{11}{4}$ m von B entfernt liegt.*) Nimmt man aber diese negative Gröſse $x = -$ DB als positiv und dividiert durch c, so ist der Quotient $\frac{DB}{c}$ der *cosinus* von dem spitzen Nebenwinkel ABD, durch dessen Subtraktion von 180° der fragliche stumpfe Winkel B bestimmt wird. Der erste Begründer der Trigonometrie kam deshalb auf den nahe liegenden Gedanken: auch den Begriff des *cosinus* zu erweitern und auf stumpfe Winkel auszudehnen, nämlich: der *cosinus* eines stumpfen Winkels ist an Gröſse gleich dem *cosinus* des Nebenwinkels, aber negativ. Es ist also (s. letzte Fig.) *cos* ABC = — *cos* ABD.

31.

Mit dieser Erweiterung des Begriffs *cosinus* umfaſst also die vorhin aufgestellte Formel: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, beide Fälle, der Winkel B möge spitz oder stumpf sein. Giebt die Formel ein positives Resultat, so schlägt man den dazu gehörigen spitzen Winkel unmittelbar in den Tafeln auf. Giebt die Formel ein negatives Resultat, so sehe man es vorläufig als positiv an, suche den dazu gehörigen spitzen Winkel in den Tafeln und subtrahiere denselben von 180°.

32.

Es folgt hieraus zugleich, daſs es nicht nötig war, auch die stumpfen Winkel in die Tafeln aufzunehmen, indem diese durch ihre Nebenwinkel bestimmt sind, und da nach Ableitung

*) Vergleiche wegen dieses, für den Anfänger schwierigen Punktes, Lübsens Arithmetik (und Algebra) § 144.

und Festsetzung der Begriffe die *sinus* zweier Nebenwinkel vollkommen gleich sind und ebenso die *cosinus* zweier Nebenwinkel gleich grofs und nur entgegengesetzt sind, so folgt, dafs man auch mit Hilfe der Tafeln den *cosinus* eines stumpfen Winkels findet, indem man ihn nur von seinem spitzen Nebenwinkel, aber mit dem *Minus*-Zeichen (negativ) nimmt. Denn nach § 30 ist $\cos \angle ABC = -\cos \angle ABD$ (s. zweite Fig. des § 30), d. i. $\cos (180^0 - \angle ABD) = -\cos \angle ABD$, oder

$$\cos (180^0 - a) = -\cos a.$$

Ferner geht $\cos \angle ABC = -\cos \angle ABD$ über in $\cos \angle ABC = -\cos (180^0 - \angle ABC)$, oder

$$\cos a = -\cos (180^0 - a).$$

Z. B.: $\cos 120^0 = -\cos (180^0 - 120^0) = -\cos 60^0$.

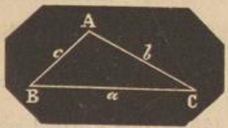
$\cos 171^0\, 23' = -\cos (180^0 - 171^0\, 23') = -\cos 8^0\, 37'$.

Setzt man in der letzten Formel $a = 90^0 + b$, so entsteht $\cos (90^0 + b) = -\cos [180^0 - (90^0 + b)]$, d. i. $\cos (90^0 + b) = -\cos (90^0 - b)$ oder

$$\cos (90^0 + b) = -\sin b.$$

Z. B.: $\cos 125^0\, 46' = \cos (90^0 + 35^0\, 46') = -\sin 35^0\, 46'$. (Vergl. den Zusatz zu § 21.)

33.



Aufgabe. Es sind alle drei Seiten eines Dreiecks gegeben: z. B. $a = 13$, $b = 10$, $c = 7$. Man sucht die Winkel.

Auflösung. Nach § 30 hat man:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{169 + 49 - 100}{2 \cdot 13 \cdot 7} \text{ oder:}$$

$$\cos B = \frac{118}{182} \qquad \begin{aligned} \log 118 &= 2{,}0718820 \\ \log 182 &= 2{,}2600714 \\ \hline \log \cos B &= 9{,}8118106 - 10 \\ B &= 49^0\, 34'\, 57'',3 \end{aligned}$$

Ebenso hat man § 30:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{169 + 100 - 49}{2 \cdot 13 \cdot 10} \text{ oder:}$$

$$\cos C = \frac{220}{260} \qquad \begin{aligned} \log 220 &= 2{,}3424227 \\ \log 260 &= 2{,}4149733 \\ \hline \log \cos C &= 9{,}9274494 - 10 \\ C &= 32^0\, 12'\, 15'',1. \end{aligned}$$

Ferner § 30:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{100 + 49 - 169}{2 \cdot 10 \cdot 7}$$

$\cos A = -\frac{20}{140}$. Vergleicht man diese Gleichung mit $\cos(180^0 - a) = -\cos a$ (s. § 32), so ist $A = 180^0 - a$, wenn $\frac{20}{140} = \cos a$. Folglich sucht man aus $\cos a = \frac{20}{140}$ den Winkel a und findet alsdann $A = 180^0 - a$.

$$\begin{aligned} lg\ 20 &= 1{,}3010300 \\ lg\ 140 &= 2{,}1461280 \\ \hline lg\ \cos a &= 9{,}1549020 - 10 \\ a &= 81^0\,47'\,12'',4 \\ A &= 180^0 - 81^0\,47'\,12'',4 \\ &= 98^0\,12'\,47'',6 \end{aligned}$$

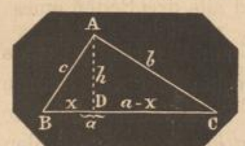
Die Winkel sind also

$$\begin{aligned} A &= 98^0\,12'\,47'',6 \\ B &= 49^0\,34'\,57'',3 \\ C &= 32^0\,12'\,15'',1 \\ \hline A+B+C &= 180^0. \end{aligned}$$

34.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei gegebenen Seiten a, b, c eines Dreiecks den Flächeninhalt F desselben berechnen kann.

Auflösung. Obgleich diese Aufgabe in jedem Lehrbuche der Elementar-Geometrie schon vorkommt, so darf sie doch hier bei der Berechnung der verschiedenen Teile des Dreiecks nicht fehlen.



Setzt man die erst zu findende unbekannte Höhe des Dreiecks AD $= h$ und BD $=$ x, so ist:

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x)$$

und wenn man hierin den § 30 für x gefundenen Ausdruck $\left(x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$ substituiert:

$$h^2 = \left(c + \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2a}\right)\left(c - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2a}\right)$$

$$h^2 = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}$$

$$h^2 = \frac{(a + c)^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - (a - c)^2}{2a}$$

$$h^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)}{4a^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}}{2a}$$

Multipliziert man diesen für die Höhe gefundenen Ausdruck mit der halben Grundlinie $\left(\frac{a}{2}\right)$, so erhält man die merkwürdige und wichtige Formel für den Flächeninhalt, nämlich:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Um sie für die numerische Rechnung noch etwas bequemer zu formen, setze man die Summe der drei Seiten $= s$, nämlich:

$$a+b+c = s = 2 \cdot \tfrac{1}{2}s, \text{ mithin:}$$
$$a+b-c = 2 \cdot \tfrac{1}{2}s - 2c = 2\left(\tfrac{1}{2}s - c\right)$$
$$a+c-b = 2\left(\tfrac{1}{2}s - b\right)$$
$$b+c-a = 2\left(\tfrac{1}{2}s - a\right).$$

Dies in obige Formel substituiert, kommt:

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}s\left(\tfrac{1}{2}s - a\right)\left(\tfrac{1}{2}s - b\right)\left(\tfrac{1}{2}s - c\right)}.$$

Es sei z. B.:

Gegeben:	so ist:	Logarithmen:
$a = 13$ m	$\tfrac{1}{2}s = 15$	1,1760913
$b = 10$	$\tfrac{1}{2}s - a = 2$	0,3010300
$c = 7$	$\tfrac{1}{2}s - b = 5$	0,6989700
$s = 30$	$\tfrac{1}{2}s - c = 8$	0,9030900
		3,0791813 : 2
	log F =	1,5395906
	F =	34,641 □m.

35.

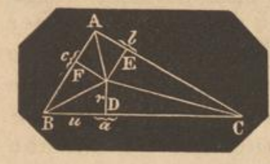
Obgleich die § 30 entwickelte Formel zur Berechnung eines Winkels aus den drei Seiten eines Dreiecks, der sogenannte *Cosinus*-Satz, theoretisch wichtig ist, so ist sie doch für die logarithmische Rechnung, wenn die Seiten durch große Zahlen gegeben sind, sehr unbequem, und wir wollen deshalb, für diesen rein praktischen Zweck, noch eine besondere, für die numerische Rechnung bequemere Formel ableiten.

Denkt man sich die drei Winkel des Dreiecks halbiert, vom gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Halbierungslinien Perpendikel auf die drei Seiten gefällt, und bezeichnet diese gleichen Perpendikel mit r (Geometrie § 76), den als bekannt anzusehenden Flächeninhalt mit F, so hat man:

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = F, \text{ woraus:}$$

$$r = \frac{2F}{a+b+c}.$$

Setzt man noch BD $= u$, so ist (weil BF $=$ BD, AF $=$ AE und CE $=$ CD, also CD $+$ AF $=$ AC $= b$):



$$2u + 2b = a + b + c, \text{ hieraus:}$$

$$u = \frac{a + c - b}{2}.$$

Nun ist $tg\,\frac{1}{2}\mathrm{B} = \frac{r}{u} = \frac{2\mathrm{F}}{a+b+c} \cdot \frac{2}{a+c-b}$. Hierin für F seinen Wert aus vorhergehendem Paragraph gesetzt:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{(a+b+c)(a+c-b)}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{(a+b+c)^2(a+c-b)^2}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \sqrt{\frac{(a+b-c)}{(a+b+c)}\,\frac{(b+c-a)}{(a+c-b)}}$$

Oder, wenn man Kürze halber wieder, wie in § 34, $a + b + c = s$ setzt:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{B} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - c)}{\frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s - b)}}.$$

Beispiel. Es sei wieder, wie in § 33:

gegeben:	so ist:	
$a = 13$	$\frac{1}{2}s \quad = 15$	$log\,(\frac{1}{2}s - a) = 0{,}3010300$
$b = 10$	$\frac{1}{2}s - a = 2$	$log\,(\frac{1}{2}s - c) = 0{,}9030900$
$c = 7$	$\frac{1}{2}s - b = 5$	$1{,}2041200$
$s = 30$	$\frac{1}{2}s - c = 8$	$log\,\frac{1}{2}s = 1{,}1760913$
		$log\,(\frac{1}{2}s - b) = 0{,}6989700$
		$1{,}8750613$

$1{,}2041200$
$1{,}8750613$
$0{,}3290587 - 1 = 1{,}3290587 - 2$, mithin:

$log\,tg\,\frac{1}{2}\mathrm{B} = 9{,}6645293 - 10$, also $\frac{1}{2}\mathrm{B} = 24^{0}\,47'\,28'',6$ u. $\mathrm{B} = 40^{0}\,34'\,57'',2$.

Ebenso findet man die Winkel A und C aus:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)}{\frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s - a)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{C} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - b)}{\frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s - c)}}.$$

Anmerkung. Mit dem *cos* des halben Winkels wird die Berechnung noch etwas einfacher (s. u. § 63 a).

auf folgende Weise: Man setze erst 0 als Ganze und das Decimalzeichen, hänge darauf dem Zähler eine Null an und dividiere mit dem Nenner, so giebt der Quotient die Anzahl der vollen Zehntel an, welche der Bruch enthält (an dessen Stelle man aber eine Null setzen muſs, wenn der Bruch keine Zehntel enthält), dem Rest hänge man wieder eine Null an, und dividiere abermals durch den Nenner, so erhält man Hundertel, und so fahre man fort bis die Division entweder aufgeht, oder bis man so viele Decimalen bestimmt hat, als es die Genauigkeit der Rechnung verlangt. Mehr als sieben Decimalstellen sind höchst selten erforderlich. Manchmal genügen schon zwei, drei oder fünf. Die letzte Decimale pflegt man um eine Einheit zu vergröſsern, wenn die folgende eine 5 oder darüber ist. Wollte man von dem Bruche 0,8468 nur die drei ersten Decimalstellen beibehalten, so würde 0,847 den wahren Wert genauer darstellen als 0,846, ersterer ist nur um $\frac{2}{10000}$ zu groſs, letzterer aber um $\frac{8}{10000}$ zu klein. Läſst sich der Nenner des in einen Decimalbruch umzuformenden Bruchs in die einfachen Faktoren 2 und 5 auflösen, wie $\frac{3}{8} = \frac{3}{2.2.2}$; $\frac{3}{20} = \frac{3}{2.2.5}$ &c., so muſs die Division, wenn man sie soweit treiben wollte, jedesmal ein Ende nehmen; läſst sich aber der Nenner nicht in die einfachen Faktoren 2 und 5 auflösen, wie $\frac{5}{6} = \frac{5}{2.3}$; $\frac{4}{15} = \frac{4}{3.5}$ &c., so kann die Division auch niemals aufgehen (317). Beispiele:

$$\tfrac{3}{16} = 0{,}1875;\ \tfrac{7}{8} = 0{,}875;\ \tfrac{6}{2117} = 0{,}0028\ldots$$

Man sage nämlich: 16 in 3 Ganze giebt 0 Ganze, 16 in 30 Zehntel giebt 1 Zehntel und 14 als Rest, 16 in 140 Hundertel giebt 8 Hundertel &c.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen, denn ob man z. B. nach (§ 48) Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{16}$ erst mit einer Rangzahl multipliziert, und dann wieder durch den alten Nenner abkürzt und den dadurch entstehenden Bruch nach (§ 51) ohne Nenner schreibt, oder ob man dem Zähler die Nullen nach und nach anhängt, das ist einerlei. Man hat z. B.

$$\tfrac{3}{16} = \frac{3000}{16.1000} = \frac{187\tfrac{8}{16}}{1000} = 0{,}187.$$

Anmerkungen. 1) Ist der umzuformende Bruch unecht, so muſs man natürlich erst die Ganzen herausziehen und diese statt der Null vor das Decimalzeichen setzen, z. B. $\frac{21}{8} = 2{,}625$; $2\frac{3}{4} = 2{,}75$ &c.

2) Wenn man einem Decimalbruch rechts noch beliebig viele Nullen anhängt, so wird dadurch der Wert desselben nicht geändert, indem dies ebenso gleichgültig ist, als wenn man einer ganzen Zahl noch Nullen vorsetzt. So ist z. B. $0{,}54 = 0{,}540 = 0{,}5400$ &c. Man kann also, wenn es die Gleichförmigkeit fordert, mehreren Decimalbrüchen durch angehängte Nullen leicht gleich viele Decimalstellen geben, d. h. sie gleichnamig machen.

3) Wenn beim Verwandeln eines gewöhnlichen Bruchs in einen Decimalbruch die Division kein Ende nimmt, so müssen, wenn die Divison weit genug getrieben wird, notwendig einige Decimalstellen immer in derselben

Auflösung. Die Rechnung wird am leichtesten, wenn man erst die beiden andern Winkel A, B, und dann die dritte Seite sucht. Der eben bewiesene Satz (§ 36) giebt uns:

$$tg\,\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot tg\,\frac{A+B}{2}.$$

Nach dieser Formel findet man, da $\frac{A+B}{2}=\frac{180^0-C}{2}$ bekannt ist, $\frac{A-B}{2}$ dann aus der halben Summe und halben Differenz, die Winkel A und B selbst. Es ist nämlich:

$$\frac{A+B}{2}=90-\tfrac{1}{2}C=35^0\,23'\,6''; \; a+b=51612{,}06; \; a-b=9389{,}28$$

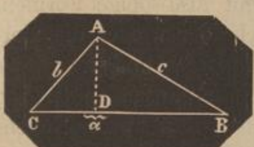
$$\begin{array}{rl} log\,tg\,\frac{A+B}{2} & =9{,}8514229-10 \\ log\,(a-b) & =3{,}9726323 \\ \hline & 3{,}8240552 \\ log\,(a+b) & =4{,}7127512 \\ \hline log\,tg\,\frac{A-B}{2} & =9{,}1113040-10 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \frac{A}{2}+\frac{B}{2} & =35^0\,23'\,\;6'' \\ \frac{A}{2}-\frac{B}{2} & =\;\;7^0\,21'\,45'' \\ \hline A & =42^0\,44'\,51'' \\ B & =28^0\;\;1'\,21''. \end{array}$$

Die Seite c findet man jetzt nach dem *Sinus*-Satz:

$$\frac{c}{a}=\frac{sin\,C}{sin\,A} \qquad c=\frac{a\,sin\,C}{sin\,A}$$

$$\begin{array}{rl} log\,sin\,C & =9{,}9750658-10 \\ log\,a & =4{,}4843094 \\ \hline & 4{,}4593752 \\ log\,sin\,A & =9{,}8317217-10 \\ \hline log\,c & =4{,}6276535 \\ c & =42428{,}08. \end{array}$$

38 a.



Will man aus zwei Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel C die übrigen Stücke direkt berechnen, so kann man dies zwar auch, aber die Formeln fallen für die numerische Rechnung sehr unbequem aus, weshalb man sie auch in der Regel nicht anwendet, sondern wie in § 37 verfährt.

1) Zur direkten Bestimmung der Seite c folgt aus dem *Cosinus*-Satz (§ 30), $cos\,C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, folglich

$$2ab\cdot cos\,C=a^2+b^2-c^2,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot cos\,C \text{ und daher}$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\,cos\,C}.$$

Zu berücksichtigen ist, daſs das Glied $2ab\ cos\ C$ für einen stumpfen Winkel C nicht subtrahiert, sondern addiert wird, weil der *cos* eines solchen Winkels negativ ist (s. §§ 30 u. 32). Wäre daher $C = 90^0 + \gamma$, so ist $-2ab \cdot cos\ C = -2ab \cdot cos\ (90^0 + \gamma) = -2ab \cdot (-sin\ \gamma)$ [s. § 32] $= + 2ab\ sin\ \gamma$, oder es ist

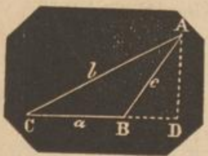
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\ sin\ \gamma}.$$

2) Zur Bestimmung des Winkels B aus 2 Seiten a, b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel C hat man (das Perpendikel AD gefällt), $tg\ B = \frac{AD}{BD}$ oder, da $AD = b\ sin\ C$ und $CD = b\ cos\ C$, also $BD = a - b \cdot cos\ C$

$$tg\ B = \frac{b\ sin\ C}{a - b\ cos\ C}$$

$$\text{oder: } cot\ B = \frac{a - b\ cos\ C}{b\ sin\ C},$$

wobei wieder das Vorzeichen von *cos* C zu beachten ist. Wäre



der zu bestimmende Winkel B stumpf, so fällt das Perpendikel AD auſserhalb des Dreiecks. In diesem Falle ist dann $CD > a$, d. i. $b\ cos\ C > a$ und deshalb in obigen Formeln die Gröſse: $a - b\ cos\ C = BD$, in sich negativ. Nimmt man aber, während der Rechnung, BD als positiv, so geben die obigen Formeln die *tang* und *cot* des Nebenwinkels, durch dessen Subtraktion von 180° man den gesuchten stumpfen Winkel B hat. Damit also obige Formeln beide Fälle zugleich umfassen, dringt sich hier wieder die Notwendigkeit auf, auch die Begriffe der *tangente* und *cotangente* zu erweitern und auch auf stumpfe Winkel auszudehnen, so daſs also die *tangenten* und ebenso die *cotangenten* zweier Nebenwinkel an Gröſse vollkommen gleich, aber entgegengesetzt, nämlich von stumpfen Winkeln negativ sind. Es ist z. B. $tg\ 120^0 = - tg\ 60^0$; $cot\ 120^0 = - cot\ 60$. Allgemein, wenn a irgend einen Winkel bedeutet:

$tg\ (180^0 - a) = - tg\ a$ $\qquad$ $cot\ (180^0 - a) = - tg\ a$

oder $tg\ a = - tg\ (180^0 - a)$ $\qquad$ $cot\ a = - cot\ (180^0 - a)$

und wenn man $a = 90^0 + b$ setzt (vergl. § 32):

$tg\ (90^0 + b) = - cot\ b$ $\qquad$ $cot\ (90^0 + b) = - tg\ b.$

38 b.

Um aus 2 Seiten b und c (s. die beiden Fig. zu § 27) und einem Gegenwinkel C die 3. Seite $BC = a$ unmittelbar zu finden, fälle man das Perpendikel AD, welches entweder innerhalb oder aufserhalb des Dreiecks fällt. In beiden Fällen (s. die beiden Figuren) ist

$$\frac{CD}{b} = \cos C, \qquad \frac{AD}{b} = \sin C,$$

$$\text{folglich} \quad CD = b \cos C, \qquad AD = b \sin C.$$

$$\text{Ferner} \quad BD = \sqrt{c^2 - AD^2} = \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C}.$$

Für die 1. Figur ist nun $a = CD + BD$,
für die 2. Figur $a = CD - BD$.

Beide für a gefundenen Formeln lassen sich mithin schreiben:

$$✽ \quad a = CD \pm BD = b \cos C \pm \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C}.$$

Beide Auflösungen sind möglich, wenn

$$\sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C} < b \cos C,$$

d. i. $c^2 - b^2 \sin^2 C < b^2 \cos^2 C$,

$$c^2 < b^2 \sin^2 C + b^2 \cos^2 C,$$

$$c^2 < b^2 (\sin^2 C + \cos^2 C),$$

$$c^2 < b^2 \cdot 1,$$

also wenn $c < b$.

Nur 1 Auflösung (mit der positiv genommenen Wurzel) ist möglich, wenn

$$\sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C} > b \cos C,$$

also wenn $c > b$.

(Die Ableitung wie auf der linken Seite.)

38 c.

Um den Flächeninhalt aus 2 Seiten a und b und dem von diesen eingeschlossenen Winkel C zu berechnen (s. 1. Fig. des § 38 a), findet man zunächst Höhe $AD = b \sin C$ und dann

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{a \cdot b \sin C}{2}, \text{ oder}$$

der Flächeninhalt ist das halbe Produkt aus 2 Seiten und dem *sinus* des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Aufgabe. Es sei $b = 67$ Meter, $c = 89$ Meter, $\angle A = 123^0\, 45'$. Wie grofs ist der Flächeninhalt?

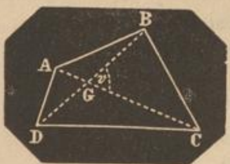
Auflösung. Nach vorstehendem Satze ist der

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{67 \cdot 89 \cdot \sin 123^0\, 45'}{2} = 2981{,}5 \sin (90^0 + 33^0\, 45')$$

$$= 2981{,}5 \cos 33^0\, 45' \text{ (s. § 32)} = 2479{,}027 \,\square\text{m}.$$

Hiermit ist die eigentliche ebene Trigonometrie, welche nur die Regeln verlangte, aus gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreiecks, die dadurch bestimmten, nicht durch Zeichnung, sondern durch Rechnung zu finden, im allgemeinen entwickelt. Es fehlen nur noch 2 in besondern Fällen anwendbare Sätze (§ 63 a, I und II).

39.



Aufgabe. Es sind die beiden Diagonalen eines Vierecks gegeben AC $= d$, BD $= d'$, sowie der Winkel v, den sie miteinander bilden; man soll hieraus den Flächeninhalt des Vierecks bestimmen.

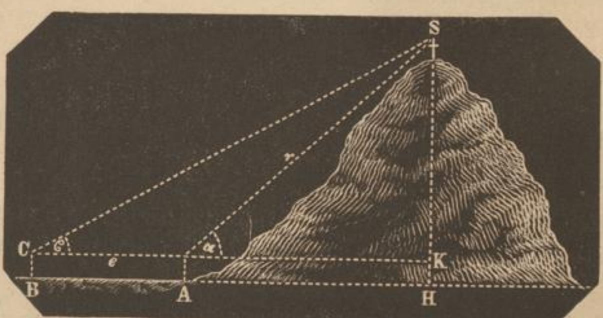
Auflösung. Denkt man von B und D auf AC $= d$ die Perpendikel p und p′ gefällt, so ist erstlich $p = BG \sin v$ und $p' = DG \cdot \sin v$, mithin $F = \frac{1}{2}d \cdot \overline{BG} \sin v + \frac{1}{2}d \cdot \overline{DG} \sin v$ und hieraus, weil $BG + DG = d'$:

$$F = \tfrac{1}{2}dd' \sin v.$$

40 a.

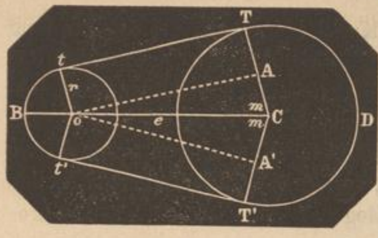
Aufgabe. Die Höhe $SH = h$ eines Turmes (Berges) zu bestimmen.

Auflösung. Man messe zuerst eine horizontale Standlinie $\overline{AB} = e$, und dann mittelst eines Winkelmessers, dessen



Limbus vertikal gestellt werden kann, die beiden Winkel α und β, dann ist der Winkel bei $S = \alpha - \beta$, und man hat zuerst aus $\frac{r}{e} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$, $r = \frac{e \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$, dann $SK = r \sin\alpha = \frac{e \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$, wozu nun noch die Höhe BC des Instruments addiert werden mufs.

40 b.



Aufgabe. Es sind die Radien zweier Rollen gegeben, $R = 3$ m, $r = 1$ m, sowie der Abstand ihrer Mittelpunkte $CO = e = 6$ m. Man sucht die erforderliche Länge l eines darum zu legenden Riemens.

Auflösung. Weil der Riemen in den Endpunkten der beiden umschlungenen Bögen die Rollen berührt, so sind die Winkel bei T, t rechte. Zieht man $OA \parallel tT$, so ist $CA = R - r$ und man hat zur Bestimmung des unbekannten Winkels m:

$$\cos m = \frac{AC}{CO} = \frac{R-r}{e}, \text{ woraus } m = 70^0\,31'\,43'',6$$

$$\text{oder } m = 70^0{,}52878.$$

Da nun $\angle tOB = m$, $tBt' = 2m$ und

$360^0 : \angle tBt' =$ Umfang des Kreises O : Bog. tBt', d. i.

$360^0 : 2m = 2\pi r :$ Bog. tBt', so ist

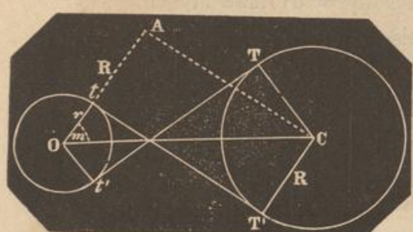
Bog. $tBt' = \frac{\pi r m}{90^0}$, der entsprechende Bog. $TT' = \frac{\pi R m}{90^0}$, daher

Bog. $TDT' = 2\pi R - \frac{\pi R m}{90}$, ferner

$$Tt = OA = e \sin m, \text{ folglich}$$

$$l = 2e \sin m + \frac{\pi r m}{90} + 2\pi R - \frac{Rm}{90}, \text{ oder}$$

$$l = 2e \sin m + \pi \left[2R - \frac{m}{90}(R - r)\right] = 25{,}24 \text{ Meter.}$$



Findet eine Kreuzung des Riemens statt, so ist offenbar:

$$\cos m = \frac{OA}{OC} = \frac{R+r}{e}$$

$$m = 48^0\,11'\,23''$$

$$l = 2e \sin m + \pi \left[2(R + r) - \frac{m}{90}(R + r)\right], \text{ oder}$$

$$l = 2e \sin m + \pi (R + r)\left(2 - \frac{m}{90}\right) = 27{,}35 \text{ Meter.}$$

40 c.

Aufgabe. Die Erde, als Kugel betrachtet, sei der Umfang eines gröfsten Kreises (Äquators) = 5400 Meilen, mithin der Radius desselben $r = 859{,}4367$ Meilen (6377390 Meter) und ein Bogen von einem Grade = 15 Meilen (1 Meile = 7420,44 Meter). Wie lang ist hiernach die Sehne c eines Bogens von einem Grade und die mit der Sehne parallele, zwischen den verlängerten Radien enthaltene Tangente T dieses Bogens?

Auflösung. Man findet leicht:

$$c = 2r \sin 30' = 14{,}99981 \text{ Meilen} = 111305{,}2 \text{ Meter},$$
$$T = 2r \operatorname{tg} 30' = 15{,}00038 \text{ Meilen} = 111309{,}2 \text{ Meter}.$$

Es ist mithin die Sehne nur um 1,4 Meter kürzer und die Tangente nur um 2,6 Meter länger, als der Bogen. Dies zeigt, dafs man in vielen Fällen bedeutende Stücke von der Erdoberfläche als eben betrachten kann.

40 d.

Aufgabe. Wie grofs ist der Radius r' eines Parallelkreises, dessen geographische Breite $b = 53^{\circ}$, und wie grofs ist die Länge s eines Grades dieses Parallelkreises, wenn der Radius des Äquators $r = 859{,}4367$ Meilen, ein Grad des Äquators also = 15 Meilen?

Auflösung. In der Fig. zu § 7 bedeute A den Äquator, B den Pol, $\alpha = 53^{0}$ geogr. Breite, dann ist QM = CP der Radius r' des Parallelkreises. Da nun

$$CP = CM \cos \alpha, \text{ so ist}$$
$$r' = 859{,}4367 \cdot \cos 53^{0} = 517{,}222 \text{ Meilen}.$$

Der Umfang des Parallelkreises (dessen Rad. = QM) ist $= 2\pi r'$, daher ein Grad desselben

$$s = \frac{2\pi r'}{360} = \frac{\pi}{180} \cdot r' = 9{,}027225 \text{ Meilen}.$$

Fünftes Buch.

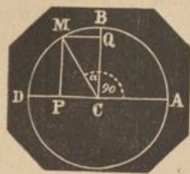
Goniometrie.

41.

Jede mathematische Wissenschaft enthält schon in sich, und ohne daſs die ersten Begründer derselben sie absichtlich hineingelegt hätten, die Keime zu einer neuen, und dies ist der Grund, weshalb die mathematischen Wissenschaften niemals zum eigentlichen Schlusse kommen, sondern immerfort wachsen. Der erste Begründer der Trigonometrie hatte die trigonometrischen Funktionen *sin*, *cos* etc. ursprünglich nur zu dem Zwecke berechnet, um durch ihre Vermittelung die in den beiden vorhergehenden Büchern aufgestellten trigonometrischen Probleme zu lösen, welches auch nach den dort gegebenen allgemeinen Regeln vollkommen geschehen ist.

Es konnte nun aber wohl nicht lange unbemerkt bleiben, daſs unter den trigonom. Funktionen eines oder auch mehrerer Winkel merkwürdige Beziehungen stattfinden, deren Kenntnis nicht allein die eigentliche Trigonometrie unterstützt und erleichtert, sondern auch in anderen, namentlich höheren Teilen der Mathematik, ja selbst bei rein arithmetischen Untersuchungen von groſser Wichtigkeit ist. Der Inbegriff dieser Beziehungen oder Formeln bildet für sich einen eigenen Teil der Trigonometrie, welchen man, wie schon § 2 bemerkt worden ist, Goniometrie nennt, und wir wollen nun die praktisch wichtigsten Sätze derselben, welche das Bedürfnis nach und nach zu entdecken genötigt hat, hier erst einzeln mitteilen und sie dann, zur leichtern Übersicht und Nachschlagung, in § 100 zusammenstellen. Um Gewandtheit in den vielfachen Anwendungen der Goniometrie zu erlangen, ist es durchaus erforderlich, die mit einem Sternchen bezeichneten Formeln auswendig zu wissen.

42.

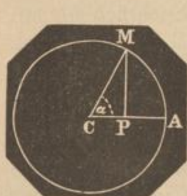


Es sei ein stumpfer Winkel MCA $= 90 + a$, dann ist, CM $= 1$ gesetzt, MP $= \sin(90 + a)$ (§ 7) und CP negativ genommen, $= \cos(90 + a)$ (§ 32), da aber MP $=$ CQ und (für CM $= 1$), CQ $= \cos a$, ferner CP $=$ MQ und MQ $= \sin a$, so haben wir hier die zwei in der Folge als Beweismittel dienenden kleinen Formeln:

$$\sin(90 + a) = \cos a$$
$$\cos(90 + a) = -\sin a.$$

Anmerkung. Auf den Nutzen dieser praktischen Formeln ist schon am Schlusse der §§ 21 u. 32 hingewiesen worden.

43.



Lehrsatz. Bedeutet a einen beliebigen Winkel, spitz oder stumpf, so finden unter seinen trigonometrischen Funktionen folgende vier wichtige Beziehungen statt. Es ist nämlich immer:*)

$$* \; 1) \; \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad * \; 3) \; \frac{\sin a}{\cos a} = tg\, a$$

$$* \; 2) \; tg\, a \cdot \cot a = 1 \qquad * \; 4) \; \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a.$$

Beweis. Es ist:

$$\sin a = \frac{MP}{CM}, \text{ also } \sin^2 a = \frac{MP^2}{CM^2} \cdots\cdots (1)$$

$$\cos a = \frac{CP}{CM}, \text{ also } \cos^2 a = \frac{CP^2}{CM^2} \cdots\cdots (2).$$

Beide Ausdrücke (1) und (2) addiert, kommt:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = \frac{MP^2}{CM^2} + \frac{CP^2}{CM^2} = \frac{MP^2 + CP^2}{CM^2} = \frac{CM^2}{CM^2} = 1.$$

$$\text{Ferner: } \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{MP}{CM} : \frac{CP}{CM} = \frac{MP}{CP} = tg\, a \; (\S\ 2),$$

$$\text{ebenso: } \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{CP}{CM} : \frac{MP}{CM} = \frac{CP}{MP} = \cot a.$$

---

*) Statt $\sin a \cdot \sin a = (\sin a)^2$ schreibt man $\sin^2 a$.

Aus den beiden letztern Formeln $tg\, a = \frac{sin\, a}{cos\, a}$ und $cot\, a = \frac{cos\, a}{sin\, a}$ folgt durch Multiplikation derselben $tg\, a \cdot cot\, a = \frac{sin\, a}{cos\, a} \cdot \frac{cos\, a}{sin\, a} = 1$. Nimmt man CM = 1, so ist schon MP der *sinus* und CP der *cosinus* von a, und man kann dann die drei zuerst bewiesenen Formeln unmittelbar aus der Figur ablesen.

Anmerkung. Die im 2. Teile des § 38a enthaltene Formel $cot\, B = \frac{a}{b\, sin\, C} - \frac{b\, cos\, C}{b\, sin\, C}$ geht nun über in

$$cot\, B = \frac{a}{b\, sin\, C} - cot\, C.$$

44.

Aufgabe. Aus einer trigonometrischen Funktion eines Winkels jede der 3 übrigen zu berechnen und gewisse, die *tg* und *cot* enthaltende Ausdrücke zu vereinfachen.

Auflösung. Aus Formel 1 des § 43 folgt unmittelbar:

$$(5) \quad \begin{cases} sin^2\, a = 1 - cos^2\, a & cos^2\, a = 1 - sin^2\, a \\ sin\;\; a = \sqrt{1 - cos^2\, a} & cos\;\; a = \sqrt{1 - sin^2\, a}. \end{cases}$$

Aus Formel 2 des § 43 folgt:

$$(6) \qquad tg\, a = \frac{1}{cot\, a} \qquad\qquad cot\, a = \frac{1}{tg\, a}.$$

Anstatt mit *tg a* oder *cot a* zu multiplizieren, kann man also durch *cot a* oder *tg a* dividieren. (Vergl. die Anmerk. in § 19b.) Anstatt $tg\, x = \frac{a}{bcd}$ wird man daher auch $cot\, x = \frac{bcd}{a}$ setzen.

$$\text{Ferner ist } 1 + tg^2 a = 1 + \left(\frac{MP}{CP}\right)^2 \text{ [s. letzte Fig.]} = \frac{CP^2 + MP^2}{CP^2}$$

$$= \frac{CM^2}{CP^2} = 1 : \left(\frac{CP}{CM}\right)^2, \text{ d. i.}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 1 + tg^2 a = \frac{1}{cos^2 a} \text{ oder } \sqrt{1 + tg^2 a} = \frac{1}{cos\, a}. \text{ Folglich auch} \\ cos^2 a = \frac{1}{1 + tg^2 a} \text{ oder } cos\, a = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 a}}. \end{cases}$$

Ebenso $1 + cot^2\, a = 1 + \left(\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{MP}}\right)^2 = \frac{\mathrm{MP}^2 + \mathrm{CP}^2}{\mathrm{MP}^2} = \frac{\mathrm{CM}^2}{\mathrm{MP}^2}$

$$= 1 : \left(\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{CM}}\right)^2, \text{ d. i.}$$

$$(8) \quad \begin{cases} 1 + cot^2 a = \dfrac{1}{sin^2 a} \text{ oder } \sqrt{1 + cot^2 a} = \dfrac{1}{sin\, a}. \text{ Folglich auch} \\ sin^2\, a = \dfrac{1}{1 + cot^2\, a} \text{ oder } sin\, a = \dfrac{1}{\sqrt{1 + cot^2\, a}}. \end{cases}$$

Aus $\frac{sin\, a}{cos\, a} = tg\, a$ folgt $sin\, a = tg\, a \cdot cos\, a = tg\, a \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 a}}$ oder

$$(9) \qquad sin\, a = \frac{tg\, a}{\sqrt{1 + tg^2\, a}}.$$

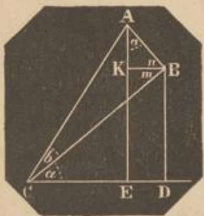
Aus $\frac{cos\, a}{sin\, a} = cot\, a$ folgt $cos\, a = cot\, a \cdot sin\, a = cot\, a \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + cot^2 a}}$ oder

$$(10) \quad cos\, a = \frac{cot\, a}{\sqrt{1 + cot^2\, a}}.$$

$$(11) \quad tg\, a = \frac{sin\, a}{cos\, a} = \frac{sin\, a}{\sqrt{1 + sin^2\, a}} \text{ oder } = \frac{\sqrt{1 - cos^2\, a}}{cos\, a}.$$

$$(12) \quad cot\, a = \frac{cos\, a}{sin\, a} = \frac{cos\, a}{\sqrt{1 - cos^2\, a}} \text{ oder } = \frac{\sqrt{1 - sin^2\, a}}{sin\, a}.$$

45.



Aufgabe. Aus den *sinus* und *cosinus* zweier Winkel, a und b, den *sinus* und *cosinus* von der Summe beider Winkel zu finden.*)

Auflösung. Man lege die beiden Winkel a, b, deren Summe wir vorläufig noch kleiner als 90^0 annehmen, an einander, so daſs $\angle \mathrm{ACD} = a + b$. Von A fälle man die beiden Perpendikel AB, AE und von B die beiden Perpendikel BD, BK, dann ist $\angle \mathrm{BAK} = \angle \mathrm{BCD} = a$ (denn $m = a$, als Wechs. Winkel, $m + n = 90^0$ und $\angle \mathrm{BAK} + n = 90^0$, also $\angle \mathrm{BAK} = m = a$). Aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck ABC folgt:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = sin\, b \text{ und } \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = cos\, b, \text{ also:}$$

$$(1)\ \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \cdot sin\, b \text{ und } (2)\ \mathrm{BC} = \mathrm{AC} \cdot cos\, b.$$

*) $sin\,(a + b)$ ist nicht zu verwechseln mit $sin\, a + sin\, b$.

Aus dem bei K rechtwinkligen Dreieck ABK folgt: $\frac{AK}{AB} = \cos a$ und $\frac{BK}{AB} = \sin a$. In beide Ausdrücke den für AB gefundenen Wert substituiert, kommt: $\frac{AK}{AC \cdot \sin b} = \cos a$ und $\frac{BK}{AC \cdot \sin b} = \sin a$, hieraus:

$\frac{AK}{AC} = \cos a \cdot \sin b \ldots\ldots (3)$ $\qquad \frac{BK}{AC} = \sin a \cdot \sin b \ldots\ldots (4).$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD hat man: $\frac{BD}{BC} = \sin a$ und $\frac{CD}{BC} = \cos a$, oder für BC den Wert aus (2) gesetzt: $\frac{BD}{AC \cdot \cos b} = \sin a$, und $\frac{CD}{AC \cdot \cos b} = \cos a$. Hieraus:

$\frac{BD}{AC} = \sin a \cdot \cos b \ldots\ldots (5)$ $\qquad \frac{CD}{AC} = \cos a \cdot \cos b \ldots\ldots (6).$

Addiert man die Gleichungen (3) und (5), so hat man: $\left(\text{weil } \frac{AK}{AC} + \frac{BD}{AC} = \frac{AK + BD}{AC} = \frac{AE}{AC} = \sin \angle ACD = \sin (a + b)\right)$

$$* \; (13) \; \sin (a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b.$$

Subtrahiert man (4) und (6), so erhält man [weil $\frac{CD}{AC} - \frac{BK}{AC} = \frac{CD - BK}{AC} = \frac{CE}{AC} = \cos (a + b)$]:

$$* \; (14) \; \cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b.$$

46.

Um zu zeigen, daſs die beiden oben gefundenen wichtigen Formeln:

$$\sin (a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \ldots\ldots (1)$$
$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \ldots\ldots (2)$$

auch für den Fall gelten, wo $a + b > 90$ ist, sei

1) $a = 90^0$, dann giebt die linke Seite der ersten Formel $\sin (90 + b) = \cos b$ (§ 42); setzt man aber auf der rechten Seite auch $a = 90$, so giebt diese, weil $\sin 90 = 1$ und $\cos 90 = 0$ (§ 7), offenbar dasselbe, nämlich $\cos b$, wie es sein muſs. Setzt man in der zweiten Formel $a = 90^0$, so geben beide Seiten dasselbe Resultat, nämlich:

$$\cos(90+b) = \cos 90 \cdot \cos b - \sin 90 \cdot \sin b$$

oder: $-\sin b = 0 \cdot \cos b - 1 \cdot \sin b$ (§ 42 und § 7)

d. i. $-\sin b = -\sin b$.

2) Seien a und b beide spitz, aber $a + b > 90^0$. Setzt man nun $a = 90 - m$, $b = 90 - n$, mithin $a + b = 180 - (m + n)$, so ist $m + n < 90$. Substituiert man statt a und b ihre Ausdrücke, $90 - m$ und $90 - n$ in die erste Formel, so erhält man linker Hand: $\sin(180 - [m+n])$ oder $\sin(m+n)$ (§ 21). Auf der rechten Seite kommt:

$$\sin(90-m) \cdot \cos(90-n) + \cos(90-m)\sin(90-n)$$
$$= \cos m \cdot \sin n + \sin m \cdot \cos n \quad (\S\ 5).$$

Dies ist aber die Entwickelung von $\sin(m+n)$, wofür, weil $m + n < 90$, die Formel giltig ist. Beide Seiten geben also dasselbe Resultat. Die Substitution in die zweite Formel giebt auf der linken Seite (§ 32):

$$\cos[180 - (m+n)] = -\cos(m+n) = -(\cos m \cdot \cos n - \sin m \cdot \sin n).$$

Die rechte Seite giebt (§ 5) $\cos(90-m) \cdot \cos(90-n) - \sin(90-m)\sin(90-n) = \sin m \cdot \sin n - \cos m \cdot \cos n$, also ganz dasselbe, wie auf der linken Seite. Linker Hand (Formel 2) ist $\cos(a+b)$ in sich negativ. Dies ist aber auch mit dem Betrage rechter Hand der Fall, weil für $a + b > 90$ auch $\cos a \cdot \cos b < \sin a \cdot \sin b$.

3) Sei $a > 90$. Setze $a = 90 + m$, dann giebt die Substitution in die erste Formel:

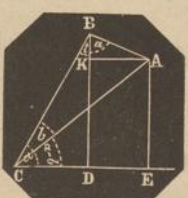
$$\sin(90+m+b) = \sin(90+m)\cos b + \cos(90+m)\sin b, \text{ oder § 42:}$$
$$\cos(m+b) = \cos m \cdot \cos b - \sin m \cdot \sin b.$$

Die zweite Formel giebt für $a = 90 + m$:

$$\cos(90+m+b) = \cos(90+m)\cos b - \sin(90+m)\sin b, \text{ oder § 42:}$$
$$-\sin(m+b) = -\sin m \cdot \cos b - \cos m \cdot \sin b$$
$$\sin(m+b) = \sin m \cdot \cos b + \cos m \cdot \sin b.$$

Wir erhalten also auch für $a > 90$ auf beiden Seiten der Formel (1) und (2) dasselbe Resultat.

47.



Um die ebenso wichtigen Formeln für die *sinus* und *cosinus* der Differenz zweier Winkel, $\sin(a-b)$ und $\cos(a-b)$, zu finden, sei $\angle BCE = a$ und $\angle BCA = b$, also $\angle ACE =$ a $- b$, ferner AB senkrecht auf BC, und BD, AE senkrecht auf CE, sowie AK senkrecht auf BD, dann ist $\angle ABK + t = \angle BCD + t = 90$, also $\angle ABK = \angle BDC = a$. Nun ist: $\frac{AB}{AC} = \sin b$ und $\frac{BC}{AC} = \cos b$, also: (I) $AB = AC \cdot \sin b$ und (II) $BC = AC \cdot \cos b$.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD hat man: $\frac{BD}{BC} = \sin a$ und $\frac{CD}{BC} = \cos a$, oder für BC seinen Wert aus (II) gesetzt $\frac{BD}{AC \cdot \cos b} = \sin a$ und $\frac{CD}{AC \cdot \cos b} = \cos a$, hieraus:

(III) $\frac{BD}{AC} = \sin a \cdot \cos b$ und (IV) $\frac{CD}{AC} = \cos a \cdot \cos b$.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABK hat man: $\frac{BK}{AB} = \cos a$ und $\frac{AK}{AB} = \sin a$ oder für AB seinen Wert aus (I) gesetzt, $\frac{BK}{AC \cdot \sin b} = \cos a$ und $\frac{AK}{AC \cdot \sin b} = \sin a$, hieraus:

(V) $\frac{BK}{AC} = \cos a \cdot \sin b$ und (VI) $\frac{AK}{AC} = \sin a \cdot \sin b$.

Subtrahiert man die Gleichungen (III) und (V), so erhält man, weil $\frac{BD}{AC} - \frac{BK}{AC} = \frac{BD - BK}{AC} = \frac{AE}{AC} = \sin(a - b)$

* (15) $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$.

Addiert man die Gleichungen (IV) und (VI) und bemerkt, daſs: $\frac{CD}{AC} + \frac{AK}{AC} = \frac{CD + AK}{AC} = \frac{CE}{AC} = \cos(a - b)$, so hat man:

* (16) $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$.

Die allgemeine Giltigkeit der beiden Formeln 15 und 16, für den Fall, daſs a oder beide, a und b, > 90 sind, wird wieder wie in § 46 bewiesen.

Setzt man in (15) $a = o$, so ergiebt sich:

$\sin(o - b) = o \cdot \cos b - 1 \cdot \sin b$, d. i.

(17) $\sin(-b) = -\sin b$. Oder:

Multipliziert man den Winkel eines *sinus* mit -1, so hat man das Vorzeichen des Sinus zu ändern. Daher auch

(18) $\sin(a - b) = -\sin(b - a)$.

Setzt man in (16) $a = o$, so erhält man:

$$\cos(o - b) = 1 \cdot \cos b + o \cdot \sin b, \text{ d. i.}$$

$$(19) \quad \cos(-b) = \cos(+b).$$

Der Cosinus ändert sich also nicht, wenn man den Winkel beliebig mit -1 multipliziert. Daher ist auch

$$(20) \quad \cos(a - b) = \cos(b - a).$$

48.

Die übrigen Formeln der Goniometrie kann man nun alle, ohne eine Figur nötig zu haben, aus den vorhergehenden ableiten. Dividiert man die Gleichungen 13 und 14 (§ 45) durcheinander, so hat man:

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}.$$

Dividiert man rechter Hand Zähler und Nenner durch $\cos a \cdot \cos b$ und bemerkt, dafs $\frac{\sin a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{\sin a}{\cos a} = tg\, a$, etc. (§43), so kommt:

$$* \ (21) \quad tg\,(a+b) = \frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b}{}^{*)}.$$

Auf gleiche Weise geben die Formeln 15 und 16 (§ 47):

$$* \ (22) \quad tg\,(a-b) = \frac{tg\, a - tg\, b}{1 + tg\, a \cdot tg\, b}.$$

Löst man in gleicher Weise $\frac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)}$ auf und kürzt den Bruch durch $\sin a \cdot \sin b$, so erhält man:

$$(23) \quad \cot(a+b) = \frac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot a + \cot b}.$$

Ebenso folgt aus 16 und 15:

$$(24) \quad \cot(a-b) = \frac{\cot a \cdot \cot b + 1}{\cot b - \cot a}.$$

Formel 22 geht mit $a = o$ über in

$$tg\, b = \frac{tg\, o - tg\, b}{1 + tg\, o \cdot tg\, b} \text{ und da } tg\, o = o \text{ (s. § 8):}$$

$$(25) \begin{cases} tg\,(-b) = -\,tg\, b \text{ und daher auch (vergl. 17 und 18)} \\ tg\,(a-b) = -\,tg\,(b-a). \end{cases}$$

*) Diese, sowie auch die folgenden Formeln, gelten natürlich so gut wie die, woraus sie abgeleitet, sowohl für stumpfe als spitze Winkel.

Aus (25) folgt $\frac{1}{tg\,(-b)} = \frac{1}{-\,tg\,b}$, d. i.

$$(26)\ \begin{cases} cot\,(-b) = -\,cot\,b \text{ und folglich auch} \\ cot\,(a-b) = -\,cot\,(b-a). \end{cases}$$

49.

Setzt man in den 4 Formeln 13, 14, 21 und 23 $b = a$, so erhält man:

$$*\ (27)\ \begin{cases} sin\,2a = 2\,sin\,a \cdot cos\,a \text{ und folglich auch} \\ \qquad sin\,a \cdot cos\,a = \frac{sin\,2a}{2} \\ cos\,2a = cos^2\,a - sin^2\,a \\ tg\,2a = \frac{2\,tg\,a}{1 - tg^2\,a} \\ cot\,2a = \frac{1}{2}\left(cot\,a - \frac{1}{cot\,a}\right) = \frac{1}{2}\,(cot\,a - tg\,a), \end{cases}$$

oder auch, wenn man a statt $2a$, mithin $\frac{1}{2}a$ statt a setzt:

$$*\ (28)\quad sin\,a = 2\,sin\,\tfrac{1}{2}a\,cos\,\tfrac{1}{2}a$$

$$(29)\ \begin{cases} cos\,a = cos^2\,\frac{1}{2}a - sin^2\,\frac{1}{2}a \\ tg\,a = \frac{2\,tg\,\frac{1}{2}a}{1 - tg^2\,\frac{1}{2}a} \\ cot\,a = \frac{1}{2}\,(cot\,\frac{1}{2}a - tg\,\frac{1}{2}a). \end{cases}$$

Setzt man $b = 2a$, so erhält man:

$$sin\,3a = sin\,a\,cos\,2a + cos\,a\,sin\,2a$$

oder, weil $cos\,2a = cos^2\,a - sin^2\,a = 1 - sin^2\,a - sin^2\,a = 1 - 2\,sin^2\,a$, und $sin\,2a = 2\,sin\,a \cdot cos\,a$, auch:

$$sin\,3a = sin\,a\,(1 - 2\,sin^2\,a) + cos\,a \cdot 2\,sin\,a \cdot cos\,a$$

$$sin\,3a = sin\,a - 2\,sin^3\,a + 2\,sin\,a \cdot cos^2\,a$$

$$sin\,3a = sin\,a - 2\,sin^3\,a + 2\,sin\,a\,(1 - sin^2\,a)$$

$$(30)\quad sin\,3a = sin\,a - 4\,sin^3\,a.\text{*)}$$

50.

Es ist: $\quad 1 = cos^2\,\frac{1}{2}a + sin^2\,\frac{1}{2}a$ (§ 43, 1)

und $\quad cos\,a = cos^2\,\frac{1}{2}a - sin^2\,\frac{1}{2}a$ (§ 49, 29).

Die Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen geben folgende zwei wichtige Formeln:

---

*) Die Ableitung der Formeln, welche die *sinus* und *cosinus* von höhern Vielfachen eines Winkels durch Potenzen dieser Funktionen und umgekehrt ausdrücken, gehört in die höhere Analysis.

$$* \begin{cases} (31)\ 1 + \cos a = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}a \\ (32)\ 1 - \cos a = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}a. \end{cases}$$

Aus (31) und (32) folgt $\cos^2 \frac{1}{2}a = \frac{1 + \cos a}{2}$ und $\sin^2 \frac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{2}$ oder:

$$(33) \begin{cases} \cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{1 + \cos a}{2}} \\ \sin \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{2}}. \end{cases}$$

Dividiert man (32) durch (31), so erhält man:

$$tg^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \frac{(1 - \cos a)(1 + \cos a)}{(1 + \cos a)^2} = \frac{\sin^2 a}{(1 + \cos a)^2}$$

und auch $tg^2 \frac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \frac{(1 - \cos a)^2}{(1 + \cos a)(1 - \cos a)} = \frac{(1 - \cos a)^2}{\sin^2 a}$.

(34) $tg \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$ (und dies

nach § 43) $= \frac{1}{\sin a} - \cot a$.

Aus (34) folgt $\frac{1}{tg \frac{1}{2}a} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}} = \frac{1 + \cos a}{\sin a}$ d. i. (§ 44, 6):

(35) $\cot \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{1}{\sin a} + \cot a$ (s. § 43).

$\frac{1 + \cos a}{\cos a} = \frac{1 + \cos a}{\sin a} \cdot \frac{\sin a}{\cos a}$ geht nun mit (35) über in:

$$(36)\ \frac{1 + \cos a}{\cos a} = \cot \frac{a}{2} \cdot tg\, a.$$

$\frac{1 - \cos a}{\cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a} \cdot \frac{\sin a}{\cos a}$ wird mit (34):

$$(37)\ \frac{1 - \cos a}{\cos a} = tg \frac{a}{2} \cdot tg\, a.$$

51.

Setzt man in den Formeln 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24 $a = 45^0$, und beachtet, daſs $\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $tg\, 45 = \cot 45^0 = 1$, so hat man:

$$(38)\quad \sin(45+b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b + \sin b)$$

$$(39)\quad \sin(45-b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b - \sin b)$$

$$(40)\quad \cos(45+b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b - \sin b)$$

$$(41)\quad \cos(45-b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b + \sin b)$$

$$(42)\quad tg(45+b) = \frac{1+tg\, b}{1-tg\, b}$$

$$(43)\quad tg(45-b) = \frac{1-tg\, b}{1+tg\, b}$$

$$(44)\quad \cot(45+b) = \frac{\cot b - 1}{\cot b + 1}$$

$$(45)\quad \cot(45-b) = \frac{\cot b + 1}{\cot b - 1}.$$

52.

Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

erhält man:

$$(46)\quad \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cdot \cos b$$
$$(47)\quad \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \cdot \sin b$$

oder, indem man $a+b=p$ und $a-b=q$, folglich $a=\frac{p+q}{2}$ und $b=\frac{p-q}{2}$ setzt:

$$(48)\quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$(49)\quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}.$$

Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

erhält man:

$$(50)\quad \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cdot \cos b$$
$$(51)\quad \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \cdot \sin b$$

oder, indem man wieder $a + b = p$ und $a - b = q$ setzt:

$$(52) \quad \cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$(53) \quad \cos q - \cos p = 2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}.$$

Durch diese 4 wichtigen Formeln: 48, 49, 52, 53 kann man also die Summen und Differenzen zweier *sinus* oder *cosinus* in Produkte verwandeln. Dividiert man noch (49) durch (48), so erhält man:

$$\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{\cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}}{\sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}}$$

oder, indem man rechter Hand Zähler und Nenner durch $\cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$ dividiert:

$$(54) \quad \frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{tg\, \frac{p-q}{2}}{tg\, \frac{p+q}{2}}.$$

Setzt man in Formel 48: $q = 90^0 - p$, so entsteht mit Rücksicht auf § 5:

$$\sin p + \cos p = 2 \sin \frac{p + (90^0 - p)}{2} \cos \frac{2p - 90^0}{2}$$

$$= 2 \sin 45^0 \cos (p - 45^0) \text{ oder (s. Formel 20)}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos (45^0 - p), \text{ d. i. (s. § 5):}$$

$$(55) \quad \begin{cases} \sin p + \cos p = \sqrt{2} \cdot \sin (45^0 + p). \text{ In gleicher Weise ergiebt sich aus Formel 49:} \\ \sin p - \cos p = \sqrt{2} \cdot \cos (45^0 + p). \end{cases}$$

53.

Setzt man in (48) und (49) $p = 90^0$, so ist mit Rücksicht auf § 5:

$$(56) \quad 1 + \sin q = 2 \sin (45 + \tfrac{1}{2}q) \cos (45 - \tfrac{1}{2}q) = 2 \sin^2 (45 + \tfrac{1}{2}q)$$

$$(57) \quad 1 - \sin q = 2 \cos (45 + \tfrac{1}{2}q) \sin (45 - \tfrac{1}{2}q) = 2 \cos^2 (45 + \tfrac{1}{2}q).$$

Es ist $\frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{\cos a \cos b}$, d. i.

$$(58) \quad tg\, a \pm tg\, b = \frac{\sin (a \pm b)}{\cos a \cos b}.$$

Ebenso wird aus $\frac{\cos a}{\sin a} \pm \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin b \ \cos a \pm \cos b \ \sin a}{\sin a \ \sin b}$, d. i.

$$(59) \quad \cot a \pm \cot b = \frac{\sin (b \pm a)}{\sin a \ \sin b}.$$

Mit $b = 90^0 - a$ geht 58 (1. Formel) über in

$$tg\, a + tg\, (90^0 - a) = \frac{\sin (a + 90^0 - a)}{\cos a \ \sin a} = 1 : (\cos a \ \sin a)$$

$$= 1 : \frac{\sin 2a}{2} \text{ (s. Formel 27) oder}$$

$$(60) \quad tg\, a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}.$$

Multipliziert man die letzte Formel von (27) mit 2, so erhält man:

$$(61) \quad \begin{cases} \cot a - tg\, a = 2 \cot 2a; \text{ oder} \\ tg\, a - \cot a = -2 \cot 2a. \end{cases}$$

Dividiert man in (58) die erste Formel durch die zweite, so entsteht:

$$(62) \quad \frac{tg\, a + tg\, b}{tg\, a - tg\, b} = \frac{\sin (a + b)}{\sin (a - b)}.$$

Dividiert man (55) durch $\cos p$, so entsteht:

$$(63) \quad 1 + tg\, p = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin (45^0 + p)}{\cos p} \text{ und}$$

$$(64) \quad 1 - tg\, p = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos (45^0 + p)}{\cos p}.$$

(55) durch $\sin p$ dividiert, giebt:

$$(65) \quad 1 + \cot p = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin (45^0 + p)}{\sin p}$$

$$(66) \quad 1 - \cot p = - \frac{\sqrt{2} \cdot \cos (45^0 + p)}{\sin p}.$$

Nach Formel 61 ist

$$tg\, a\, (\cot a - tg\, a) = tg\, a \cdot 2 \cot 2a, \text{ d. i.}$$

$$tg\, a \cdot \cot a - tg^2\, a = 2\, tg\, a \cot 2a, \text{ oder}$$

$$(67) \quad 1 - tg^2\, a = 2\, tg\, a \cot 2a.$$

In gleicher Weise:

$$\cot a\, (tg\, a - \cot a) = \cot a \cdot (-2 \cot 2a), \text{ oder}$$

$$(68) \quad 1 - \cot^2 a = -2 \cot a \ \cot 2a.$$

Durch ähnliche Kombinationen könnte man solcher goniometrischen Formeln leicht noch mehrere finden, wir glauben jedoch an vorstehenden vollkommen genug zu haben.

Sechstes Buch.

Ausdehnung der Begriffe *sinus, cosinus* etc. auf überstumpfe und negative Winkel.

54.

Die vielfache Anwendung, welche die Goniometrie in der höheren und angewandten Mathematik findet, hat es notwendig gemacht, die Begriffe der trigonometrischen Funktionen auch auf überstumpfe Winkel oder eigentlich auf beliebig grofse Kreisbögen, ja selbst auf mehrere ganze Umläufe eines Kreises auszudehnen, und obgleich wir hier, sowie im Vorhergehenden (§§ 21 und 30), die Notwendigkeit dieser Begriffserweiterung nach und nach herbeiführen und fühlbar machen könnten und beim mündlichen Unterricht auch thun würden, so können und wollen wir hier doch, Kürze halber, die bisher befolgte heuristische Methode verlassen, weil der Anfänger jetzt darauf vorbereitet ist, und wir an geeigneter Stelle auf die Notwendigkeit der Begriffserweiterung aufmerksam machen werden.

Die in Frage kommenden Winkel zeigt nebenstehende Figur. Der Punkt A bedeute den Nullpunkt, Punkt D $= 90^0$, B $= 180^0$, E $= 270^0$ und schreitet man so fort, so gelangt man zu A $= 360^0$, D $= 450^0$ u. s. w. Man unterscheidet daher 4 Quadranten: der erste von A bis D (0 bis 90^0), der zweite von D bis B (90^0 bis 180^0), der dritte von B bis E (180^0 bis 270^0), der vierte von E bis A (270^0 bis 360^0). Da der Bogen die Gröfse des Winkels bestimmt, so wird $\angle$ ACM durch den Bogen AM, $\angle$ ACD ($= 90^0$) durch den Bogen AD, der überstumpfe $\angle$ ACM'' durch den über D gehenden Bogen AM'' u. s. w. bestimmt. Der eine Schenkel des zu messenden Winkels ist also unveränderlich CA, der andere (CM oder CD, CM′, CM″....) bestimmt die Gröſse des Winkels. Wir unterscheiden daher für jeden gegebenen Winkel einen unbeweglichen Schenkel (CA) und einen beweglichen (CM, CD...).

Setzt man den Radius CM = CA = 1, so ist, wie schon bekannt, MP der *sinus*, CP der *cosinus* des ∠ ACM. Ferner ist M′P′ der *sin* des stumpfen Winkels ACM′ (siehe § 22), CP′ der *cos* des ∠ ACM′ (s. § 30).

Die beiden sich rechtwinklig schneidenden Durchmesser AB und DE sind mithin für die Bestimmung des *sin* und *cos* wesentlich, denn die *sinus* MP und M′P′ sind Senkrechte auf jenen (AB), die *cos* PC und P′C Senkrechte auf letzteren (DE). Den 0^0 und 180^0 verbindenden Durchmesser AB nennt man die Hauptachse (Abscissenachse), den 90^0 und 270^0 verbindenden Durchmesser: Nebenachse (Ordinatenachse).

Es ist mithin der *sinus* die vom Endpunkte des beweglichen Schenkels auf die Hauptachse gefällte Senkrechte (oder, wenn AC nicht = 1: die vom Endpunkte des beweglichen Schenkels auf die Hauptachse gefällte Senkrechte dividiert durch den Radius). Z. B.:

$$\sin \angle ACM = MP \text{ (denn } \frac{MP}{CM} = \frac{MP}{1} = MP);$$
$$\sin \angle ACM' = M'P'.$$

Der bewegliche Schenkel des überstumpfen Winkels ACM″ ist CM″, der Endpunkt desselben (in der Peripherie): M″, die von diesem auf die Hauptachse gefällte Senkrechte: M″P′, folglich

$$\sin \angle ACM'' = M''P'.$$

Ebenso: *sin* des überstumpfen ∠ ACM‴ = M‴P.

Die trigonometrischen Funktionen der Winkel von 0 bis 90^0 (z. B. MP als *sin*, PC als *cos*) sind selbstverständlich positiv. Da nun für die Sinus zweierlei Senkrechte in Betracht kommen: die Senkrechten oberhalb der Hauptachse (z. B. MP) und die Senkrechten unterhalb der Hauptachse (z. B. M″P′), letztere aber den ersteren entgegengesetzt liegen, so müssen letztere (M″P′, M‴P) negativ sein, weil MP (und mithin auch M′P′) positiv ist. Oder:

Die Sinus des 1. und 2. Quadrant (MP, M′P′) sind positiv,
„ „ „ 3. „ 4. „ (M″P′, M‴P) „ negativ.

Da die Senkrechten (PC, P′C) auf die Nebenachse DE die Cosinus vorstellen und der *sin* des überstumpfen Winkels ACM″ = M″P′ ist, so ist P′C der *cos* des überstumpfen Winkels ACM″. Ebenso ist der *cos* des überstumpfen Winkels ACM‴ = PC.

Die auf DE senkrecht stehenden Linien PC und P′C liegen entgegengesetzt, folglich ist die dem positiven PC entgegengesetzte P′C negativ und mithin sind

die *cos* des 1. und 4. Quadrant (= PC) positiv,
" " " 2. " 3. " (= P′C) negativ.

Die Tangenten und Cotangenten der Winkel außerhalb des 1. Quadrant könnten zwar auch durch geometrische Tangenten (siehe AT und BV in § 7) bestimmt werden, aber es genügt zu wissen, daſs $tg = \frac{sin}{cos}$, $cot = \frac{cos}{sin}$, z. B. $tg\ 240^0 = \frac{sin\ 240^0}{cos\ 240^0}$. Für den 1. Quadrant sind die *sin* und *cos* positiv, folglich ist auch $\frac{sin}{cos}$ und $\frac{cos}{sin}$ positiv, oder die

Tangenten und Cotangenten des 1. Quadr. sind positiv.

Für den 2. Quadr. ist der *sin* positiv, der *cos* negativ, folglich $\frac{sin}{cos}$ und $\frac{cos}{sin}$ negativ, oder die

Tangenten und Cotangenten des 2. Quadr. sind negativ.

Für den 3. Quadr. sind *sin* und *cos* negativ, daher ihr Quotient positiv, oder die

Tangenten und Cotangenten des 3. Quadr. sind positiv.

Für den 4. Quadr. ist der *sin* negativ, der *cos* positiv, daher ihr Quotient negativ, oder die

Tangenten und Cotangenten des 4. Quadr. sind negativ.

55.

Durch vorstehende Sätze führt man die trigonometrischen Funktionen außerhalb des 1. Quadrant auf solche des ersten zurück.

Es ist *sin* ACM′ = M′P′, d. i. $sin\ (180^0 - \angle BCM')$ = der positiven Linie M′P′. Da nun auch M′P′ = *sin* BCM′, so ist $sin\ (180^0 - \angle BCM') = sin\ BCM'$, oder

I. $sin\ (180^0 - a) = sin\ a.$

Der Sinus des überstumpfen Winkels ACM″ ist = der negativen Linie M″P′. Denkt man sich dieselbe absolut, so ist

$sin\,(180^0 + \angle BCM'') = - M''P'$. Da nun $M''P' = sin\,BCM''$, so ist $sin\,(180^0 + \angle BCM'') = - sin\,BCM''$, oder

$$\text{II.}\quad sin\,(180^0 + a) = - sin\,a.$$

Der Sinus des überstumpfen Winkels ACM''' ist $=$ der neg. Linie $M'''P$, d. i. $sin\,(360^0 - \angle ACM''') = - M'''P$. Da nun $M'''P = sin\,\angle ACM'''$, so ist $sin\,(360^0 - \angle ACM''') = - M'''P$, oder

$$\text{III.}\quad sin\,(360^0 - a) = - sin\,a.$$

Setzt man $a = 90^0 - b$, so geht Formel I über in $sin\,[180^0 - (90^0 - b)] = sin\,(90^0 - b)$, d. i.

$$\text{IV.}\quad sin\,(90^0 + b) = cos\,b.$$

Aus III wird mit $a = 90^0 - b$: $sin\,[360^0 - (90^0 - b)] = - sin\,(90^0 - b)$, d. i.

$$\text{V.}\quad sin\,(270^0 + b) = - cos\,b.$$

Ferner ist $cos\,ACM'$ = der negativen Linie $P'C$, oder $cos\,(180^0 - \angle BCM') = - P'C$. Da nun $P'C = cos\,BCM'$, so ist $cos\,(180^0 - \angle BCM') = - cos\,BCM'$, oder

$$\text{VI.}\quad cos\,(180^0 - a) = - cos\,a.$$

In gleicher Weise geht $cos\,ACM'' = - P'C$ über in $cos\,(180^0 + BCM'') = - cos\,BCM''$, oder

$$\text{VII.}\quad cos\,(180^0 + a) = - cos\,a.$$

$cos\,ACM''' = PC$ (positiv) wird $cos\,(360^0 - \angle ACM''') = cos\,ACM'''$, oder

$$\text{VIII.}\quad cos\,(360^0 - a) = cos\,a.$$

Mit $a = 90^0 - b$ wird aus VI und VIII:

$$\text{IX.}\quad cos\,(90^0 + b) = - sin\,b.$$

$$\text{X.}\quad cos\,(270^0 + b) = sin\,b.$$

$$tg\,(90^0 + b) = \frac{sin\,(90^0 + b)}{cos\,(90^0 + b)} = \frac{+ cos\,b}{- sin\,b},\text{ d. i.}$$

$$\text{XI.}\quad tg\,(90^0 + b) = - cot\,b.$$

In gleicher Weise ergeben sich aus $tg = \frac{sin}{cos}$ und $cot = \frac{cos}{sin}$ die nachstehenden Formeln:

XII. $tg\,(180^0 - a) = - tg\,a$	XVI. $cot\,(90^0 + b) = - tg\,b$
XIII. $tg\,(180^0 + a) = tg\,a$	XVII. $cot\,(180^0 - a) = - cot\,a$
XIV. $tg\,(270^0 + b) = - cot\,b$	XVIII. $cot\,(180^0 + a) = cot\,a$
XV. $tg\,(360^0 - a) = - tg\,a$	XIX. $cot\,(270^0 + b) = - tg\,b$

$$\text{XX.}\quad cot\,(360^0 - a) = - cot\,a.$$

Wird der Winkel größer als 360°, so wiederholen sich die vorhergehenden Werte mit ihren Vorzeichen, so daß $\sin(360^0 + a) = MP = \sin a$, $\cos(360^0 + a) = PC = \cos a$ u. s. w. Oder:

$$\text{XXI.}\quad \left\{\begin{aligned} \sin(n\cdot 360^0 + a) &= \sin a \\ \cos(n\cdot 360^0 + a) &= \cos a \\ tg(n\cdot 360^0 + a) &= tg\, a \\ \cot(n\cdot 360^0 + a) &= \cot a. \end{aligned}\right.$$

56.

Betrachtet man die Drehung von A in der Richtung nach D positiv, so muſs die entgegengesetzte Richtung, von A nach E, die negativen Winkel erzeugen. Geht man daher von A bis M‴, so erhält man den negativen $\angle ACM'''$ und da der *sin* desselben = der neg. Linie M‴P, so ist, $\angle ACM'''$ und M‴P absolut genommen, $\sin(-\angle ACM''') = -M'''P$, oder, weil $M'''P = \sin$ des pos. $\angle ACM'''$:

$$\sin(-a) = -\sin a.$$

In gleicher Weise erhält man die schon in anderer Weise in § 47 und 48 entwickelten Formeln: $\cos(-a) = \cos(+a)$, $tg(-a) = -tg\, a$, $\cot(-a) = -\cot a$.

57.

Die Formeln der §§ 55 und 56 mögen nun noch in eine Regel zusammengefaſst werden, die sich ungemein leicht behalten und anwenden läſst.

I. Ist der gegebene Winkel ein 2gliedriger Ausdruck, bei welchem das 1. Glied Endpunkt der Hauptachse (also 0°, 180°, 360°, 540°..., überhaupt ein Vielfaches von 180°), das 2. Glied ein spitzer Winkel ist, so behält man das positiv genommene 2. Glied mit der gegebenen Funktion allein, für welche nur noch nach § 54 das Vorzeichen zu bestimmen ist.

Z. B.: $tg(180^0 - a)$? „$180^0 -$“ weggelassen, bleibt $tg\, a$. Da der gegebene Winkel $180^0 - a$ vor 180°, also im 2. Quadrant liegt und die *tg* im 2. Quadr. negativ ist, so hat man:

$$tg(180^0 - a) = -tg\, a.$$

$\sin(180^0 + a) = \ldots \sin a$. Da $180^0 + a$ im 3. Quadr., wo der *sin* negativ ist, so hat man:

$$\sin(180^0 + a) = -\sin a.$$

cos $(360^0 - a) = \ldots.$ *cos* a. Da $360^0 - a$ im 4. Quadr. und der *cos* daselbst positiv, so ist

$$cos\,(360^0 - a) = + cos\ a.$$

cot $(-a) =$ *cot* $(0^0 - a) = \ldots.$ *cot* a. Da $-a$ im 4. Quadr., wo die *cot* negativ, so ist

$$cot\,(-a) = - cot\ a.$$

II. Ist der gegebene Winkel ein 2gliedriger Ausdruck, bei welchem das 1. Glied Endpunkt der Nebenachse (also 90^0, 270^0, $450^0 \ldots$, überhaupt ein ungeradzahliges Vielfache von 90^0) ist, so verfährt man ganz wie in I, nur ändert man die Funktion in ihre Kofunktion um (s. § 5).

Z. B.: *cos* $(270^0 - x) = \ldots.$ *sin* x. Der *cos* ist im 2. Quadr. für 3.
negativ, folglich ist *cos* $(270^0 - x) = -$ *sin* x.

tg $(90^0 + x) = \ldots$ *cot* x. Im 2. Quadr. ist die *tg* negativ, daher $= -$ *cot* x.

sin $(270^0 + a) = \ldots$ *cos* a. Der *sin* ist im 4. Quadr. negativ, folglich $= -$ *cos* a.

cot $(90^0 - u) = \ldots$ *tg* u. Im 1. Quadr. ist die *cot* positiv, daher $= +$ *tg* u.

tg $(x - 270^0)$? Nach § 48, Nr. 25 ist dies zunächst $=$ $-$ *tg* $(270^0 - x)$ und nach vorstehender Regel II $= -[+$ *cot* $x] =$ $-$ *cot* x.

III. Alle Winkel, welche gröſser als 90^0 sind, denkt man sich am besten in der Form $90^0 + a$, $180^0 + a$, $270^0 + a$ u. s. w. Z. B.: *tg* $146^0\,17'\,28'',37 =$ *tg* $(90^0 + 56^0\,17'\,28'',37) =$ $-$ *cot* $56^0\,17'\,28'',37$.

Weniger einfach wäre *tg* $146^0\,17'\,28'',37 =$ *tg* $(180^0 - 33^0\,42'\,31'',63) = -$ *tg* $33^0\,42'\,31'',63$.

sin $207^0\,51' =$ *sin* $(180^0 + 27^0\,51') = -$ *sin* $27^0\,51'$.

cos $349^0\,25'\,47'',8 =$ *cos* $(270^0 + 79^0\,25'\,47'',8) =$ *sin* $79^0\,25'\,47'',8$.

IV. Vorstehende Sätze benutzt man zugleich, um aus der gegebenen Gröſse einer Funktion die zugehörigen, stets in 2 verschiedenen Quadranten liegenden Winkel zu finden.

1. Beispiel. Es sei aus *tg* $x = \frac{3}{4}$ der $\angle x$ zu bestimmen. Offenbar liegt x im 1. und 3. Quadrant, da in diesen die *tg* positiv $(+\frac{3}{4})$ ist. Die Tafeln geben mit *lg tg* $x =$ *lg* $\frac{3}{4} =$ *lg* $0,75 =$ $9,8750613 - 10$ unmittelbar jenen 1. Winkel: $36^0\,52'\,11'',6$. Da der andere Winkel im 3. Quadr. liegt, so setze man $x = 180^0 + y$, wo y ein spitzer Winkel. Nun ist $tg\,x = tg\,(180^0 + y) = tg\,y = \frac{3}{4}$. Daher $y = 36^0\,52'\,11'',6$ und folglich $x = 180^0 + y = 180^0 + 36^0\,52'\,11'',6 = 216^0\,52'\,11'',6$.

2. Beispiel. $cos\,x = -\frac{6}{7}$. Die gesuchten Winkel liegen im 2. und 3. Quadrant, in welchen der *cos* negativ ist. Mithin ist $x = 180^0 \mp y$ und folglich $cos\,x = cos\,(180^0 \mp y) = -cos\,y = -\frac{6}{7}$, woraus sich für den spitzen Winkel

$$cos\,y = \tfrac{6}{7}$$

$$\text{oder } lg\,cos\,y = lg\,\tfrac{6}{7} = 9{,}9330533 - 10,$$

$$\text{folglich } \quad y = 31^0\,0'\,9'',6.$$

Daher $x = 180^0 \mp 31^0\,0'\,9'',6$ oder

$$x_1 = 148^0\,59'\,50'',4 \text{ und } x_2 = 211^0\,0'\,9'',6.$$

58.

Wächst der Bogen AM (oder Winkel MCP) von 0 bis 90°, so wächst offenbar (CM = 1 gesetzt) der *sinus* gleichzeitig von 0 bis DC = 1, der *cosinus* dagegen nimmt ab von CA = 1 bis 0.

Wächst der Bogen von 90 bis 180°, so nimmt sein *sinus* wieder ab, von DC = 1 bis 0, der *cosinus* aber wächst im negativen Sinne von 0 bis CB = − 1.

Wächst der Bogen von 180 bis 270°, so wächst wieder der *sinus* im negativen Sinne von 0 bis CE = − 1, der *cosinus* aber nimmt ab von CB = − 1 bis 0.

Wächst der Bogen endlich von 270 bis 360°, so nimmt der *sinus* ab, von CE = − 1 bis 0, der *cosinus* dagegen wächst von 0 bis CA = 1, so daſs also:

$$\begin{array}{ll} sin\;\;0^0 = 0 & cos\;\;0^0 = 1 \\ sin\;\;90^0 = 1 & cos\;\;90^0 = 0 \\ sin\,180^0 = 0 & cos\,180^0 = -1 \\ sin\,270^0 = -1 & cos\,270^0 = 0 \\ sin\,360^0 = 0 & cos\,360^0 = 1. \end{array}$$

tg und *cot* von 0° bis 90° können wie die nachstehenden Werte entwickelt werden, sind aber schon § 8 bestimmt worden.

$$tg\;180^0 = \frac{sin\,180^0}{cos\,180^0} = \frac{0}{-1} = -0.$$

$$tg\;270^0 = \frac{sin\,270^0}{cos\,270^0} = \frac{-1}{0} = -\infty.$$

In gleicher Weise: $tg\,360^0 = 0$; $cot\,180^0 = -\infty$; $cot\,270^0 = -0$; $cot\,360^0 = \infty$.

59.

Jetzt bleibt uns noch zu beweisen übrig, daſs die im Vorhergehenden aufgeführten und in § 100 zusammengestellten Formeln, welche bisher nur für Winkel < 180 bewiesen sind, auch für diese Begriffserweiterung der trigonometrischen Funktionen allgemein giltig sind, sowie auch, weshalb für Bögen oder Winkel über 180^0 die trigonometrischen Funktionen die in den §§ 54 und 55 vorläufig festgesetzten Vorzeichen, der allgemeinen Giltigkeit der Formeln halber, notwendig erhalten müssen.

Daſs die Formeln $sin\ 0 = 0$ bis $cot\ 360^0 = 0$ in § 100 für alle noch so groſse Bögen gelten, ist, mit Berücksichtigung der Vorzeichen, klar, es frägt sich also nur, ob auch die Fundamentalformeln:

$$sin\,(a + b) = sin\ a\ cos\ b + cos\ a\ sin\ b \ldots\ldots. (1)$$
$$cos\,(a + b) = cos\ a\ cos\ b - sin\ a\ sin\ b \ldots\ldots. (2)$$

allgemein giltig sind. Daſs diese beiden Formeln für $a + b > 90$ gelten, ist bereits § 46 bewiesen.

Es seien nun beide Winkel a und b stumpf, folglich $a + b > 180^0$, aber noch $a + b < 270^0$, und wir müssen nun zeigen, daſs die rechten Seiten beider Formeln ganz dasselbe geben, wie die linken Seiten, indem wir den *sinus* und *cosinus* von dem überstumpfen Winkel $a + b$ an Gröſse und Vorzeichen so nehmen, wie in § 55 festgesetzt worden.

Man setze $a = 90 + p$ und $b = 90 + q$ (wo p und q spitze Winkel sind und auch $p + q < 90$), so giebt die Substitution von $90 + p$ und $90 + q$ in die erste Formel:

$$sin\,(180+p+q) = sin\,(90+p) \cdot cos\,(90+q) + cos\,(90+p) \cdot sin\,(90+q).$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, vermöge §§ 55 und 42:

$$- sin\,(p + q) = - \ cos\ p \cdot sin\ q - sin\ p \cdot cos\ q$$
$$- sin\,(p + q) = - (sin\ p \cdot cos\ q + cos\ p \cdot sin\ q),$$

was also vollkommen stimmt und zugleich, wenn man die erste Formel auf überstumpfe Winkel ausdehnen will, die Notwendigkeit zeigt, den *sinus* eines solchen Winkels als negativ zu nehmen, weil die rechte Seite der ersten Formel ein negatives Resultat giebt.

Dieselbe Substitution in die zweite Gleichung giebt:

$$cos\,(180+p+q) = cos\,(90+p)\ cos\,(90+q) - sin\,(90+p)\ sin\,(90+q),$$

hieraus, zufolge §§ 55 und 42:

$$-\cos(p+q) = +\sin p \cdot \sin q - \cos p \cdot \cos q$$
$$-\cos(p+q) = -(\cos p \cdot \cos q - \sin p \cdot \sin q),$$

was also wieder vollkommen stimmt.

Ebenso beweist man die Giltigkeit der beiden Grundformeln für die Fälle, wo erstens a stumpf und $b = 90^0$, zweitens a stumpf und b spitz ist, indem man beide mal $90 + p$ für a substituiert.

Sind endlich a und b stumpf und $a + b > 270^0$, so setze $a = 180 - p$, $b = 180 - q$ und beachte, daſs $\sin[360 - (p+q)] = -\sin(p+q)$; $\cos[360-(p+q)] = \cos(p+q)$ und $\sin(180-p) = \sin p$; $\cos(180-p) = -\cos p$. Die übrigen besondern Fälle sind hiernach leicht zu behandeln, sowie auch die beiden Formeln für $\sin(a-b)$ und $\cos(a-b)$, für den Fall, wo a und b beliebig groſs, oder auch $b > a$ ist.

60.

Die Einteilung des Kreisumfanges in 360^0 ist eine vollkommen willkürliche. Das Messen der Winkel mittelst dieser Grade ist daher auch weniger rationell, als wenn es (wie in der höhern Mathematik) durch die der Einheit gleichgesetzten Hauptlinie des Kreises, d. i. durch den $= 1$ gesetzten Radius geschieht. Für diesen Wert ist der Durchmesser des Kreises $= 2$ und daher der Umfang $= 2\pi = 6{,}283185307$.

Rationell würde man mithin

statt 360^0: „in Teilen des Halbmessers“ 2π,

„ 1^0: $\frac{2\pi}{360}$ oder $\frac{\pi}{180}$ zu setzen haben.

Um also einen durch Grade ausgedrückten Winkel (oder Bogen) in Teilen des Halbmessers auszudrücken, hat man die Zahl der Grade mit $\frac{\pi}{180} = 0{,}0174532925$ zu multiplizieren.

Beispiele. $\sin 90^0 = \sin\left(90 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{3{,}14159...}{2} = \sin 1^0{,}5707963.$

$$\cos 180^0 = \cos\left(180 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \cos \pi.$$

$$tg\ 30^0 = tg\left(30 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = tg\frac{\pi}{6}.$$

$$\cot 17^0\, 19'\, 23'' = \cot 17^0{,}323056 = \cot\left(17^0{,}323056 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$
$$= \cot(17^0{,}323056 \cdot 0{,}0174532925) = \cot 0{,}3023444.$$

Oder (s. Bruhns, S. 608):

$$\begin{array}{rl} \text{für } 17^0 &= 0{,}29670597 \\ „\ \ 19' &= 0{,}00552688 \\ „\ \ 23'' &= \underline{0{,}00011151} \\ & 0{,}30234436. \end{array}$$

Umgekehrt ist 2π in Teilen des Halbmessers $= 360^0$,

daher 1 „ „ „ „ $= \dfrac{180^0}{\pi}$.

Um also den in Teilen des Halbmessers ausgedrückten Bogen (oder Winkel) durch Grade wiederzugeben, hat man jene Zahl mit $\dfrac{180^0}{\pi} = 57^0{,}295779513$ zu multiplizieren.

Beispiele. $\cos\dfrac{\pi}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{180^0}{\pi}\right) = \cos 90^0 = 0.$

$\sin 1{,}3579 = \sin\left(1{,}3579\cdot\dfrac{180^0}{\pi}\right) = \sin(1{,}3579\cdot 57^0{,}2957795)$

$= \sin 77^0{,}80193 = \sin 77^0\,48'\,6'',95$ und daher

$lg \sin 1{,}3579 = lg \sin 77^0\,48'\,6'',95 = 9{,}9900825 - 10$ (s. Bruhns, S. 411).

Der Bogen, welcher dem Radius, also der Zahl 1 gleich ist, umfaſst daher $1\cdot\dfrac{180}{\pi}$ Grade $= 57^0{,}29578$.

Da $\sin 0^0$, $\sin 180^0$, $\sin 360^0$ (d. i. $\sin 2\cdot 180^0$), $\sin 3\cdot 180^0$ u. s. w. $= 0$, so ist in Teilen des Halbmessers $\sin 0$, $\sin\pi$, $\sin 2\pi, \ldots$ allgemein (wenn $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

$$\sin k\pi = 0.$$

Aus $\cos 0^0$, $\cos 360^0$, $\cos 2\cdot 360^0 \ldots$ oder $\cos 0$, $\cos 2\pi$, $\cos 4\pi$, folgt:

$$\cos 2k\pi = 1.$$

Aus $\cos 180^0$, $\cos(360^0 + 180^0)$, $\cos(2\cdot 360^0 + 180^0)\ldots$ oder $\cos\pi$, $\cos 3\pi, \ldots = -1$ folgt:

$$\cos(2k+1)\pi = -1.$$

Aus $\sin 90^0$, $\sin(360^0 + 90^0), \ldots$ oder $\sin\dfrac{\pi}{2}$, $\sin 5\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $\sin 9\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $\ldots = 1$ folgt:

$$\sin(4k+1)\frac{\pi}{2} = 1.$$

Aus $\sin 270^0$, $\sin(360^0 + 270^0), \ldots$ oder $\sin 3\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $\sin 7\cdot\dfrac{\pi}{2}, \ldots =$ -1 folgt:

$$\sin(4k+3)\frac{\pi}{2} = -1.$$

Aus $\cos 90^0$, $\cos 270^0$ (d. i. $\cos 3 \cdot 90^0$), $\cos 5 \cdot 90^0, \ldots .$ oder $\cos \frac{\pi}{2}$, $\cos 3 \cdot \frac{\pi}{2} \ldots . = 0$ folgt:

$$\cos (2k+1) \frac{\pi}{2} = 0.$$

61.

Um anzudeuten, daſs ein Bogen (resp. Winkel) genommen werden soll, der zu einer numerisch gegebenen Funktion gehört, schreibt man *arc* (d. i. *arcus* = Bogen) vor die Funktion. Z. B.: $\operatorname{arc} \sin \frac{1}{2} = 30^0$, oder in Teilen des Halbmessers $\operatorname{arc} \sin \frac{1}{2} = 0{,}523599$. Es ist also $\operatorname{arc} \sin \frac{1}{2}$ die Abkürzung von $\operatorname{arc} (\sin = \frac{1}{2})$ und bedeutet mithin den Bogen, dessen $\sin = \frac{1}{2}$ ist.

Aus $\operatorname{arc} \sin x = y$ würde demnach $\sin y = x$,
aus $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = y$: $\operatorname{tg} y = x$ folgen.

Ist umgekehrt $\cos y = x$, so ist $\operatorname{arc} \cos x = y$.

Ist ferner $\sin y = x$, so ist $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, daher

$$\operatorname{arc} \sin x = \operatorname{arc} \cos \sqrt{1 - x^2}.$$

Ist $\operatorname{tg} y = x$, so ist $\cot y = \frac{1}{\operatorname{tg} y} = \frac{1}{x}$, daher

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \cot \frac{1}{x}.$$

Aus $\sin (a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$= \sin a \sqrt{1 - \sin^2 b} + \sqrt{1 - \sin^2 a} \cdot \sin b$ folgt daher

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin y = \operatorname{arc} \sin (x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}).$$

Ebenso findet man:

$$\operatorname{arc} \cos x + \operatorname{arc} \cos y = \operatorname{arc} \cos [x y - \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}]$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + y}{1 - x y}$$

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{1 - x^2}.$$

62.

* Drückt man die mit einem Halbmesser = 1 beschriebenen Bögen statt in Sekunden in Längen (in Teilen des Halbmessers) aus, so zeigt sich, wie auch schon aus der unmittelbaren Betrachtung des Kreises folgt, daſs die *sinus* zwar immer kleiner und die *tangenten* immer gröſser, als die zugehörigen Bögen sind, innerhalb eines kleinen Intervalls aber, etwa von 0″ bis 100″,

der Unterschied aller drei so gering ist, dafs er erst in der achten Decimale sich zeigt, und dafs man deshalb, innerhalb dieser Grenzen, statt der *sinus* (*tangenten*) die Bögen selbst (in Teilen des Halbmessers ausgedrückt) setzen kann, sowie auch das Verhältnis zweier solcher kleinen *sinus* durch das Verhältnis ihrer Bögen, gleichviel, ob in Längen oder in Sekunden ausgedrückt, darstellen kann. So ist z. B.:

$$\text{Bogen von } 1'' = \frac{3{,}1415926}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$

$$log\, arc\; 1'' = 4{,}6855749 - 10$$

$$log\, sin\; 1'' = 4{,}6855749 - 10$$

$$log\, sin\; 10'' = 5{,}6855749 - 10$$

$$log\, sin\; 30'' = 6{,}1626961 - 10$$

$$arc\, 1'' = sin\; 1'' = 0{,}000004848137 \cdots$$

$$sin\; 10'' = 0{,}00004848137 \cdots$$

$$sin\; 30'' = 0{,}0001454441 \cdots$$

$$\frac{sin\; 30''}{sin\; 10''} = \frac{0{,}000145 \cdots}{0{,}000048 \cdots} = \frac{30''}{10''} = 3.$$

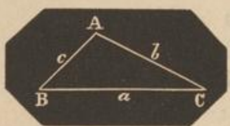
Da die Längen der Bögen der Anzahl ihrer Sekunden proportional sind, so erhält man die Länge eines mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen und in Graden etc. gegebenen Bogens, indem man ihn erst auf Sekunden reduziert und die erhaltene Anzahl mit $arc\, 1''$ oder $sin\, 1''$ multipliziert. So ist z. B. der mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebene Bogen von 30^0 in Länge $= 30 \cdot 60 \cdot 60 \cdot arc\; 1'' = 30 \cdot 60 \cdot 60 \cdot sin\; 1''$, mithin $= 108000 \cdot 0{,}000004848137 \cdots = 0{,}523598796$.

Umgekehrt wird also ein in Teilen des Halbmessers $= 1$ gegebener Bogen in Sekunden ausgedrückt, indem man ihn durch $sin\, 1''$ dividiert oder mit $\frac{1}{sin\; 1''} = \frac{1}{0{,}000004848137} = 206265$ multipliziert. So viel Sekunden, nämlich $206265'' = 57^0\, 17'\, 44'',8$, kommen also auf einen Bogen, dessen Länge $= 1$, gleich dem *radius* ist.

Siebentes Buch.

Anwendungen der Goniometrie.

63 a.



Die §§ 35 und 36 aus der Figur abgeleiteten Formeln hätte man, unter Voranstellung der Goniometrie, folgendermaßsen etwas kürzer ableiten können, was jedoch dem Anfänger nicht so klar geworden sein würde.

So ergiebt sich z. B. aus $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ nach einem bekannten Proportionssatz:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}, \text{ d. i. (s. § 52, Formel 54)}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(A+B)}{tg\,\frac{1}{2}(A-B)}, \text{ übereinstimmend mit § 36.}$$

Von besonderer Wichtigkeit aber sind die nachstehenden 2 Sätze.

I. Um aus drei Seiten eines Dreiecks einen Winkel, z. B. B zu finden, ist nach § 30:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \text{ hieraus (§ 50):}$$

$1 - \cos B = 1 - \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$	$1 + \cos B = 1 + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$
$2\sin^2\frac{1}{2}B = \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2ac}$	$2\cos^2\frac{1}{2}B = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
$2\sin^2\frac{1}{2}B = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2ac}$	$2\cos^2\frac{1}{2}B = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2ac}$
$\sin^2\frac{1}{2}B = \frac{(b+a-c)(b+c-a)}{4ac}$	$\cos^2\frac{1}{2}B = \frac{(a+c+b)(a+c-b)}{4ac}$
$\sin\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{4ac}}$	$\cos\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{4ac}}$

Beide Gleichungen durcheinander dividiert:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{(a+b-c)\,(b+c-a)}{(a+b+c)\,(a+c-b)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)\,(\frac{1}{2}s-c).^{*)}}{\frac{1}{2}s\cdot(\frac{1}{2}s-b)}}$$

Daher auch $cot\,\tfrac{1}{2}\,B = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}s\,(\frac{1}{2}s-b)}{(\frac{1}{2}s-a)\,(\frac{1}{2}s-b)}}$.

Die für $cos\,\tfrac{1}{2}\,B$ giltige Formel eignet sich in der Form

$$cos\,\tfrac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{(a+c+b)\,(a+c-b)}{(2a)\cdot(2c)}}$$

vorzüglich für die numerische Berechnung eines Winkels. Es sei z. B. $a = 571{,}9$; $b = 923{,}2$; $c = 368{,}7$; $\angle B$?

$$\left.\begin{aligned} a &= 571{,}9 \\ c &= 368{,}7 \end{aligned}\right\}\ \text{für den Nenner mit 2 zu multiplizieren.}$$

$$\begin{aligned} a+c &= 940{,}6 \\ b &= 923{,}2 \\ \text{Daher}\quad a+c+b &= 1863{,}8 \\ a+c-b &= 17{,}4 \end{aligned}$$

$$cos\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1863{,}8\cdot 17{,}4}{1143{,}8\cdot 737{,}4}}.$$

$$\begin{aligned} lg\ 1863{,}8 &= 3{,}2703993 \\ lg\ \ 17{,}4 &= 1{,}2405492 \\ \text{d. E. } lg\ 1143{,}8 &= 6{,}9416499 \\ \text{d. E. } lg\ \ 737{,}4 &= 7{,}1322969 \\ &\overline{(8{,}5848953-10):2} \quad \text{oder} \\ &\overline{(18{,}5848953-20):2} \\ lg\ cos\,\frac{B}{2} &= 9{,}2924477-10. \\ \frac{B}{2} &= 78^0\,41'\,30'',48, \\ \text{daher}\quad B &= 157^0\,23'\ \ 0'',96. \end{aligned}$$

---

*) Wenn der *sinus* oder *cosinus* eines Winkels nahe $= 1$ ist, so ändern sich diese beiden Funktionen mit dem Wachsen des Winkels sehr langsam, wie die unmittelbare Betrachtung des Kreises oder auch die in den Tafeln ausgesetzten Differenzen zeigen. Wenn man also die Wahl hat, einen Winkel durch eine beliebige trigonometrische Funktion zu bestimmen, so wählt man immer die, welche die gröſsten Differenzen hat, weil hier ein Fehler von ein paar Einheiten in der letzten Stelle des Logarithmen keinen groſsen Einfluſs auf den dazu aufzuschlagenden Winkel übt. Die *tangenten* haben immer die gröſsten Differenzen und bestimmen die Winkel also am genauesten.

II. Relation zwischen allen 6 Stücken des Dreiecks.

Aus $a : b = \sin A : \sin B$ folgt

$$a + b : b = \sin A + \sin B : \sin B$$

Ferner ist $\quad b : c = \sin B \qquad : \sin C$, folglich

$$a + b : c = \sin A + \sin B : \sin C, \text{ d. i. } (\S\, 52 \text{ u. } \S\, 49)$$

$$a + b : c = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} : 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Nun ist $\sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{180^0 - C}{2} = \sin\left(90^0 - \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$, folglich

$$a + b : c = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A - B}{2} : 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Das 2. Verhältnis durch $2 \cos \frac{C}{2}$ gekürzt:

$$✽ \quad a + b : c = \cos \frac{A - B}{2} : \sin \frac{C}{2}.$$

Ebenso $\quad a - b : b = \sin A - \sin B : \sin B$

$$b : c = \sin B \qquad : \sin C, \text{ daher}$$

$$a - b : c = 2 \sin \frac{A - B}{2} \cos \frac{A + B}{2} : 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}, \text{ oder,}$$

weil $\cos \frac{A + B}{2} = \cos \frac{180^0 - C}{2} = \sin \frac{C}{2}$:

$$a - b : c = 2 \sin \frac{A - C}{2} \sin \frac{C}{2} : 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Das 2. Verhältnis durch $2 \sin \frac{C}{2}$ gekürzt:

$$✽ \quad a - b : c = \sin \frac{A - B}{2} : \cos \frac{C}{2}.$$

Diese Mollweide'schen (fälschlich: Gauſs'schen) Formeln benutzt man bei Aufgaben, in welchen die Summe oder Differenz zweier Seiten oder die Differenz zweier Winkel gegeben ist.

Beispiel. Die Summe zweier Seiten = 357 Mtr., die 3. Seite c = 313 Mtr., die Differenz der beiden an dieser 3. Seite liegenden Winkel = 12⁰ 34′ 56″. Wie groſs sind die übrigen Stücke?

Nach der 1. Formel ist

$$357 : 313 = \cos \frac{12^0\, 34'\, 56''}{2} : \sin \frac{C}{2}, \text{ folglich}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \frac{313 \cos 6^0\, 17'\, 28''}{357}, \text{ woraus sich}$$

$$\frac{C}{2} = 60^0\, 37'\, 48'',1$$

$$C = 121^0\, 15'\, 36'',2 \text{ ergiebt.}$$

Mithin ist $A + B = 180^0 - 121^0\ 15'\ 36'',2 = 58^0\ 44'\ 23'',8$.

Daher $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 29^0\ 22'\ 11'',9$

$\frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \ 6^0\ 17'\ 28''$ (s. die Aufgabe). Daher

durch Addition: $A = 35^0\ 39'\ 39'',9$

„ Subtr.: $B = 23^0\ \ 4'\ 43'',9$.

Aus $a : c = sin\,A : sin\,C$ findet sich nun a, alsdann $b = 357 - a$.

63 b.

Aufgabe. Die Höhe eines Leuchtturmlichtes, L, über dem Niveau des Meeres ist $= h = 60$ m. Aus welcher Entfernung, e, kann es erblickt werden, wenn die Höhe des Auges A über demselben Niveau $= h' = 3{,}5$ m?

Antwort. Es kann nicht eher erblickt werden, als bis das Auge A in die Verlängerung der vom Punkte L an die Erde gezogenen Berührungslinie tritt. Verbindet man also die Punkte L, A und den Berührungspunkt T mit dem Mittelpunkt C, setzt $\angle LCT = \alpha$, $\angle ACT = \beta$ und den Radius r der Erde $= 6370000$ m, so hat man:

$$cos\ \alpha = \frac{r}{r + h} \text{ und } cos\ \beta \frac{r}{r + h'}$$

oder, weil bei dieser Art Aufgaben die Winkel α und β immer sehr klein sind, so erhält man nach § 63a Randanmerkung und § 50 (33) genauer:

$$sin\ \tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h}{r + h}} \text{ und } sin\ \tfrac{1}{2}\,\beta = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h'}{r + h'}}.$$

Aus den Winkeln α und β findet man dann leicht die zugehörigen Bögen, oder wenn ihre Summe der Länge der Tangente AL gleichgesetzt werden kann (§ 40c), gleich einfacher:

$e = \sqrt{2rh + h^2} + \sqrt{2rh' + h'^2}$, oder genau genug:

$e = \sqrt{2rh} + \sqrt{2rh'} = 34325{,}4$ m $= 34\tfrac{1}{3}$ Kilom.

Aufgabe. Wie grofs ist die Fläche F der Erdzone von $\beta = 23\tfrac{1}{2}^0$ bis $\beta' = 66\tfrac{1}{2}^0$ der geographischen Breite? (Der Radius der Erde $r = 859{,}436$ Meilen.)

Antwort. Es ist die Höhe der Zone $= r\ sin\ \beta' - r\ sin\ \beta$ und folglich (Geometrie § 178) $F = 2r^2\pi\ (sin\ \beta' - sin\ \beta)$, oder: § 52, 49

$$F = 4r^2\pi\ cos\ \frac{\beta' + \beta}{2} \cdot sin\ \frac{\beta' - \beta}{2}$$

$F = 2405456$ □Meilen.

64.

Trigonometrische (oder goniometrische) Gleichungen.

1. Aufgabe. $\sin(2x+7^0) = \cos(x-11^0)$;

Auflösung. $\sin(2x+7^0) = \sin[90^0-(x-11^0)]$, folglich

$$2x+7^0 = 90^0-(x-11^0);$$
$$3x = 94^0;$$
$$x = 31\tfrac{1}{3}{}^0.$$

2. Aufgabe. $7\, tg\, x = 11 \sin x$; d. i.

$$\frac{7\sin x}{\cos x} = 11\sin x; \text{ durch } \sin x \text{ dividiert,}$$

$$\frac{7}{\cos x} = 11; \text{ folglich}$$

$$\cos x = \frac{7}{11} \quad \text{u. s. w. (s. § 57, IV).}$$

3. Aufgabe. $a\cos x = b\sin 2x$; d. i.

$$a\cos x = b\cdot 2\sin x\cos x;$$
$$a = 2b\sin x;$$
$$\sin x = \frac{a}{2b}.$$

4. Aufgabe. $\sqrt{5}\cdot\sin x + 11\cos x = 37\sin x$.

Haben alle Glieder der Gleichung den Faktor $\sin x$ oder $\cos x$, so dividiert man durch $\sin x$ oder $\cos x$. Hier durch $\sin x$ dividiert:

$$\sqrt{5} + 11\cot x = 37$$

$$\cot x = \frac{37-\sqrt{5}}{11} = \frac{37-2{,}236068}{11} \quad \text{u. s. w.}$$

5. Aufgabe. $tg\, 2x = 7\sin^2 x$.

Enthält die Gleichung den unbekannten Winkel in verschiedenen Formen, so ist jede derselben durch eine und dieselbe Funktion (hier durch $tg\, x$) auszudrücken. Daher (s. § 49, 27 und § 44, 9):

$$\frac{2\, tg\, x}{\sqrt{1-tg^2 x}} = 7\cdot\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}.$$

Der bequemeren Rechnung wegen $tg\, x = y$ gesetzt:

$$\frac{2y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{7y^2}{1+y^2}.$$

Durch y dividiert, folglich vorläufig $y = 0$, d. i. $tg\, x = 0$ oder $x = 0$ oder 180^0 u. s. w.

$$\frac{2}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{7y}{1 + y^2};$$

$$2 + 2y^2 = 7y\sqrt{1 - y^2}.$$

Quadriert und $y^2 = z$ gesetzt, giebt:

$$z^2 - \frac{41z}{53} = -\frac{4}{53}.\ \text{Daher}$$

1) $z = y^2 = 0{,}65907$ oder $tg^2 x = 0{,}65907$

$$tg\, x = \pm\sqrt{0{,}65907} = \pm\, 0{,}81183,$$

woraus $x_1 = 39^0\, 4'\, 15''$; $x_2 = 219^0\, 4'\, 15''$;

$$x_3 = -39^0\, 4'\, 15''\ \text{oder}\ 320^0\, 55'\, 45''; \ x_4 = 140^0\, 55'\, 45''.$$

2) $z = y^2 = 0{,}11451$ oder $tg^2 x = 0{,}11451$, woraus sich gleichfalls 4 Werte für x ergeben.

6. Aufgabe. $a \sin(x - b) = \cos(x - d)$.

Auflösung. $a(\sin x \cos b - \cos x \sin b) = \cos x \cos d + \sin x \sin d$; durch $\cos x$ dividiert:

$$a \cos b\, tg\, x - a \sin b = \cos d + \sin d\, tg\, x.$$

$$tg\, x = \frac{a \sin b + \cos d}{a \cos b - \sin d}.$$

65.

Hilfswinkel. Weil die *tangenten* und *cotangenten* immer zwischen 0 und ∞ enthalten, die *sinus* und *cosinus* aber immer echte Brüche sind, so ist klar, daſs man jede gegebene, noch so kleine oder groſse Zahl als *tangente* oder *cotangente* und jeden echten Bruch immer als *sinus* oder *cosinus* eines, mit Hilfe der Tafeln leicht zu bestimmenden Winkels betrachten kann.

Mit Rücksicht auf diese Eigenschaften der Funktionen berechnet man die unlogarithmischen Ausdrücke bequemer durch Einführung sogenannter Hilfswinkel (wenn man nicht die noch bequemeren Summen- und Differenzlogarithmen benutzen will).

Man unterscheidet hierbei 4 Fälle:

1. Fall. Es sei eine Summe von 2 zusammengesetzten Gliedern gegeben, die Form also $a + b$.

Man verwandle dieselbe in $a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ und setze $\frac{b}{a} = tg^2\, \varphi$ $\left(\text{oder auch } \frac{b}{a} = cot^2\, \varphi\right)$. Aus der Gleichung $tg\, \varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$ läſst sich nun der Hilfswinkel φ bestimmen und jener Ausdruck wird alsdann $a(1+tg^2\varphi)$, d. i. der bequeme logarithmische Ausdruck $\frac{a}{\cos^2\varphi}$ (s. § 44).

Es sei z. B. $x=\sqrt{d^2+e^2}$ mit $d=506{,}835$ und $e=279{,}041$ zu berechnen. Da die direkte Ausführung sehr zeitraubend wäre, so schreibt man

$$x=\sqrt{d^2\left(1+\frac{e^2}{d^2}\right)}=d\sqrt{1+\left(\frac{e}{d}\right)^2}$$

und setzt $\left(\frac{e}{d}\right)^2=tg^2\varphi$. Aus $tg\,\varphi=\frac{e}{d}=\frac{279{,}041}{506{,}835}$ ergiebt sich $\varphi=28^0\,50'\,7''$. Nun ist

$$x=d\sqrt{1+tg^2\varphi}=\frac{d}{\cos\varphi}\text{ (s. § 44).}$$

$$\begin{aligned} lg\, d &= 2{,}7048666 \\ lg\cos\varphi = lg\cos 28^0\,50'\,7 &= 9{,}9425090 \\ \hline lg\, x &= 2{,}7623576 \\ x &= 578{,}57227. \end{aligned}$$

2. Fall. Es sei eine Differenz aus 2 zusammengesetzten Gliedern gegeben, die Form also $a-b$.

Man verwandele dieselbe in $a\left(1-\frac{b}{a}\right)$ und setze $\frac{b}{a}=\cos^2\varphi$ $\left(\text{oder auch } \frac{b}{a}=\sin^2\varphi\right)$. Aus der Gleichung $\cos\varphi=\sqrt{\frac{b}{a}}$ findet man den Hilfswinkel φ und jener Ausdruck wird $a(1-\cos^2\varphi)$, d. i. der bequeme logarithmische Ausdruck $a\sin^2\varphi$.

3. Fall. Ist das eine Glied eines zweiteiligen Ausdrucks (Summe oder Differenz) eine Funktion selbst, so ist es oft von Vorteil, nicht den 1. oder 2. Fall in Anwendung zu bringen, sondern das andere Glied in dieselbe Funktion eines Hilfswinkels zu verwandeln. Z. B.:

$$x=\frac{a\,d\sin b\sin e}{tg\,b-d\sin e}.$$

Aus $tg\,\varphi=d\sin e$ bestimme man den Hilfswinkel φ und es ist alsdann

$$x=\frac{a\,d\sin b\sin e}{tg\,b-tg\,\varphi}=\frac{a\,d\sin b\sin e}{\frac{\sin(b-\varphi)}{\cos b\cos\varphi}}\text{ (s. § 55, Nr. 58)}=\frac{a\,d\sin b\sin e\cos b\cos\varphi}{\sin(b-\varphi)}.$$

Ein solches Resultat läfst sich oft noch durch Benutzung der für den Hilfswinkel aufgestellten Gleichung vereinfachen.

Aus $tg\,\varphi = d\,sin\,e$ ergiebt sich $d = \frac{tg\,\varphi}{sin\,e}$. Dies substituiert, giebt

$$x = \frac{a\,sin\,b\,cos\,b\,cos\,\varphi\,tg\,\varphi}{sin\,(b-\varphi)} = \frac{a\,sin\,2b\,sin\,\varphi}{2\,sin\,(b-\varphi)}.$$

4. Fall. Ist das eine Glied eines zweiteiligen Ausdrucks mit dem *sin* eines Winkels (z. B. mit $sin\,\gamma$), das andere Glied mit dem *cos* desselben Winkels (mit $cos\,\gamma$) multipliziert, so hebt man so aus, dafs entweder der *sin* oder *cos* dieses Winkels (z. B. $sin\,\gamma$) allein stehen bleibt, um den hierdurch entstandenen, mit der Kofunktion (mit $cos\,\gamma$) multiplizierten Faktor des andern Gliedes $= tg\,\varphi$ (oder $= cot\,\varphi$) zu setzen. Man schreibt hierauf statt $tg\,\varphi : \frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi}$, hebt den Nenner $cos\,\varphi$ aus und es ergiebt sich alsdann mit Benutzung der Formeln 13 bis 16 in §§ 45 und 47 ein einfacher logarithmischer Ausdruck.

1. Beispiel. $x = a\,sin\,b\,sin\,d + e\,tg\,b\,cos\,d.$

Dafür $x = a\,sin\,b\left(sin\,d + \frac{e\,tg\,b\,cos\,d}{a\,sin\,b}\right)$, oder

$$x = a\,sin\,b\left(sin\,d + \frac{e\,cos\,d}{a\,cos\,b}\right).$$

Es sei $\frac{e}{a\,cos\,b} = tg\,\varphi$, woraus sich der Hilfswinkel φ ergiebt.

Alsdann ist $x = a\,sin\,b\,(sin\,d + tg\,\varphi\,cos\,d)$, oder

$$x = a\,sin\,b\left(sin\,d + \frac{sin\,\varphi\,cos\,d}{cos\,\varphi}\right)$$

$$x = \frac{a\,sin\,b}{cos\,\varphi}\,(sin\,d\,cos\,\varphi + sin\,\varphi\,cos\,d)$$

$$x = \frac{a\,sin\,b\,sin\,(d+\varphi)}{cos\,\varphi} \quad \text{(s. § 45, Nr. 13).}$$

2. Beispiel. Aus der Gleichung

$$a\,cos\,x - b\,sin\,x = c$$

sei der Winkel x zu bestimmen.

Mit $a\,cos\,x - b\sqrt{1-cos^2 x} = c$ (s. § 64, 5. Aufgabe) würde die Rechnung sehr zusammengesetzt. Man setze daher

$$a\left(cos\,x - \frac{b\,sin\,x}{a}\right) = c.$$

$\frac{b}{a} = tg\,\varphi$ gesetzt, aus welcher Gleichung sich der Hilfswinkel φ ergiebt, erhält man:

$$a\,(cos\,x - tg\,\varphi\,sin\,x) = c, \text{ d. i.}$$

$$a\left(cos\,x - \frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi}\,sin\,x\right) = c, \text{ oder}$$

$$\frac{a}{cos\,\varphi}\,(cos\,x\,cos\,\varphi - sin\,\varphi\,sin\,x) = c, \text{ d. i.}$$

$$\frac{a\,cos\,(x+\varphi)}{cos\,\varphi} = c.$$

$$cos\,(x+\varphi) = \frac{c \cdot cos\,\varphi}{a}.$$

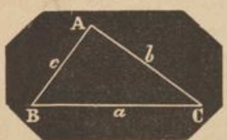
Setzt man $x + \varphi = y$, so ergiebt sich aus

$$cos\,y = \frac{c \cdot cos\,\varphi}{a}$$

der Winkel y und aus $x + \varphi = y$ alsdann

$$x = y - \varphi.$$

66.



Aufgabe. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel a, b, C eines Dreiecks die dritte Seite c zu finden.

Auflösung. Am besten berechnet man erst nach § 36 einen der beiden andern Winkel A oder B, und dann nach der *Sinus*-Regel die Seite c. Man kann aber letztere auch mittelst eines Hilfswinkels folgendermaſsen bestimmen. Zuerst hat man (30):

$$cos\,C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}, \text{ hieraus:}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,C \text{ folgt:}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab - 2ab\,cos\,C$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab\,(1 + cos\,C)$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab \cdot 2\,cos^2\,\tfrac{1}{2}C$$

$$c^2 = (a+b)^2\left[1 - \frac{4ab \cdot cos^2\,\frac{1}{2}C}{(a+b)^2}\right]$$

$$c^2 = (a+b)^2\,[1 - cos^2\,v]$$

$$c = (a+b)\,sin\,v, \text{ worin } cos\,v = \frac{2\,cos\,\frac{1}{2}C\sqrt{ab}}{a+b}.$$

Zur Übung möge hierzu das Zahlenbeispiel § 37 dienen.

67 a.

Aufgabe. Es sind die Lagen dreier Punkte, N, B, O, oder das dadurch bestimmte Dreieck gegeben, von einem vierten Punkt, Z, aus (in derselben Ebene) hat man auf die drei Punkte visiert und die Winkel m und n gemessen. Man soll daraus die

Lage dieses vierten Punktes Z, d. h. seine Entfernungen r, r', r'' von den drei Punkten N, B, O bestimmen.

Wir nehmen zu diesem sogenannten Pothenot'schen Problem ein Zahlenbeispiel aus Berghaus' Geographie.

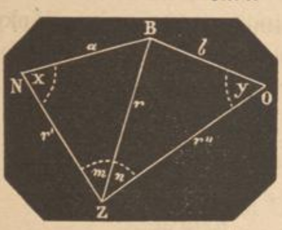
Die Lage des Elisabeth-Turms in Breslau gegen den Rathausturm in Neumarkt und den Turm der Kirche zu Ohlau ist bekannt. Es beträgt nämlich die Entfernung

von Breslau nach Neumarkt BN $= a = 8227{,}32$ Ruten,
" Breslau nach Ohlau BO $= b = 7014{,}23$ "
der Winkel NBO $=$ B $= 145^0\,39'\,50'',5$
in Zobten wurde gemessen: $\angle m = 52^0\,44'\,22'',2$
$\angle n = 38^0\,37'\,38'',3$,

man sucht die Entfernungen r, r', r''.

Auflösung. Man suche erst die beiden Winkel BNZ $= x$ und BOZ $= y$. Da die Summe der Winkel jedes Vierecks 360^0 beträgt, so ist $x + y = 360^0 - (\mathrm{B} + m + n) = 122^0\,58'\,9''$, also $\frac{x+y}{2} = 61^0\,29'\,4'',5$. Nun ist:

$$(1)\ \frac{\sin y}{\sin n} = \frac{r}{b} \text{ und } (2)\ \frac{\sin m}{\sin x} = \frac{a}{r}.$$



Multipliziert man (1) und (2), so ist

$$\frac{\sin m \cdot \sin y}{\sin n \cdot \sin x} = \frac{a}{b} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{a \cdot \sin n}{b \cdot \sin m} = tg\, v \ldots\ldots (\mathrm{Y})$$

wo der Hilfswinkel v leicht zu finden und als bekannt anzusehen ist.

Aus der Gleichung $\frac{\sin y}{\sin x} = tg\, v$ folgt nun:

$$1 - \frac{\sin y}{\sin x} = 1 - tg\, v \text{ und } 1 + \frac{\sin y}{\sin x} = 1 + tg\, v,$$

$$\text{d. i. } \frac{\sin x - \sin y}{\sin x} = 1 - tg\, v; \quad \frac{\sin x + \sin y}{\sin x} = 1 + tg\, v$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{1 - tg\, v}{1 + tg\, v}$$

$$\frac{tg\, \frac{1}{2}(x - y)}{tg\, \frac{1}{2}(x + y)} = tg\,(45 - v) \text{ (§§ 51 und 52).}$$

Folglich $tg\, \frac{x-y}{2} = tg\, \frac{x+y}{2} \cot (45 + v)$, [§ 5] oder

$tg\, \frac{x-y}{2} = tg\, 61^0\,29'\,4'',5 \cdot \cot\,(45^0 + v)$, worin $tg\, v = \frac{a \cdot \sin n}{b \cdot \sin m}$.

$$\begin{aligned} lg\ a &= 3{,}9152584 \\ lg\ sin\ n &= 9{,}7953599 \\ \text{d. E. } lg\ b &= 6{,}1540200 \\ \text{d. E. } lg\ sin\ m &= \underline{0{,}0991463} \\ lg\ tg\ v &= 9{,}9637846 \\ v &= 42^0\ 36'\ 49'',8 \\ 45^0 + v &= 87^0\ 36'\ 49'',8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lg\ tg\ 61^0\ 29' \ldots &= 0{,}2649570 \\ lg\ cot\,(45^0 + v) &= \underline{8{,}6198293} \\ lg\ tg\,\frac{x-y}{2} &= 8{,}8847863 \\ \frac{x-y}{2} &= 4^0\ 23'\ 9'',2. \end{aligned}$$

Mithin ist: $x = 65^0\ 52'\ 13'',7$ und $y = 57^0\ 5'\ 55'',3$.

Nachdem nun x und y gefunden, hat man aus (1):

$$r = b\,\frac{sin\ y}{sin\ n} \text{ oder auch } r = a\,\frac{sin\ x}{sin\ m},$$

$$\text{dann: } \frac{r'}{a} = \frac{sin\,(x+m)}{sin\ m}, \text{ woraus: } r' = a\cdot\frac{sin\,(x+m)}{sin\ m}.$$

$$\text{Ferner ist: } \frac{r''}{b} = \frac{sin\,(y+n)}{sin\ n}, \text{ woraus: } r'' = b\cdot\frac{sin\,(y+n)}{sin\ n}$$

$lg\,b = 3{,}8459800$	$lg\,a = 3{,}9152584$	$lg\,b = 3{,}8459800$
$lg\ sin\,y = 9{,}9240764$	$lg\,sin(x+m) = 9{,}9434449$	$lg\,sin(y+n) = 9{,}9978276$
$lg'\,sin\,n = 0{,}2046401$	$lg'\ sin\,m = 0{,}0991463$	$lg'\ sin\,n = 0{,}2046401$
$lg\,r = 3{,}9746965$	$lg\,r' = 3{,}9578496$	$lg\,r'' = 4{,}0484477$
$r = 9434{,}01$	$r' = 9075{,}06$	$r'' = 11180{,}15.$

Anmerkung. Man hätte x aus Y (s. oben) auch durch

$$\frac{sin\,(122^0\ 58'\ 9'' - x)}{sin\ x} = \frac{a\ sin\ n}{b\ sin\ m}, \text{ oder}$$

$$\frac{sin\ 122^0\ cos\ x - cos\ 122^0\ sin\ x}{sin\ x} = \frac{a\ sin\ n}{b\ sin\ m}, \text{ d. i.}$$

$$sin\ 122^0\ cot\ x - cos\ 122^0 = \frac{a\ sin\ n}{b\ sin\ m}$$

finden können.

67 b.

* Durch Benutzung eines Hilfswinkels lassen sich bequeme Formeln zur Berechnung der reellen Wurzeln x', x'' einer verwickelten quadratischen Gleichung aufstellen. Man erhält nämlich, unter Berücksichtigung der Vorzeichen von p und q, aus:

$$(1)\quad x^2 + px = q$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q} \cdot \frac{p^2}{p^2}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}.$$

Setzt man jetzt $tg\,u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, so ist (§ 44, 7):

$$x = \tfrac{1}{2}p\left(-1 \pm \frac{1}{\cos u}\right) = \tfrac{1}{2}p\left(\frac{-\cos u \pm 1}{\cos u}\right).$$

Die beiden reellen Wurzeln sind also:

$$x' = \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{1-\cos u}{\cos u} = p \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{\cos u},$$

$$x'' = -\tfrac{1}{2}p \cdot \frac{1+\cos u}{\cos u} = -p \cdot \frac{\cos^2 \frac{1}{2}u}{\cos u}.$$

Aus $tg\,u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ folgt $p = \frac{2\sqrt{q}}{tg\,u} = 2\sqrt{q} \cdot \frac{\cos u}{\sin u}$.

Wird dieser Wert von p substituiert, so ist:

$$x' = 2\sqrt{q} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{\sin u} = 2\sqrt{q} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{2 \sin \frac{1}{2}u \cos \frac{1}{2}u}, \text{ oder}$$

$$x' = tg\,\tfrac{1}{2}u \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = -\frac{\sqrt{q}}{tg\,\frac{1}{2}u}.$$

Auf dieselbe Weise findet man aus:

$$(2) \quad x^2 - px = q,$$

wenn wiederum $tg\,u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ gesetzt wird:

$$x' = -tg\,\tfrac{1}{2}u \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = \frac{\sqrt{q}}{tg\,\frac{1}{2}u}.$$

Ferner hat man aus:

$$(3) \quad x^2 + px = -q$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}.$$

Ist nun $4q < p^2$, so sind beide Wurzeln reell und negativ. Um sie zu erhalten, setze man: $\sin v = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, so ist:

$$x = -\tfrac{1}{2}p\,(1 \mp \cos v),$$

mithin, indem man hierin den Wert von $p = \frac{2\sqrt{q}}{\sin v}$ substituiert, die beiden Wurzeln:

$$x' = -tg\,\tfrac{1}{2}v \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = -\frac{\sqrt{q}}{tg\,\frac{1}{2}v}.$$

Ebenso findet man, wenn $4q < p^2$ und wiederum $\sin v = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ gesetzt wird, aus:

$$(4) \quad x^2 - px = -q$$

$$x' = \frac{\sqrt{q}}{tg\,\frac{1}{2}v} \text{ und } x'' = tg\,\tfrac{1}{2}v \cdot \sqrt{q}.$$