Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1884

Einleitung

urn:nbn:de:bsz:31-273442

Erster Teil.
Ebene Trigonometrie.

Einleitung.

Die Elementar-Geometrie lehrt schon, daſs unter allen räumlichen Gröſsen das einfache Dreieck insofern sich am wichtigsten zeigt, als es gleichsam ein Schlüssel ist, durch dessen Vermittelung wir zur Kenntnis der meisten übrigen Figuren gelangen. Kreis und Dreieck sind höchst verschiedene Gestalten, aber nur durch Hilfe des Dreiecks konnten wir die vielen merkwürdigen Eigenschaften des Kreises entdecken, seinen Umfang und seinen Inhalt finden. Dasselbe gilt von vielen anderen räumlichen Gröſsen, Kegel, Kugel etc. Nicht allein die reine Geometrie kommt auf das einfache Dreieck zurück, sondern fast auch die ganze praktische Geometrie, mithin ganze, für das bürgerliche Leben wichtige und unentbehrliche Wissenschaften. Geodäsie (Geographie, Land- und Seekarten), Schiffahrtskunde, Astronomie, Mechanik, Optik etc. konnten erst in neuerer Zeit durch eine vervollkommnete Theorie des Dreiecks (Trigonometrie) fest begründet, praktisch sicher und fruchtbar gemacht werden. Aus diesen Gründen ist die vollständige Theorie des Dreiecks (Trigonometrie) von so groſser Wichtigkeit für die Wissenschaft selbst und für das praktische Leben, und man kann behaupten, einer der wichtigsten Teile der gesamten Mathematik, und deshalb ein gründliches Studium derselben die darauf verwandte Zeit und Mühe reichlich lohnend.

Aus der Elementar-Geometrie wissen wir, durch welche von den sechs Bestandteilen eines Dreiecks (drei Seiten und drei

Winkel) die übrigen bestimmt sind, mithin das ganze Dreieck vollkommen bestimmt ist, nämlich durch:

1. Zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel.
2. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.
3. Alle drei Seiten.
4. Zwei Seiten und den der gröſseren dieser beiden Seiten gegenüber liegenden Winkel.

Auch lehrt die Geometrie das Verfahren, wenn irgend drei dieser Bestimmungsstücke der Gröſse nach gegeben sind, die dadurch bestimmte Gröſse der übrigen drei Stücke durch Konstruierung des ganzen Dreiecks zu finden.

In rein theoretischer Hinsicht läſst sich gegen die Richtigkeit dieses zeichnenden Verfahrens auch nichts einwenden, in praktischer Hinsicht aber, wo möglichste Genauigkeit gefordert wird, ist dieses Verfahren, wegen Unzulänglichkeit unserer Sinne und Unvollkommenheit der beim Konstruieren gebrauchten Werkzeuge, höchst selten zuverlässig und genügend, oft auch ganz unausführbar.

Um dieses einleuchtend zu machen, bedarf es nur eines Beispiels aus der Geodäsie.

Angenommen: es solle die Entfernung eines Punktes, S, von einem Punkte, A, bestimmt werden. Ist die Entfernung wegen eines zwischenliegenden Hindernisses nicht unmittelbar zu messen, so muſs es durch Hilfe eines erst zu bildenden Dreiecks geschehen.

Es werde deshalb eine beliebig groſse sogenannte Standlinie, AB, unmittelbar und möglichst genau gemessen, ebenso die beiden Winkel A und B an derselben, mittelst eines bis auf die Sekunde genau messenden Winkelmessers,

z. B. $AB = 800$ Meter, $\angle A = 78^0\, 14'\, 36''$; $\angle B = 85^0\, 20'\, 17''$.

Wollte man nun aus diesen in Zahlen gegebenen Gröſsen die fragliche Länge der Linie AS durch Zeichnung finden, so müſste man erst ein ähnliches Dreieck konstruieren, und also nach einem verjüngten Maſsstabe eine Linie, $ab = 800$ Meter, auf einem Zeichenbrette abstecken und hieran die Winkel $a = A$, $b = B$ zeichnen. So groſs dann die Linie *as*, nach demselben verjüngten Maſsstabe gemessen, ist, so groſs müſste AS in der Wirklichkeit sein, wenn das mit ABS ähnliche Dreieck *abs* vollkommen genau gezeichnet wäre. Diese Genauigkeit ist aber durch Zeichnung schon deshalb nicht möglich, weil sich die, bis auf die Sekunde genau gemessenen Winkel nicht so genau wieder zeichnen lassen. Ein paar Minuten gröſser oder kleiner könnte aber, namentlich wenn die Summe der beiden Winkel A, B nahe an 180° käme, einen Fehler verursachen, wodurch die Länge von *as*, also auch AS um mehr als die Hälfte zu groſs oder zu klein ausfiele, abgesehen von der groſsen Umständlichkeit dieses zeichnenden Verfahrens, und daſs auſserdem der Durchschnittspunkt *s* eine so groſse Entfernung von *a* und *b* haben könnte, daſs die Linie *as*, *bs* fast parallel liefen, auf dem Zeichenbrette, und wenn es auch die Gröſse einer Provinz hätte, gar nicht zum Durchschnitt kämen, und deshalb gar keine Zeichnung möglich wäre. Eben so ungenaue Resultate würde das Konstruktionsverfahren geben, wenn man darnach aus den drei in Zahlen gegebenen Seiten eines Dreiecks die Gröſsen der dadurch bestimmten Winkel in Zahlen genau finden wollte.

Diese Beispiele, deren wir nicht nur aus der Geodäsie, sondern auch aus anderen Teilen der angewandten Mathematik noch viele anführen könnten, wo man nämlich aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten mit möglichster Genauigkeit finden soll, zeigen deutlich, daſs dies, aus angeführten Gründen, durch geometrische Konstruktionen durchaus unmöglich ist, und daſs wir in allen solchen Fällen auf genaue und sichere Praxis entweder ganz verzichten, oder noch ein anderes, von unsern Sinnen und Werkzeugen unabhängiges Verfahren erfinden, kurzum, die Theorie des Dreiecks erst noch vervollkommnen müssen, und es fragt sich nun, ob und wie sich dieser wichtige Gedanke, den, wie wir eben angedeutet, nicht müſsige Spekulationen, sondern vielfache, rein praktische Bedürfnisse hervorgerufen habe, verwirklichen lasse?

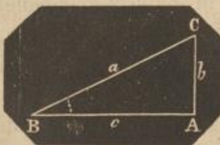
Der Einfall: Hilfe in der Arithmetik zu suchen, stellt sich hier von selbst ein. Denn, könnten wir allgemeine arithmetische Regeln finden, nach welchen man aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten Stücke berechnen könnte, so wäre damit jener Gedanke offenbar verwirklicht, weil alle durch Rechnung erhaltenen Resultate reines Produkt des Geistes, mithin von der Unzulänglichkeit unserer Sinne ganz unabhängig, also vollkommen genau und zuverlässig sind, wie es die Arithmetik selbst ist.

Dafs solche allgemeine arithmetische Regeln existieren müssen, läfst sich wenigstens mutmafsen. Auch sind diese Regeln, obwohl die Wissenschaft, zu ihrem eigenen und zum grofsen Nachteil der Praxis, wegen vernachlässigter Ausbildung der den Alten fast gänzlich unbekannten arithmetischen Wissenschaften, sehr lange darauf warten mufste, in den letzten anderthalb hundert Jahren gefunden, und machen zusammen nun denjenigen Teil der Mathematik aus, welchem man den Titel Trigonometrie (Dreiecksrechnung) giebt.

Der Zweck und Begriff dieser jetzt zu bildenden Wissenschaft ist vorläufig nun wohl so deutlich ausgesprochen, dafs der Anfänger, dadurch vorbereitet und angeregt, auf den Gang der Erfindung und Entwickelung gespannt sein wird.

Denn so leicht ist die Sache nicht. Und wer den unaufhaltsamen Fortschritt in den Wissenschaften mit Aufmerksamkeit betrachtet und wahrnimmt, auf welche sinnreiche Weise der menschliche Geist scheinbar unüberwindliche Schwierigkeiten zu beseitigen weifs, der wird auch hier das Verdienst desjenigen anerkennen und dessen Scharfsinn bewundern, der als der erste Erfinder der Trigonometrie betrachtet werden mufs. Auf welche sinnreiche Weise er zu Werke ging, wollen wir jetzt zeigen.

Durch die Überlegung, dafs jedes Dreieck durch ein Perpendikel immer in zwei rechtwinklige zerlegt werden kann, und deshalb die ganze Trigonometrie auf die des einfacheren rechtwinkligen Dreiecks zurückkommt, war die allgemeine Aufgabe vorläufig auf die weit einfachere gebracht: aus beliebigen in Zahlen gegebenen Bestimmungsstücken eines r e c h t w i n k l i g e n Dreiecks die übrigen Stücke desselben durch Rechnung zu finden; und es war ein sehr glücklicher, gleich auf die beste und bequemste Methode führender Gedanke, durch Herbeischaffung folgender H i l f s g r ö f s e n diese Aufgabe leicht zu lösen.



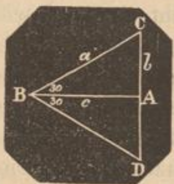
Man denke sich, sagte der erste Erfinder, auf dem einen Schenkel eines bestimmten Winkels, B, ein beliebiges Stück, BC, abgeschnitten und von dem Endpunkt C eine Senkrechte, CA, auf den andern Schenkel gefällt, so entsteht ein bei A rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten a, b, c heifsen mögen.

Denken wir uns die Längen dieser Seiten nach einer beliebigen Längeneinheit gemessen und durch Zahlen ausgedrückt, so ist klar, daſs die Verhältnisse von je zwei dieser Seiten oder die unbenannten Quotienten, die je zwei Seiten durch einander dividiert geben $\left(\text{wie } \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}^{*}\right)$, durch die Gröſse des Winkels B vollkommen bestimmt sind.

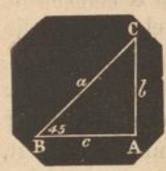
Wäre z. B. $\angle B = 30^0$, so wäre:

$$\frac{b}{a} = \tfrac{1}{2};\ \frac{c}{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3};\ \frac{b}{c} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3};\ \frac{c}{b} = \sqrt{3}.$$

Denn denkt man den Winkel $B = 30^0$ auch unterhalb BA angetragen und CA bis D verlängert, so ist BCD ein gleichseitiges Dreieck (weil jeder Winkel $= 60^0$), folglich $b = \frac{1}{2}a$; $c = \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, mithin $\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$; $\frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\frac{b}{c} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{c}{b} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}$.



Ferner ist auch klar, daſs diese **vier** Quotienten nur von der Gröſse des Winkels B, nicht aber von der absoluten Gröſse der Seiten a, b, c abhängen; denn wird eine dieser Seiten, z. B. $BC = a$, 2, 3 $\cdots n$mal so groſs genommen, so werden (vermöge Ähnlichkeit der Dreiecke) auch die beiden andern Seiten b und c in demselben Verhältnisse gröſser, und die Quotienten bleiben deshalb für denselben Winkel noch dieselben. In der Figur zum 7. Satze ist z. B. für denselben $\angle a$ das Verhältnis $\frac{MP}{CM} = \frac{AT}{CT}$.



Ändern sich jedoch die Winkel, so ändern sich auch die Quotienten.

Wäre z. B. $\angle B = 45^0$, so wären die erwähnten Quotienten:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\tfrac{1}{2}};\ \frac{c}{a} = \sqrt{\tfrac{1}{2}};\ \frac{b}{c} = 1,\ \frac{c}{b} = 1.$$

Denn wenn in dem bei A rechtwinkligen Dreieck CAB der Winkel $B = 45^0$ ist, so ist auch $\angle C = 45^0$, und die beiden Katheten b und c sind einander gleich. Setzen wir die Länge dieser

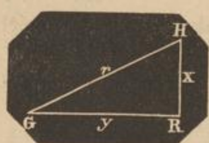
*) Die beiden Quotienten $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ sind überflüssig.

gleichen Katheten $= x$, so ist: $x^2 + x^2 = a^2$ oder $x^2 = \frac{1}{2}a^2$, mithin $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$; folglich, wie oben, $\frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\frac{b}{c} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1$ etc.

Könnte man nun diese vier Quotienten, wie hier für 30^0 und 45^0, auch für jeden andern Zustand des Winkels B, von 0^0 bis 90^0 berechnen, und dann alle nebst den zugehörigen Winkeln in einer Tabelle leicht übersichtlich zusammenstellen, etwa so:

Winkel	Quotienten $\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{c}{b}$
$0^0\,0'\,0''$	...	...	...	...
.				
.				
.				
$30^0\,0'\,0''$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$45^0\,0'\,0''$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	1
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

so leuchtet der grofse praktische Nutzen einer solchen Tabelle leicht ein, und wir wollen zeigen, dafs durch Anfertigung derselben die Aufgabe der Trigonometrie schon so gut wie gelöst wäre. Denn wären dann von einem rechtwinkligen Dreieck (und darauf kommt, wie gesagt, alles zurück) zwei Bestimmungsstücke gegeben, so könnte man mittelst einer solchen vollständigen trigonometrischen Tafel die übrigen Stücke durch eine einfache Multiplikation oder Division sehr leicht berechnen.



Wären z. B. in dem bei R rechtwinkligen Dreieck GHR der Winkel $G = 30^0$, die Hypotenuse $GH = r = 2530$ Meter gegeben, und die dem Winkel G gegenüber liegende Senkrechte $HR = x$, so wie auch die ihr anliegende $GR = y$ zu bestimmen verlangt, so giebt offenbar x durch r dividiert denselben Quotienten, welcher in der ersten Spalte der Tafel neben dem Winkel von 30^0 steht; daher $\frac{x}{2530} = \frac{1}{2}$, und hieraus durch eine leichte Multiplikation $x = 1265$ Meter. Ebenso ist der Quotient $\frac{y}{2530}$ für den Winkel $G = 30^0$ vollkommen bestimmt. Sucht man diesen Quotienten neben dem Winkel von 30^0 in der zweiten Spalte, so ist $\frac{y}{2530} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $y = 2530 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Einen gleichen Nutzen gewähren offenbar die beiden andern Spalten, wenn von einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete und ein spitzer Winkel gegeben sind; auch merkt man wohl schon, wie die Tafel (als vollständig vorausgesetzt) dienen kann, um in einem rechtwinkligen Dreieck die beiden spitzen Winkel zu bestimmen, wenn irgend zwei Seiten desselben gegeben sind.

Der grofse Nutzen einer solchen vollständigen Tafel ist aus dem Gesagten nun wohl einleuchtend, und der Erste, der den Gedanken an eine solche Tabelle fafste, mufs als der eigentliche Erfinder der Trigonometrie betrachtet werden, denn alles folgende, die ganze Trigonometrie, ist nur Bearbeitung und Ausführung dieses Gedankens, woran nun Viele teilnehmen und ihren Scharfsinn zeigen konnten, und den die Zeit bald zur Reife bringen mufste; denn eines folgt aus dem andern fast von selbst. Hier gilt wieder, was Descartes von den Fortschritten der Mathematik überhaupt sagt: „wenn man nur erst die zwei oder drei ersten Glieder hat, so ist es nicht schwer, auch die übrigen zu finden.“