Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Anhang

urn:nbn:de:bsz:31-264709

Anhang.

Anmerkungen und Ergänzungen.

311.

Zu § 1. Man mutmafst, dafs zu unserm, allgemein üblichen Verfahren, mit zehn Wörtern alle Zahlen zu benennen, die zehn Finger Veranlassung gegeben haben. Mit Gewifsheit kann man aber dieses nicht behaupten, da es ursprünglich ganz willkürlich war, und man die Zahlen auch ebensogut mit mehr oder weniger Grundwörtern hätte benennen können. So hätte man z. E. anfangs nur bis vier zu zählen brauchen, und dann, statt für die auf vier folgende Zahl ein neues Wort zu ersinnen, eins und vier, oder kürzer einsvier sagen können, dann zweivier, dreivier, viervier oder zweimal vier; ferner eins und zweimal vier &c. Die Wörter eins und zweimalvier, zwei und zweimalvier &c. hätte man dann auch wie § 1, durch Auslassung der Silbe „mal“ und Veränderung der Silbe vier in kürzere verwandeln können. — Nach Aristoteles' Berichten hat es ein thrakisches Volk gegeben, welches auf diese Weise zählte. Noch jetzt soll ein zehnfingeriges Volk, die Jalofs, in der Nachbarschaft des Senegals wohnen, welches zur Benennung der Zahlen nur fünf Grundwörter gebraucht, und so zählt:

ben,	*niard,*	*niet,*	*guyanet,*	*guiron,*	*guiron ben,*	*guiron niard,*
(ein)	(zwei)	(drei)	(vier)	(fünf)	(fünf und eins)	(fünf und zwei)

Mehreres hierüber, sowie über die Zahlzeichen der Römer, Griechen, Hebräer und anderer Völker sehe man in Montucla, histoire des Mathématiques. Tom I, pag. 45 et 375 und Klügel's Mathem. Wörterbuch 5. Teil, pag. 1166 u. f.

312.

Zu § 6. 1) Dafs man statt 10 auch jede andere beliebige Menge Einheiten als Grundzahl eines Zahlensystems annehmen kann, und dann nach demselben einfachen Gesetz zur Darstellung aller Zahlen nicht mehr Ziffern braucht, als die gewählte Grundzahl Einheiten hat, ist klar. Hätte man z. E. die Übereinkunft getroffen, vier zur Grundzahl eines Zahlensystems zu machen, mithin diese Grundzahl vier als Einheit ersten Ranges und also vier solche Einheiten ersten Ranges, d. i. sechzehn als eine neue Einheit zweiten Ranges anzusehen u. s. f., so hätte man auch nur die vier Ziffern 1, 2, 3, 0 nötig gehabt, um damit, in dem hiernach entstehenden Zahlensystem, die sogenannte *Tetradik*, alle möglichen Zahlen zu bezeichnen. In diesem System ist also jede Einheit einer links stehenden Ziffer viermal so grofs, als die Einheit der nächst rechts stehenden Ziffer; weil nämlich je vier Einheiten irgend eines Ranges eine Einheit nächst höhern Ranges machen, so mufs man vier als Einheit ersten Ranges durch 10 bezeichnen, fünf durch 11; sechs, 12; sieben, 13; acht, als zwei Einheiten ersten Ranges, durch 20; neun, 21; elf, 23; zwölf, 30; fünfzehn, 33; sechzehn, als vier Einheiten ersten Ranges oder eine Einheit zweiten Ranges durch 100; siebzehn 101 u. s. f.

Ebenso hätte man auch zwei als Grundzahl nehmen und nach dem einfachen Gesetz, dafs je zwei Einheiten irgend eines Ranges eine Einheit nächst höheren Ranges machen sollen, blofs mit den beiden Ziffern 1 und 0 alle Zahlen bezeichnen können, nämlich: eins, 1; zwei als Einheit ersten Ranges durch 10; drei, 11; vier, als zwei Einheiten ersten oder eine Einheit zweiten Ranges, durch 100; fünf 101; sechs 110; sieben 111; acht, als zwei Einheiten zweiten oder eine Einheit dritten Ranges, durch 1000; neun, 1001; zehn, 1010 u. s. f. Dieses System, die sogenannte *Dyadik*, sollen vor Zeiten die Chinesen gebraucht, statt des Stellzeichens 0 aber einen Querstrich (—) gesetzt haben. Aufser einem praktischen Nutzen dieses Systems zur Entdeckung merkwürdiger Eigenschaften der Zahlen und deren Teilbarkeit, wollte Leibnitz noch darin ein treues Bild der Schöpfung finden und suchte durch Erklärung desselben und durch Vermittelung des Jesuiten Grimaldi, Präsidenten des mathematischen Tribunals in China, die Chinesen zum Übertritt zur christlichen Religion zu bewegen.

Gleicherweise hätte man auch die Zahl zwölf zur Grundzahl machen und für die beiden Zahlen zehn und elf noch zwei einfache Zeichen, wie etwa α und β, einführen können. Hiernach würde man also schreiben: neun, 9; zehn α; elf β; zwölf (als Einheit ersten Ranges) 10; dreizehn 11; dreiundzwanzig 1 β; vierundzwanzig 20 u. s. f. Es ist noch gar nicht lange, als man ernstlich darauf dachte, dieses System, die *Duodekadik*, statt der *Dekadik*, einzuführen, und zwar zuerst aus dem theoretischen Grunde, weil es zwölf Apostel gegeben hat; später aber aus dem praktischen Grunde, weil die Zahl 12 mehr Faktoren als die Zahl zehn hat, welches beim Rechnen bedeutende Vorteile gewähren sollte. Sei es nun, dafs die Mathematiker diesen praktischen Nutzen, oder die Wichtigkeit jenes frommen Grundes nicht begreifen können, sie haben beides nicht beherzigt und nichts zur Ausführung jener Verbesserung beigetragen. Man sieht also, dafs unendlich viele Zahlensysteme möglich sind, und es in der That zu verwundern, dafs nicht die alten Griechen und namentlich Archimedes, der geistreichste Mathematiker unter ihnen, auf die wichtige Erfindung eines solchen Zahlensystems gekommen ist. Der Vergleichung wegen wollen wir hier einige Systeme nebeneinander stellen:

Dyadik	*Triadik*	*Tetradik*	*Pentadik*	*Hexadik*	*Heptadik*	*Octadik*	*Enneadik*	*Dekadik*	*Enneadekadik*	*Duodekadik*	&c.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	·
10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	·
11	10	3	3	3	3	3	3	3	3	3	·
100	11	10	4	4	4	4	4	4	4	4	·
101	12	11	10	5	5	5	5	5	5	5	·
110	20	12	11	10	6	6	6	6	6	6	·
111	21	13	12	11	10	7	7	7	7	7	·
1000	22	20	13	12	11	10	8	8	8	8	·
1001	100	21	14	13	12	11	10	9	9	9	·
1010	101	22	20	14	13	12	11	10	α	α	·
1011	102	23	21	15	14	13	12	11	10	β	··
1100	110	30	22	20	15	14	13	12	11	10	·

2) Die Frage, welches von allen Zahlensystemen wohl das beste sei, lassen wir dahin gestellt sein. Jedes ist praktisch brauchbar. Uns mufs

aber schon aus dem haltbaren Grunde die Dekadik das beste sein, weil es in der zivilisierten Welt überall gebraucht wird, und wir darnach zu schreiben einmal gewohnt sind. Übrigens macht es auch nur die Ungewohntheit, wenn man nicht in allen Systemen gleich fertig schreiben und rechnen kann. — Soviel ist indessen klar, je gröfser die Grundzahl eines Zahlensystems, je gröfser das dazu erforderliche Einmaleins, je schwerer, aber je schneller ist auch danach zu rechnen und umgekehrt. Die Chinesen in ihrer Kindheit brauchten zu ihrer Dyadik gar kein Einmaleins.

3) Nichts ist leichter, als eine Zahl, welche in einem beliebigen System geschrieben ist, in ein anderes zu übersetzen. Soll z. E. die tetradisch gebildete Zahl 210232, dekadisch geschrieben werden, so braucht man nur jede Ziffer mit dem Wert ihrer Einheit, d. h. so oft mit 4 zu multiplizieren, als ihr Rang es angiebt. Die erste rechts stehende Ziffer ist vom 0ten Range und stellt also blofse Einheiten dar, die zweite Ziffer ist aber vom ersten Range, wo also jede Einheit 4 Einheiten in der Dekadik gilt, die dritte Ziffer ist vom zweiten Range und jede Einheit gilt hier also $4.4 = 16$. Mithin ist die tetradisch geschriebene Zahl 210232 dekadisch ausgedrückt $= 2350$.

$$\underbrace{\scriptstyle 1024}_{2}\;\underbrace{\scriptstyle 256}_{1}\;\underbrace{\scriptstyle 64}_{0}\;\underbrace{\scriptstyle 16}_{2}\;\underbrace{\scriptstyle 4}_{3}\;\underbrace{\scriptstyle 1}_{2} = \left\{\begin{array}{r} 2 = 2 \\ 3.4 = 12 \\ 2.16 = 32 \\ 0.64 = 0 \\ 1.256 = 256 \\ 2.1024 = 2048 \\ \hline 2350 \end{array}\right.$$

Ebenso findet man:

Dyadik *Dekadik*

$101011 = 43$

$$\underbrace{\scriptstyle 32}_{1}\;\underbrace{\scriptstyle 16}_{0}\;\underbrace{\scriptstyle 8}_{1}\;\underbrace{\scriptstyle 4}_{0}\;\underbrace{\scriptstyle 2}_{1}\;\underbrace{\scriptstyle 1}_{1} = \left\{\begin{array}{r} 1 = 1 \\ 1.2 = 2 \\ 0.4 = 0 \\ 1.8 = 8 \\ 0.16 = 0 \\ 1.32 = 32 \\ \hline 43 \end{array}\right.$$

4) Soll umgekehrt eine dekadisch gebildete Zahl, z. B. 2350, in die Tetradik übertragen werden, so mufs man die vorgegebene Zahl wiederholt durch die Grundzahl 4 dividieren; der erste Quotient giebt die Anzahl Einheiten vom ersten Range, und der erste Rest die Anzahl Einheiten vom 0ten Range; der zweite Quotient giebt die Anzahl Einheiten vom zweiten und der zweite Rest die vom ersten Range &c.; z. B.:

(1)

2350	$\overset{4}{\smile}$ 587	$\overset{4}{\smile}$ 146	$\overset{4}{\smile}$ 36	$\overset{4}{\smile}$ 9	$\overset{4}{\smile}$ 2
2	3	2	0	1	2

(2)

43	$\overset{2}{\smile}$ 21	10	5	2	1
1	1	0	1	0	1

Also: 2350 in der Dekadik $= 210232$ in der Tetradik
43 " " " $= 101011$ " " Dyadik.

5) Der Mechanismus der vier Spezies ist in allen Systemen gleich. Bei der Addition in der Tetradik z. B. braucht man nur für je vier Einheiten einer Reihe eine Einheit in die nächst folgende zu übertragen &c., wie folgende Beispiele zeigen:

	Dyadik.	*Tetradik.*	*Duodekadik.*
Addition:	10101001	301202	$167\beta89\alpha$
	1111001	133112	$\beta292\alpha1$
Summe:	100100010	1100320	$25\alpha8\beta7\beta$

Subtraktion:	100100010	1100320	$25\alpha 8\beta 7\beta$
	1111001	301202	$\beta 292\alpha 1$
Rest:	10101001	133112	$167\beta 89\alpha$
Multiplikation:	10111	2302	$9\beta 0\alpha$
	1011	213	$4\beta 3$
	10111	20112	25926
	10111	2302	91192
	101110	11210	33834
	11111101	1230132	$40\beta 9\alpha 46$
	Dyadik.		*Tetradik.*

Division:

		Quotient:
10111	11111101	1011
	10111	
	100010	
	10111	
	10111	
	10111	

2302	1230132	213
	11210	
	10313	
	2302	
	20112	
	20112	

6) Wenn eine Zahl nur mit zweierlei Ziffern geschrieben wird, so ist leicht zu erkennen, durch welche, mit denselben beiden Ziffern geschriebene, Zahlen sie teilbar ist. So sieht man z. B. gleich, dafs die Zahl 95959595 durch 95 und 9595 teilbar ist. Weil nun in der Dyadik alle Zahlen (auch die bei der Subtraktion darin entstehenden Reste) mit denselben beiden Ziffern 1 und 0 geschrieben werden, so begreift man, weshalb Leibnitz dieses System zur Entdeckung der Teilbarkeit der Zahlen geeigneter fand. Man sieht z. B., dafs die Zahl 100100100100 durch 100, 1001, 10, 11 &c. teilbar sein mufs. Wird also eine Zahl in die Dyadik übersetzt, so sind ihre Faktoren leichter zu erkennen. So ist z. E. die Zahl 31393 dyadisch geschrieben = 111101101000001 und ein geübter Blick sieht nun sogleich, dafs sie durch 111, = 7; 1101, = 13; 10001, = 17; 10011, = 19 teilbar ist. (S. Lamberts mathem. Schriften.)

313.

Zu § 10. Der in § 10 angeführte Satz: dafs man die beiden Faktoren eines Produkts miteinander verwechseln darf, läfst sich folgendermafsen beweisen: Ob man den Faktor b selbst oder jede darin enthaltene Einheit $a$mal setzt, das ist einerlei. Ebenso ist es einerlei, ob man die Einheit $a$mal, oder a einmal nimmt, $a.1=1.a=a$. Setzt man nun jede in b enthaltene Einheit $a$mal, so hat man offenbar a selbst, $b$mal gesetzt. Es ist nämlich, wenn man b in Einheiten auflöst: $a.b=a(1+1+1+1+\ldots)=a+a+a+a+\ldots=b.a$.

Beispiel: $4.5=4.(1+1+1+1+1)=(4+4+4+4+4)=5.4$

Dieser Satz ist ganz allgemein und läfst sich auf beliebig viele Faktoren ausdehnen, indem man nach dem Schlufs von n auf $n+1$ von zwei Faktoren auf drei, von drei auf vier schliefst &c. Es ist z. B. $a.bc=a.cb=bc.a=cb.a$, wo nach dem vorhergehenden Satz blofs zwei Faktoren, erstlich b und c, dann bc und a verwechselt sind. Nun ist aber auch $ab.c=a.bc$; denn ob man c erst $b$mal und dann diese b gleichen Summanden wieder $a$mal, oder ob man c gleich abmal setzt, das ist einerlei, indem man in beiden Fällen ab gleiche Summanden (c) erhält. Ebenso ist $bc.a=b.ca$, mithin $abc=acb=cab=cba=bac=bca$ &c.

314.

Zu § 24. 1) Die Zahlen 2 und 5 sind in 10, mithin $2.2=4$ und $5.5=25$ in $10.10=100$; $2.2.2=8$ und $5.5.5=125$ in 1000 ohne Rest enthalten.

Um nun zu beweisen, daſs eine Zahl, z. B. 276, durch 2 teilbar sein muſs, weil ihre letzte Ziffer es ist, denke man sich diese letzte Ziffer davon getrennt und die Zahl als eine zweiteilige geschrieben, nämlich $276 = 270 + 6 = 27.10 + 6$. Weil nun der letzte Teil 6 vermöge Voraussetzung und der erste Teil 27.10 wegen des Faktors 10 durch 2 teilbar ist, so muſs es auch die Summe $27.10 + 6 = 276$ sein (§ 21); weil $\frac{276}{2} = \frac{270+6}{2} = \frac{27.10}{2} + \frac{6}{2} = 27.5 + 3$. Ebenso ist der Beweis für 5; und für $2.2 = 4$; $2.2.2 = 8$ &c., wenn man die beiden letzten, drei letzten Ziffern &c. trennt. Weil z. E. die beiden letzten Ziffern der Zahl 1484 durch 4 teilbar sind, so ist es auch die ganze Zahl; denn

$$\frac{1484}{4} = \frac{1400+84}{4} = \frac{14.100}{4} + \frac{84}{4}; \qquad \frac{675}{5} = \frac{670+5}{5} = \frac{67.10}{5} + \frac{5}{5}$$

2) Eine jede Zahl läſst sich immer so zerlegen, daſs jede Ziffer mit einem Faktor von so vielen 9 multipliziert ist, als noch Ziffern folgen, und daſs der eine Teil die Quersumme aller Ziffern ist; z. B.:

$$\begin{aligned} 6453 &= 6.999 + 4.99 + 5.9 + (6+4+5+3) \\ &= 6.999 + 4.99 + 5.9 + 18 \end{aligned}$$

Es ist nämlich:

$$6453 = 6000 + 400 + 50 + 3 = 6.1000 + 4.100 + 5.10 + 3$$

ferner, da: $1000 = 999 + 1$; $100 = 99 + 1$ &c.

$$\begin{array}{rcccl} 6000 &=& 6(999+1) &=& 6.999+6 \qquad (\S\ 19) \\ 400 &=& 4(99+1) &=& 4.99+4 \\ 50 &=& 5(9+1) &=& 5.9+5 \\ 3 &=& 3 &=& 3 \\ \hline 6453 &=& \multicolumn{3}{l}{6.999+4.99+5.9+18} \end{array}$$

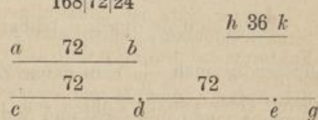
Ist also die Quersumme der Zahl 6453 durch 3 oder 9 teilbar, so sind es auch die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung und folglich auch die Zahl, als deren Summe:

$$\frac{6453}{9} = \frac{6.999 + 4.99 + 5.9 + (6+4+5+3)}{9}$$

315.

Zu § 29. Nach der § 29 gegebenen Regel findet man 24 als den gröſsten gemeinschaftlichen Faktor von 72 und 168.

168|72|24



Daſs nun die nach dieser Regel gefundene Zahl 24 wirklich ein gemeinschaftlicher Faktor und zwar der möglichst gröſste ist, ist am leichtesten einzusehen, wenn man die beiden Zahlen 72 und 168 durch Linien dargestellt denkt. Läſst man nämlich eine beliebig lange Linie die Einheit bedeuten, so stellt eine 72mal so lange Linie *ab* die Zahl 72 und ebenso *cg* die Zahl 168 dar. Ist nun (nachdem *ab* auf *cg* zweimal abgesetzt worden), der erste Rest $eg = 24$, irgend wievielmal ohne Rest in *ab* enthalten, so miſst er auch *cd*, *de* und *eg* (sich selbst) und folglich auch $cg = 168$. Ein gröſseres Maſs, wie etwa $hk = 36$, welches in *ab* folglich auch in *cd* und *de* enthalten wäre, kann nicht in der kleinern Linie *eg* und folglich auch nicht ohne Rest in $cg = 168$ enthalten sein.

Im vorstehenden Beispiel ging die Division schon beim zweiten Male auf, die Schlüsse bleiben aber offenbar dieselben, wenn sie weiter fortgesetzt werden müssen.

316.

Zu §§ 28, 52, 182.

Lehrsatz. Wenn p eine Primzahl und a und b zwei ganz beliebige Zahlen bedeuten, welche jedoch einzeln nicht durch p (ohne Rest) teilbar sind, so kann auch ihr Produkt $a.b$ nicht durch p teilbar sein.

1. **Beweis.** Wenn eine Zahl, a, durch eine Primzahl, p, ohne Rest teilbar ist, so mufs die Zahl a, in ihre einfachen Faktoren zerlegt, notwendig den einfachen Faktor p enthalten.

Wenn also zwei (oder auch mehrere) Zahlen, a, b, einzeln genommen durch eine Primzahl, p, nicht teilbar sind, so kann es auch ihr Produkt $a.b$ nicht sein. Denn da in diesem Falle weder a noch b, in einfache Faktoren zerlegt, den Primfaktor p enthält, so kann auch die Multiplikation ihrer Primfaktoren unmöglich den Primfaktor p in ihr Produkt hineinbringen, weil aus der Multiplikation mehrer Primzahlen immer eine zusammengesetzte Zahl entsteht. Hieraus folgt ferner (weil eine zusammengesetzte Zahl, a, gleich dem Produkt aus allen ihren Primzahlen ist), dafs eine Zahl, a, nicht auf verschiedene Weise in Primzahlen zerlegt werden kann.

2. **Beweis.** Sind beide Faktoren a und b gröfser als p, so dividiere man erst einen von ihnen, b durch p, bezeichne den ganzen Quotienten mit m und den Rest, der notwendig kleiner als p ist, mit r. Es sei nämlich

$$\frac{b}{p} = m + \frac{r}{p} \quad \text{oder:} \quad b = mp + r$$

und folglich (auf beiden Seiten mit $\frac{a}{p}$ multipliziert):

$$\frac{ab}{p} = ma + \frac{ar}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Könnte nun $a.b$, durch p teilbar, mithin $\frac{ab}{p}$ eine ganze Zahl sein, so müfste, weil ma eine ganze Zahl ist, notwendig auch $\frac{ar}{p}$ eine ganze Zahl, mithin ar durch p teilbar sein. Um die Unmöglichkeit zu zeigen, dividiere jetzt p durch r, setze den ganzen Quotienten $= m'$ und den Rest $= r'$. Es sei nämlich:

$$p = m'r + r'$$

folglich (mit $\frac{a}{p}$ multipliziert):

$$a = m' \frac{ar}{p} + \frac{ar'}{p}$$

Wäre nun ar durch p teilbar, mithin $\frac{m'ar}{p}$ eine ganze Zahl, so müfste notwendig auch $\frac{ar'}{p}$ eine ganze Zahl sein, weil der Betrag der rechten Seite gleich einer ganzen Zahl a sein mufs.

Dafs aber auch ar' nicht durch p teilbar sein kann, wird ebenso wie von ar bewiesen, indem man p durch r' dividiert, den Quotienten mit m'' und den Rest mit r'' bezeichnet &c. Man sieht also, dafs durch Wiederholung dieses Schlusses der jedesmal bleibende Rest r, r', r'', r''' ... von welchen keiner in p (weil p eine Primzahl) enthalten ist, immer kleiner und zuletzt $= 1$ werden mufs. Wäre also ab durch p teilbar, so müfste auch ar, ar', ar'' ......$a.1$, mithin a selbst durch p teilbar sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Ist keiner der drei Faktoren a, b, c durch die Primzahl p teilbar, so ist es auch ihr Produkt abc nicht. Denn nach dem Vorhergehenden ist es $a.b$ nicht und wenn man $ab = A$ setzt, auch $A.c = abc$ nicht &c. Dieser für die Arithmetik wichtige Lehrsatz giebt den Schlüssel zu vielen andern.

317.

Zu § 32. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist, aufser 5 und 2, keine Primzahl, wie 3, 7 &c., also auch kein Vielfaches derselben, wie 2.3, 4.7 &c., kurz keine Zahl, die sich nicht in lauter Faktoren 2 und 5 auflösen läfst, in 10, also auch nicht in 10.10 oder 100, 1000 &c. ohne Rest enthalten. Daraus folgt also, dafs kein Bruch, dessen Zähler und Nenner Primzahlen gegeneinander sind, genau durch einen Decimalbruch dargestellt werden kann, wenn sein Nenner sich nicht in lauter Faktoren, wie 2 und 5, auflösen läfst. Dafs dann aber die Decimalen immer in derselben Folge (periodisch) wiederkehren müssen, ist leicht zu begreifen. Verwandelt man z. E. den Bruch $\frac{1}{7}$ in einen Decimalbruch, indem man mit 7 in 1000... dividiert, so ist klar, dafs, da keiner von den aufeinander folgenden Resten 7 sein kann, eine von den 6 Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Rest kommen mufs, höchstens können also nur sechs verschiedene Reste stattfinden, dann mufs notwendig einer derselben zum zweitenmale und somit auch dieselben Decimalen wiederkehren. Was aber von $\frac{1}{7}$ gilt, gilt auch von jedem Vielfachen desselben $\frac{2}{7} = 2.\frac{1}{7}$ &c. So ist z. B.:

$$\tfrac{1}{7} = 0{,}142857142\ldots..$$
$$\tfrac{3}{7} = 3.\tfrac{1}{7} = 3(0{,}14285714..) = 0{,}42857142\ldots$$

Man sieht sogleich, dafs wegen der höchstmöglichen Anzahl Reste die Perioden der Decimalbrüche mindestens eine Ziffer weniger haben müssen, als der Nenner des sie erzeugenden Bruches Einheiten hat. Um aber aus einem gegebenen Nenner im voraus die Anzahl der periodischen Decimalen bestimmen zu können, mufs man sich mit § 166 angeführten merkwürdigen und lehrreichen Werke vertraut machen. So giebt z. B. jeder Bruch von der Form $\frac{1}{10^n - 1}$, n periodische Decimalen, nämlich:

$$\frac{1}{10^1 - 1} = \tfrac{1}{9} = 0{,}111..,\quad \frac{1}{10^2 - 1} = \frac{1}{100 - 1} = \tfrac{1}{99} = 0{,}0101\ldots\&c.$$

318.

Ist ein periodischer Decimalbruch gegeben, so kann man leicht den gewöhnlichen Bruch finden, aus welchem jener entstanden ist. Man setze nämlich den periodischen Bruch $= s$ und multipliziere diese Gleichung mit einer solchen Rangzahl, dafs die Perioden übereinander zu stehen kommen, und subtrahiere alsdann die erste Gleichung von der zweiten, so werden die übereinander stehenden gleichen Perioden getilgt und man erhält eine endliche Gröfse. So findet man z. B.:

$$\begin{array}{rl} & 0{,}1515\ldots = \tfrac{5}{33};\\ s = & 0{,}1515\ldots\\ 100s = & 15{,}1515\ldots.\\ \hline 99s = & 15\\ s = & \tfrac{15}{99} = \tfrac{5}{33};\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{rl} & 0{,}321321\ldots = \tfrac{107}{333};\\ s = & 0{,}321321\ldots\\ 1000s = & 321{,}321321\ldots\\ \hline 999s = & 321\\ s = & \tfrac{321}{999} = \tfrac{107}{333}.\end{array}$$

Fängt die Periode nicht gleich hinter dem Decimalzeichen an, so mufs man letzteres erst so weit vorrücken; z. B.:

$$s = 0{,}25300300\ldots$$
$$100s = 25{,}300300\ldots$$
$$100000\,s = 25300{,}300300\ldots$$
$$99900s = 25275$$
$$s = \tfrac{25275}{99900} = \tfrac{337}{1332};$$

$$s = 2{,}64242\ldots$$
$$10s = 26{,}4242\ldots$$
$$1000s = 2642{,}4242\ldots$$
$$990s = 2616$$
$$s = \tfrac{2616}{990} = \tfrac{436}{165}$$

319.

Zu § 182. Keine Potenz eines auf seine kürzeste Form gebrachten Bruches, wie z. B. $\frac{9}{4}$, kann eine reine ganze Zahl geben; denn löst man den Nenner in einfache Faktoren auf, $\frac{9}{4} = \frac{9}{2.2}$, so sieht man, daſs, wenn nicht der Zähler 9, also auch nach § 316 keine Potenz desselben, wie 9.9, 9.9.9 &c., durch die Primzahl 2 ohne Rest teilbar ist, auch durch kein Vielfaches von 2, wie 2.2=4 &c., teilbar sein kann.

Ist also die $n$te Wurzel aus einer ganzen Zahl N nicht in ganzen Zahlen möglich, so kann sie, dem strengen Begriffe nach, auch durch keinen Bruch genau dargestellt werden. Denn wäre ein solcher Bruch $\frac{a}{b}$ denkbar, so müſste ja $\sqrt[n]{N} = \frac{a}{b}$ und mithin $\left(\frac{a}{b}\right)^n = N$ sein, d. h. es müſste der Bruch $\frac{a}{b}$, $n$mal mit sich selbst multipliziert, eine reine ganze Zahl N geben, was nach § 316 unmöglich ist. Die Decimalen der irrationalen Wurzel müssen folglich ohne Aufhören und wegen § 318 ohne Perioden ins Unendliche fortlaufen.

320.

Theorie des Positiven und Negativen.

Zum zehnten Buche. (§§ 74—79.)

Wir müssen hier zuvor bemerken, daſs die Theorie der Gleichungen zuerst auf den Begriff der entgegengesetzten Gröſsen geführt hat, und daſs die Regeln, wie man mit denselben rechnen muſs, ebenfalls durch Anwendung der Gleichungen auf wirkliche Fälle gefunden sind. Erst später wurde zur Bestätigung und richtigern Erklärung diese, schon durch die Gleichungen kennen gelernte Theorie des sogenannten Positiven und Negativen, auch unabhängig von den Gleichungen, aus dem bloſsen Begriffe des Gegensatzes abgeleitet. Der Natur der Sache nach muſs aber diese so abgeleitete Theorie höchst abstrakt werden und erkünstelt scheinen. Vollkommene Klarheit kann sie erst nach und nach durch verschiedene praktische Erläuterungen erlangen, und daſs daher dieser Paragraph von einem Anfänger schon vollkommen verstanden werden sollte, ist unmöglich, aber auch (zur Aufmunterung gesagt) gar nicht notwendig. Denn die Richtigkeit der hier aus dem bloſsen Begriffe des Gegensatzes abgeleiteten Regeln folgt ganz von selbst und auf die anschaulichste Weise aus dem, was über Gleichungen gesagt ist, und man braucht daher diesen Paragraph nur vergleichungsweise zu lesen.

1. Addition. Fassen wir den Begriff der Addition in gröſserer Allgemeinheit als die Vereinigung mehrerer zusammengehöriger Teile zu einem Ganzen, bei dessen Bildung man auf die Einstimmigkeit und den Widerstreit seiner Teile Rücksicht nehmen muſs, so ist klar, daſs, wenn alle Teile einstimmig sind, die Summe in demselben Sinne, wie die einzelnen Teile, genommen werden und also dasselbe Vorzeichen haben muſs. Sind aber die einzelnen Teile entgegengesetzt, so muſs man die Summe der positiven, und ebenso die der negativen Teile besonders suchen, dann die kleinere Summe durch einen ebenso großen Teil der größern tilgen und das Übrigbleibende im Sinne der größern Summe, also mit dem ihm wesentlich zukommenden Vorzeichen nehmen. Daß man eine solche übrig gebliebene Größe, obgleich sie im engern Sinne ein wirklicher Rest ist, dennoch als den wirklichen *Betrag* aller Teile, kurzweg *Summe*, oder, bestimmter gesprochen *algebraische Summe*, sowie das Vereinigen der Teile, obgleich dabei ein wirkliches Subtrahieren stattfindet, *addieren* oder *algebraisch addieren* nennt, und, dem allgemeinen Begriff zufolge, nennen muß, kann keine Dunkelheit verursachen. Man merke sich noch, daß der Satz: das Ganze ist größer als jeder seiner Teile, nur für einstimmige Größen gilt.

2. *Subtraktion.* Durch mancherlei Umstände, und namentlich durch die Stellung einer Aufgabe, sowie durch das Umformen der Gleichungen &c. veranlaßt, können Fälle vorkommen, wo man entgegengesetzte Größen von einander subtrahieren muß, oder wo der Subtrahend größer ist, als der mit ihm einstimmige Minuend und wo also die Subtraktion im engern Sinne, als eine wirkliche Wegnahme des Subtrahend vom Minuend, völlig unmöglich wäre, indem man unmittelbar nur eine kleinere Größe von einer einstimmigen größern subtrahieren kann. Um aber dennoch den Gang der Rechnung nicht aufzuhalten und alle vorkommende Fälle, der Forderung gemäß, folgerecht zu behandeln, richtig zu deuten, und die nach dem engeren Begriff der Subtraktion etwa stattfindenden Ungereimtheiten zu heben, brauchen wir diesen Begriff nur im allgemeinern Sinn zu nehmen, nämlich *subtrahieren heißt: diejenige Größe finden, um welche der Subtrahend vom Minuend verschieden ist*, d. h. die Größe, welche mit dem Subtrahend vereinigt, den Minuend giebt. Diese Größe ist dann der gesuchte wirkliche Unterschied (algebraische Differenz), und man erhält sie offenbar, wenn man das Vorzeichen des Subtrahend umkehrt und ihn dann zum Minuend (algebraisch) addiert. Diese leicht zu behaltende Regel ist ganz allgemein, wie folgende Beispiele, welche alle verschiedene Fälle darstellen, zeigen:

Minuend	$+8$	-8	-8	$+8$	$+2$	-2	-2	$+2$
Subtrah.	$+2$	-2	$+2$	-2	$+8$	-8	$+8$	-8
	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$
Differenz:	$+6$	-6	-10	$+10$	-6	$+6$	-10	$+10$

Daß die gefundenen Differenzen (eben weil sie aus zwei Teilen, dem Minuend und dem *Umgekehrten*, dem Subtrahend zusammengesetzt sind), zu den Subtrahenden addiert, die Minuenden notwendig wiedergeben müssen, ist klar. *Es ist also ganz einerlei, ob man eine Größe subtrahiert oder mit umgekehrtem Zeichen addiert.* Durch Hilfe der Gleichungen kann man die Richtigkeit dieser Regel auch folgendermaßen anschaulich machen: Man denke sich nämlich den Subtrahend einmal so wie er ist, und einmal mit umgekehrtem Zeichen zum Minuend gelegt, so ist dadurch nur die Form, aber nicht die Größe des Minuend geändert, und wenn man alsdann von dem so umgeformten Minuend den Teil wegläßt (subtrahiert), welcher dem Subtrahend gleich ist, so muß der wahre Unterschied bleiben. Es ist z. E. (vergl. § 128):

Minuend	$+8 =$	$+8-2+2$
Subtrah.	$-2 =$	-2
	$(+)$	
Differenz:	$10 =$	$+8+2$

Nimmt man nämlich auf der rechten Seite -2 (zwei negative Einheiten) weg, so muß man auf der linken Seite $+2$ zulegen, weil sonst die Gleichheit gestört sein würde. Ebenso ist:

$$\begin{array}{rl} & -8=-8+2-2 \\ \text{subtr.} & +2=\quad\;\; +2 \\ & \underline{(-)\qquad\qquad} \\ & -10=-8-2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} & -2=-2-8+8 \\ \text{subtr.} & -8=\quad\;\; -8 \\ & \underline{(+)\qquad\qquad} \\ & +6=-2+8 \end{array}$$

3. Multiplikation. Die Regel über den Einflufs der Vorzeichen bei der Multiplikation entgegengesetzter Gröfsen läfst sich leicht aus dem Begriff des Gegensatzes ableiten. Haben beide Faktoren einerlei Vorzeichen, so ist das Produkt allemal positiv, negativ aber, wenn die Faktoren verschiedene Vorzeichen haben. Mit anderen Worten: *gleiche Zeichen geben plus, ungleiche Zeichen geben minus.*

Eigentlich braucht hier blofs der Fall erörtert zu werden, wo der Multiplikator eine entgegengesetzte (negative) Gröfse ist. Der Multiplikator ohne Vorzeichen gedacht, sagt blofs wie oft, sein Vorzeichen aber, in welchem Sinn der Multiplikand gesetzt werden soll. Nimmt man eine positive Gröfse entgegengesetzt, so wird sie negativ, z. B. $+8$ einmal entgegengesetzt genommen, giebt -8; $+8$ zweimal entgegengesetzt genommen, giebt -16 &c., daher $-1.+8=-8$; $-2.8=-16$ &c. Nimmt man eine schon an sich entgegengesetzte Gröfse wieder im entgegengesetzten Sinne, also das Entgegengesetzte entgegengesetzt, so wird sie wieder positiv, z. B. -8 einmal entgegengesetzt genommen, giebt $+8$, zweimal entgegengesetzt genommen $+16$ &c., nämlich $-1.-8=+8$; $-2.-8=16$ &c. Nimmt man aber eine entgegengesetzte Gröfse einmal wie sie ist, also *nicht* entgegengesetzt, so erhält man die Gröfse selbst; zweimal genommen, das Doppelte &c., nämlich $1.-8$ oder $+1.-8=-8$; $2.-8$ oder $+2.-8=-16$. Ebenso ist $2.+8$ oder $+2.+8=+16$ &c. In den beiden letzten Fällen braucht man dem Vorzeichen $(+)$ des Multiplikators eigentlich keine besondere Bedeutung unterzulegen, indem er hier ohne Vorzeichen, d. h. ohne andere Beziehung, als blofse Multiplikationszahl gebraucht werden kann.

Beispiele:

Multiplikand	$+9$	-9	$+9$	-9
Multiplikator	$+3$	$+3$	-3	-3
Prod.	27	-27	-27	$+27$

Anmerkung. Man kann alle Fälle, welche bei der Multiplikation vorkommen können, wo nämlich die Faktoren ganze, gebrochene, positive und negative Zahlen sind, in folgendem allgemeinen Begriff zusammenfassen: *multiplizieren heifst, mit einer Gröfse, dem Multiplikand, ebenso verfahren, wie man mit der Einheit verfuhr, als man den Multiplikator daraus bildete.**) In $\frac{3}{4}.\frac{5}{7}$ wurde zur Bildung des Multiplikators $\frac{3}{4}$, der vierte Teil der Einheit 3mal genommen, folglich mufs auch der vierte Teil von $\frac{5}{7}$, nämlich $\frac{5}{28}$, 3mal genommen werden; daher $\frac{3}{4}.\frac{5}{7}=3.\frac{5}{28}=\frac{15}{28}$. In -3.8 wurde die Einheit zur Bildung des Multiplikators dreimal entgegengesetzt gesetzt, folglich mufs auch 8 dreimal entgegengesetzt genommen werden, daher $-3.8=-8-8-8=-24$. Ebenso ist $-3.-8=+8+8+8=24$; $3.-4=-4-4-4=-12$ &c.

4. Division. Die Regel für die Division entgegengesetzter Gröfsen folgt von selbst aus der für die Multiplikation, auch lautet sie ebenso: haben Dividend und Divisor gleiche Zeichen, so ist der Quotient positiv, negativ aber, wenn Dividend und Divisor ungleiche Vorzeichen haben. Mit andern Worten: *gleiche Zeichen geben plus, ungleiche geben minus.* Der Quotient mufs nämlich so beschaffen sein, dafs er, mit dem Divisor multipliziert, den Dividend wiedergiebt. So ist z. B.:

---

*) Diese Erklärung findet sich in *Thibaut's* Arithmetik und in *Cauchy's* Cours d'Analyse. Sie pafst aber nicht auf irrationale und imaginäre Gröfsen.

$$\frac{+8}{+2} = +4;\ \text{weil} +4 \,.\, +2 = +8$$

$$\frac{+8}{-2} = -4;\ \text{weil} -4 \,.\, -2 = +8$$

$$\frac{-8}{+2} = -4;\ \text{weil} -4 \,.\, +2 = -8$$

$$\frac{-8}{-2} = +4;\ \text{weil} +4 \,.\, -2 = -8$$

321.

Zu § 92. Aus der Multiplikation zweier vielteiligen Gröſsen ergiebt sich ganz von selbst noch ein anderes Verfahren, nach welchem man die Division zweier vielteiligen Gröſsen oftmals leichter bewirken kann, als durch die § 92 gezeigte Faktorenzerlegung. Multipliziert man z. B. $5ac - \frac{2}{3}bc$ mit $7ax + \frac{4}{5}bx$, nämlich:

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} 5ac - \frac{2}{3}bc \\ 7ax + \frac{4}{5}bx \end{array}\right\} \text{Faktoren} \\
\hline
35a^2cx - \frac{14}{3}abcx \\
\qquad\qquad + 4abcx - \frac{8}{15}b^2cx \\
\hline
35a^2cx - \frac{2}{3}abcx - \frac{8}{15}b^2cx
\end{array}$$

so ist klar, daſs das erhaltene Produkt durch jeden der beiden Faktoren teilbar sein muſs.

Wäre nun umgekehrt die Aufgabe gegeben: die Gröſse: $35a^2cx - \frac{2}{3}abcx - \frac{8}{15}b^2cx$ (deren Ursprung wir jetzt nicht wissen wollen), durch $5ac - \frac{2}{3}bc$ zu dividieren, so ist einleuchtend, daſs (weil der Dividend mehr Glieder, als der Divisor enthält) der etwa mögliche Quotient notwendig vielteilig sein, und daſs eins seiner Teile so beschaffen sein muſs, daſs er, mit dem ganzen Divisor multipliziert, ein Produkt giebt, von welchem wenigstens ein Glied einem Gliede des Dividend gleich ist. Hierdurch ist also die Regel, nach welcher man verfahren muſs, um den etwa möglichen Quotienten zu finden, gegeben: Man dividiere nämlich mit einem Teil des Divisors, z. B. mit dem 1sten ($5ac$) in einen dazu passenden Teil des Dividend, z. B. in den 1sten ($35a^2cx$), setze den Quotienten $\left(\frac{35a^2cx}{5ac} = 7ax\right)$ als den einen Teil des gesuchten Quotienten, multipliziere mit ihm den ganzen Divisor und subtrahiere das Produkt vom Dividend. Dasselbe Verfahren auf das übrig gebliebene Stück des Dividend angewandt, giebt den 2ten Teil des Quotienten &c., wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{l|l|l}
5ac - \frac{2}{3}bc & 35a^2cx - \frac{2}{3}abcx - \frac{8}{15}b^2cx & = 7ax + \frac{4}{5}bx \\
 & 35a^2cx - \frac{14}{3}abcx & \\
\hline
 & \qquad\qquad 4abcx - \frac{8}{15}b^2cx & \\
 & \qquad\qquad 4abcx - \frac{8}{15}b^2cx &
\end{array}$$

Es ist nämlich, indem man das erste Mal mit $5ac$ in $35a^2cx$ dividiert, der Quotient $= \frac{35a^2cx}{5ac} = 7ax$. Im ersten Gliede des Restes ist $5ac$ offenbar $\frac{4abcx}{5ac} = \frac{4}{5}bx$mal enthalten.

Anmerkung 1. Hätte man, statt in das 1ste Glied, in das 2te oder 3te Glied des Dividend mit $5ac$ dividieren wollen, so würde der entstandene

Quotient mit einem Bruche behaftet gewesen, mithin nicht so einfach ausgefallen sein. Hieraus folgt nun, dafs die Ordnung der Glieder des Dividend nicht gleichgiltig ist. Man mufs nämlich sowohl Dividend als Divisor immer erst so ordnen, dafs die Glieder in beiden entweder nach steigenden oder fallenden Potenzen einer und derselben Buchstabengröfse fortschreiten. Die Notwendigkeit dieser Ordnung folgt aus der Multiplikation zweier so geordneten Faktoren.

Im vorstehenden Beispiele waren Dividend und Divisor nach den fallenden Potenzen von a geordnet, nämlich: a^2, a^1, a^0 im Dividend und a^1, a^0 im Divisor, oder auch nach steigenden Potenzen von b, nämlich: b^0, b^1, b^2. Zur Übung vollziehe man folgende angedeutete Divisionen:

$$\frac{a^2-b^2-ac+bc}{a-b}=a+b-c$$

$$\frac{x^4-x^3-7x^2+x+6}{x^2-x-6}=x^2-1$$

$$\frac{x^4-x^3-7x^2+x+6}{x+1}=x^3-2x^2-5x+6$$

$$\frac{x^2+ax+b}{x+a}=x+\frac{b}{x+a}$$

2. Zufolge §§ 254, 256 ist die Summe der geometrischen Reihe:

$$a^{n-1}+a^{n-2}.x+a^{n-3}.x^2+a^{n-4}.x^3+\ldots\ldots+x^{n-1}$$

in welcher a^{n-1} das erste, x^{n-1} das letzte Glied und $\frac{x}{a}$ der Exponent ist, $=\frac{x^n-a^n}{x-a}$. Dies führt unmittelbar auf den Satz: dafs ein jeder Gröfsenausdruck von der Form x^n-a^n allemal durch die Gröfse $x-a$ ohne Rest teilbar sein mufs, was auch n für eine ganze Zahl sein möge. Man hat z. B. nach der eben gezeigten Divisionsregel:

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$$

$$\frac{a^4-b^4}{a-b}=a^3+a^2b+ab^2+b^3$$

$$\frac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1$$

3. Die Gröfse a^n-b^n ist auch durch $a+b$ ohne Rest teilbar, wenn n eine gerade Zahl ist, sonst nicht. Die Gröfse a^n+b^n ist auch durch $a+b$ teilbar, wenn n eine ungerade Zahl ist, sonst nicht.

322.

Von den Proportionen &c. Wenn zwei Gröfsen a und b dasselbe Verhältnis zueinander haben, wie zwei andere Gröfsen c und d, mithin a durch b und c durch d dividiert, einerlei Quotienten geben, so kann man aus diesen beiden gleichen Verhältnissen, welche man als zwei gleichgeltende Brüche betrachten kann, folgende Gleichung bilden:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Eine solche Gleichung zwischen zwei gleichen Verhältnissen heifst in der alten Kunstsprache eine **Proportion** und pflegt man dieselbe, statt wie oben, auch so zu schreiben:*)

$$a:b=c:d$$

Man liest: a verhält sich zu b, wie c zu d, d. h. a ist ebenso oft in b enthalten, als c in d. Die Gröfse a heifst hier das 1ste, b das 2te, c das 3te und d das 4te Glied; ferner a und d die beiden äufsern, b und c die beiden mittlern oder innern Glieder der Proportion. Es verhält sich z. B. 2 ebenso zu 4, wie 3 zu 6 und die vier Zahlen 2, 4; 3, 6 geben daher folgende Proportion, $2:4=3:6$ oder $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$.

Sind die beiden mittlern Glieder einander gleich, wie in $a:b=b:d$, so heifst die Proportion eine **stetige** und die Gröfse b heifst dann die **mittlere Proportionale** oder das **geometrische Mittel** zwischen den beiden äufsern Gliedern a und d. Es verhält sich z. B. 3 ebenso zu 6, wie 6 zu 12, und diese Zahlen 3, 6; 6, 12 bilden daher die stetige Proportion $3:6=6:12$, wo also 6 die mittlere Proportionale zwischen 3 und 12 ist.

Sind die vier Glieder einer Proportion unbenannte oder gleichbenannte Zahlen, so können aus derselben mehrere Folgerungen gezogen werden, worüber man sich, weil dieselben (namentlich in der Geometrie) Anwendung finden, folgende Sätze merken möge:

In jeder Proportion ist das Produkt der beiden mittlern Glieder gleich dem Produkt der beiden äufsern Glieder. In Zeichen:

$$\text{wenn } a:b=c:d: \qquad 3:6=2:4;$$

$$\text{so ist auch } ad=bc, \qquad 3.4=6.2.$$

Beweis. Aus $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ folgt, auf beiden Seiten mit bd multipliziert: $ad=bc$.

Ist also ein Glied in einer Proportion unbekannt, so kann man dasselbe leicht berechnen. Fragt man z. B., wie grofs x sein mufs, damit folgende Proportion $3:5=9:x$ stattfindet, so hat man, vermöge des eben erklärten Satzes, dafs das Produkt der äufsern Glieder dem Produkt der mittlern gleich sein mufs: $3x=5.9$, mithin $x=\frac{5.9}{3}=15$. Wäre:

$$3:x=9:15; \quad \text{so ist } 9x=45 \text{ und } x=5;$$

$$x:5=9:15; \quad \text{so ist } 15x=45 \text{ und } x=3;$$

$$a:x=b:c; \quad \text{so ist } bx=ac \text{ und } x=\frac{ac}{b}.$$

Hiernach findet man auch die mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen Gröfsen, wenn man aus dem Produkt derselben die Quadratwurzel zieht.

---

*) Unser sel. Lehrer *Thibaut* erklärte mit Recht die ganze Lehre von den Proportionen und namentlich diese undeutliche Schreibart $a:b=c:d$ für eine schädliche. Wir haben sie deshalb auch in den Anhang verwiesen. Viele Mathematiker schreiben schon lange die Proportion in der vorstehenden deutlicheren Form einer Gleichung, nämlich: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Sucht man z. E. zu 3 und 12; 5 und 2; a und b die mittleren Proportionalen, so hat man:

$$3:x=x:12;\ \text{woraus}\ x^2=36,\ \text{mithin}\ x=\pm 6$$

$$5:x=x:2;\quad „\quad x^2=10,\quad „\quad x=\sqrt{10}=\pm 3{,}162\ldots$$

$$a:x=x:b;\quad „\quad x^2=ab,\quad „\quad x=\sqrt{ab}.$$

Die Aufgabe, eine Gröſse a nach stetiger Proportion zu teilen, verlangt: a in zwei solche Teile zu zerlegen, daſs sich der kleinere Teil zum gröſsern verhält, wie der gröſsere zur ganzen Gröſse. (Siehe § 227.)

2) In jeder Proportion kann man die Glieder der Verhältnisse umkehren. Ist nämlich:

$$a:b=c:d;\qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d};\qquad 15:3=20:4;$$

so ist auch $$b:a=d:c;\qquad \frac{b}{a}=\frac{d}{c};\qquad 3:15=4:20.$$

3) In jeder Proportion verhält sich auch das erste Glied zum dritten, wie das zweite zum vierten. Ist nämlich:

$$a:b=c:d;\qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d};\qquad 3:6=9:18;$$

so ist auch: $$a:c=b:d;\qquad \frac{a}{c}=\frac{b}{d};\qquad 3:9=6:18.$$

4) In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zum ersten oder zweiten, wie die Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder zum dritten oder vierten Gliede. In Zeichen, wenn:

$$a:b=c:d;\qquad 8:2=12:3;$$

so ist $$a\pm b:a=c\pm d:c;\qquad 10:2=15:3;$$

$$a\pm b:b=c\pm d:d;\qquad 6:2=9:3.$$

Beweis. Aus $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ folgt:

$$\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1\qquad \text{oder}\ \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d};$$

ferner: $$\frac{b}{a}\pm 1=\frac{d}{c}\pm 1\qquad \text{oder}\ \frac{b\pm a}{a}=\frac{d\pm c}{c};$$

$$\text{oder}\ \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}.$$

323.

Wenn mehrere Verhältnisse einander gleich sind, so verhält sich die Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweiten ebenso, wie jedes erste Glied zum zweiten. In Zeichen, wenn

$$A:a=B:b=C:c=D:d=E:e\ \&c.$$

so ist auch $$A+B+C+D+E\ldots:a+b+c+d+e\ldots=A:a=B:b\ \&c.$$

Beweis. Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Exponenten der gleichen Verhältnisse durch e, d. i. die Zahl, welche angiebt, wieviel mal so grofs oder so klein jedes vorhergehende Glied als das folgende ist, so hat man aus der nachstehenden ersten Reihe Gleichungen die zweite und daraus durch Addition die dritte, nämlich:

$$\frac{A}{a} = e; \qquad A = ae;$$

$$\frac{B}{b} = e; \qquad B = be;$$

$$\frac{C}{c} = e; \qquad C = ce;$$

$$\frac{D}{d} = e; \qquad D = de;$$

$$A + B + C + D + . + \ldots = ae + be + ce + de \ldots$$

$$A + B + C + D + . + \ldots = (a + b + c + d + \ldots)e$$

$$\frac{A + B + C + D + \ldots}{a + b + c + d + \ldots} = e = \frac{A}{a} = \frac{B}{b} \text{ \&c.}$$

Wenn also mehrere Brüche einander gleich sind, so ist auch jeder dem Bruche gleich, dessen Zähler und Nenner aus der Summe jener Zähler und Nenner gebildet ist. Es ist z. B.:

$$\tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{12} = \tfrac{4}{6} = \tfrac{14}{21} = \tfrac{6}{9} = \frac{2 + 8 + 4 + 14 + 6}{3 + 12 + 6 + 21 + 9} = \tfrac{34}{51}.$$

324.

Zu § 214. Hätte man aus einem vielteiligen Gröfsenausdruck eine Quadratwurzel zu ziehen, so müfste man, wie sich aus der Bildung eines Quadrats ergiebt, ganz nach derselben Regel verfahren, nach welcher man die Quadratwurzel aus einer Zahl zieht, d. h. nach der Formel $a^2 + 2ab + b^2$ (§ 191). Dasselbe gilt von der Kubikwurzel. So findet man z. B.:

$$\sqrt{(4x^4 - 12ax^3 + 29a^2x^2 - 30a^3x + 25a^4)} = \pm(\overbrace{2\overset{a}{x^2} - 3\overset{b}{ax}}^{a} + 5\overset{b}{a^2})$$

$$a^2 = \underline{4x^4}$$

$$4\overset{2a}{x^2}, - 3\overset{b}{ax}) - 12ax^3 + 29a^2x^2$$

$$2ab + b^2 = \underline{- 12ax^3 + 9a^2x^2}$$

$$4x^2 \overset{2a}{-} 6ax,\ 5\overset{b}{a^2})\ 20a^2x^2 - 30a^3x + 25a^4$$

$$2ab + b^2 = \underline{20a^2x^2 - 30a^3x + 25a^4}$$

325.

Zu § 216. Alle Gröfsenausdrücke, wie $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-a}$; $\sqrt[4]{-a}$, wo sich nämlich das Wurzelzeichen mit g e r a d e m E x p o n e n t e n vor eine n e g a t i v e

Zahl stellt, und die selbst schon in den Elementen vorkommen, aber namentlich erst in der höhern Mathematik gröfsere Wichtigkeit erhalten, indem sie dort Rechnungen, die ohne ihren Gebrauch sehr mühsam und verwickelt werden müssten, ungemein vereinfachen, nennen einige Mathematiker unmögliche Gröfsen, andere, welche diese Benennung unpassend finden, indem nur keine wirkliche Wurzelausziehung in bestimmten Zahlen möglich ist, die Gröfsen selbst aber vorhanden und mithin möglich sind, nennen sie eingebildete (imaginäre) Gröfsen, im Gegensatz der übrigen sogenannten reellen Gröfsen, d. h. solche, die in bestimmten Zahlen ganz genau oder doch näherungsweise ausgedrückt werden können, wie z. B.:

$$\sqrt{9},\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{-8},\ \sqrt[3]{-7}\ \&c.$$

Die Benennung unmögliche Gröfsen ist allerdings unpassend, indem die Gröfsen selbst nicht unmöglich sind, wie etwa ein dreieckiger Kreis, ein rundes Dreieck, ein hölzernes Eisen. Die Benennung imaginäre Gröfsen ist aber um nichts besser. Denn eingebildet heifst doch, was nur in Gedanken und nicht in der Wirklichkeit stattfindet, z. B. ein Luftschlofs. Da nun aber die Praxis auf mehr besagte Gröfsen führt, sie also nicht blofs in Gedanken, sondern wirklich vorkommen, so ist auch dieser letztgerügte Ausdruck unpassend. Die Ausflucht, das Wort imaginär nicht auf die fraglichen Gröfsen selbst, sondern nur auf die Wurzel-Ausziehung in bestimmten Zahlen zu beziehen, wird auch niemand gelten lassen, der nicht die Fähigkeit hat, sich einen viereckigen Kreis und dergleichen einbilden zu können, denn mit eben der Fähigkeit müfste doch die Wurzel in Zahlen imaginiert werden.

Soll diese neue Art Gröfse einen eigentümlichen Namen haben, so ist die von *Gauss* gewählte Benennung: laterale Gröfse, sehr passend, indem diese Sinn und Bedeutung hat.*)

Für die Elemente aber genügt es vollkommen, diese lateralen Gröfsen für blofse Rechnungsresultate (symbolische Gröfsenausdrücke) zu nehmen. Denn ohne dafs sie einen eigentümlichen Namen haben, kann man doch mit ihnen ebenso gut und ganz nach denselben Regeln, wie mit den sogenannten reellen Gröfsen rechnen. Die Rechnung mit lateralen Gröfsen wird erleichtert, wenn man die negative Gröfse unter dem Wurzelzeichen zuvor in zwei Faktoren zerlegt, wovon der eine Faktor die Gröfse selbst, aber mit umgekehrtem Vorzeichen, und der andere Faktor -1 ist, und alsdann die Wurzel aus jedem Faktor besonders andeutet. (§ 211.)

So ist z. B. $-4=4(-1)$; daher:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=2\sqrt{-1};\qquad \sqrt{-9}=\sqrt{9(-1)}=3\sqrt{-1};$$
$$\sqrt{-5}=\sqrt{5(-1)}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1};\qquad \sqrt{-a}=\sqrt{a(-1)}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}.$$

Jede laterale Gröfse kann also immer als ein Produkt aus zwei Faktoren, wovon der eine eine reelle Gröfse und der andere $\sqrt{-1}$ ist, dargestellt werden, und man braucht sich daher nur zu merken, wie mit der einfachen Gröfse $\sqrt{-1}$, welche man als eine besondere Art Einheit betrachten kann, gerechnet wird, um mit jedem Vielfachen derselben, so wie mit allen Gröfsenausdrücken, welche aus reellen und lateralen Gröfsen zusammengesetzt sind, rechnen zu können.

Die laterale Gröfse $\sqrt{-1}$ pflegt Gauss der Kürze wegen mit i zu bezeichnen, und also $\pm\sqrt{-1}=\pm i$ zu setzen.

Man merke sich zuvor die geraden und ungeraden Potenzen von $\sqrt{-1}$, wonach sich alles Andere von selbst ergiebt. Man hat:

*) Mehr darüber sehe man in der Analysis im Anhang.

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1};$$

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)^2} = -1; \quad (\S\,216, \text{Anmerk.})$$

oder $$(\sqrt{-1})^2 = [(-1)^{\frac{1}{2}}]^2 = (-1)^1 = -1;$$

$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = (-1)\sqrt{-1} = -\sqrt{-1};$$

$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1})^2 = (-1)(-1) = 1;$$

oder $$(\sqrt{-1})^4 = [(-1)^{\frac{1}{2}}]^4 = (-1)^2 = 1;$$

$$(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4 \cdot \sqrt{-1} = 1 \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1}.$$

Man sieht also, daſs von $\sqrt{-1}$ die erste Potenz $= \sqrt{-1}$; die 2te, $= -1$; die 3te, $= -\sqrt{-1}$; die 4te, $= 1$; von wo an sich dieselben Resultate wiederholen. Bedeutet also n eine beliebige ganze Zahl, 0 und 1 nicht ausgenommen, so ist allgemein:

$$(\sqrt{-1})^{4n} = 1; \qquad i^{4n} = 1;$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1; \qquad i^{4n+2} = -1;$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+1} = \sqrt{-1}; \qquad i^{4n+1} = i;$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}; \qquad i^{4n+3} = -i.$$

326.

Beispiele:

1) $$\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1} + \sqrt{-1} = 5\sqrt{-1};$$

$$\sqrt{-4} + \sqrt{-9} = 2\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1};$$

$$\sqrt{-a} + \sqrt{-b} - \sqrt{-c} = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})\sqrt{-1};$$

$$a\sqrt{-4} - \sqrt{-a^2} = 2a\sqrt{-1} - a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}.$$

2) $$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{ab}; \quad (\S\ 216.)$$

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12} = -\sqrt{36} = -6. \quad (\S\ 216, \text{ Anmerk.})$$

a) Jeder aus reellen und lateralen Gröſsen zusammengesetzte Ausdruck heiſst eine komplexe Gröſse. Eine solche ist z. B. $2 + 3\sqrt{-1}$. Bezeichnet man den reellen Teil allgemein durch a und den Faktor von $\sqrt{-1}$ durch b, so kann jede komplexe Gröſse immer auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ oder $a + bi$ gebracht werden. Beispiele:

3) $4+6\sqrt{-1}+\sqrt{-16}+2=6+10\sqrt{-1};$

$3+3\sqrt{-9}-3-2\sqrt{-4}=0+5\sqrt{-1}=5\sqrt{-1};$

$a+b\sqrt{-1}+a-b\sqrt{-1}=2a.$

4) $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2;$ (§ 91.)

$(a+b\sqrt{-1})^2=a^2-b^2+2ab\sqrt{-1};$ (§ 186.)

$(a-b\sqrt{-1})^2=a^2-b^2-2ab\sqrt{-1};$

$(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})=(x+a)^2+b^2.$

b) In der Analysis wird gezeigt, daſs man sowohl aus der positiven als negativen Einheit und mithin aus jeder Gröſse so viele verschiedene Wurzeln desselben Grades ziehen kann, als man will; so giebt es z. B. drei verschiedene Gröſsen, welche auf die 3te Potenz erhoben 8 geben; vier verschiedene Gröſsen, deren 4te Potenz 1 geben &c., welches hier jedoch nur beiläufig bemerkt sein soll. Man hat nämlich:

$$(+2)^3=8$$

$$(-1+\sqrt{-3})^3=(-1)^3+3(-1)^2\sqrt{-3}+3(-1)(\sqrt{-3})^2+(\sqrt{-3})^3$$
$$=-1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3}=8; \quad (§ 213, 2.)$$

$$(-1-\sqrt{-3})^3=-1-3\sqrt{-3}+3\sqrt{-3}+9=8;$$

daher $\sqrt[3]{8}=2; \;=-1+\sqrt{-3}; \;=-1-\sqrt{-3};$

$$1^4=1;\; (-1)^4=1;\; (\sqrt{-1})^4=1;\; (-\sqrt{-1})^4=1;$$

daher $\sqrt[4]{1}=1; \quad =-1; \quad =\sqrt{-1}; \quad =-\sqrt{-1};$

5) $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=1; \qquad \frac{6\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}=3; \qquad \frac{-\sqrt{-1}}{+\sqrt{-1}}=-1;$

$$\frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-4}}=\frac{3\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}=1\tfrac{1}{2}; \qquad \frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}}=\frac{a}{b};$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{-1}=-\sqrt{-1};$$

$$\frac{a}{a+\sqrt{-b}}=\frac{a(a-\sqrt{-b})}{(a+\sqrt{-b})(a-\sqrt{-b})}=\frac{a^2-a\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}}{a^2+b};$$

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})}{(a-b\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})}=\frac{a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$$

327.

Wenn man eine zweiteilige Zahlengröfse von der Form $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ins Quadrat erhebt, so ist einleuchtend, dafs man (im allgemeinen) wieder eine zweiteilige Zahlengröfse von der Form $A + \sqrt{B}$ erhalten mufs, nämlich einen rationalen und einen irrationalen Teil. Es ist z. B.:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6} \;= 5+\sqrt{24}$$
$$(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = 8-2\sqrt{15} = 8-\sqrt{60}$$

Mithin mufs auch umgekehrt die Quadratwurzel aus einer Zahlengröfse von der Form $A \pm \sqrt{B}$, sich allemal durch eine Gröfse von der Form $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ darstellen lassen, wovon den Umständen nach, eins der beiden Teile auch rational sein kann. Die Regel, nach welcher man diese Wurzel findet, ergiebt sich leicht. Man setze nämlich:

$$\sqrt{(5+\sqrt{24})} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$
$$\text{so folgt: } 5+\sqrt{24} = x+y+2\sqrt{xy}$$

Jetzt bestimme man x und y so, dafs die rationalen und irrationalen Teile auf beiden Seiten der letzten Gleichung einander gleich werden. Man setze nämlich:

$$\begin{array}{llcr}
(1) & x+y=5 & \text{hieraus:} & x^2+2xy+y^2=25 \\
(2) & 2\sqrt{xy}=\sqrt{24} & & 4xy=24 \\
\hline
 & \text{durch Addition:} & & x^2-2xy+y^2=1 \\
 & & \text{folglich:} & (3)\quad x-y=\pm 1
\end{array}$$

Aus (1) und (3) folgt: $x=3$ und $y=2$; mithin

$$\sqrt{(5+\sqrt{24})} = \sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Um $\sqrt{(\pm a \pm \sqrt{-b})}$ z. B. $\sqrt{(-3+\sqrt{-16})}$ zu finden, setze man:

$$\sqrt{(-3+\sqrt{-16})} = \sqrt{x}+\sqrt{-y}$$
$$\text{hieraus: } -3+\sqrt{-16} = x-y+2\sqrt{-xy}$$

$$\begin{array}{llr}
(1) & x-y=-3 & x^2-2xy+y^2=9 \\
(2) & 2\sqrt{-xy}=\sqrt{-16} & 4xy=16 \\
\hline
 & & x^2+2xy+y^2=25 \\
 & & (3)\quad x+y=\pm 5
\end{array}$$

Aus (1) und (3) folgt: $x=1$; $y=4$; mithin:

$$\sqrt{(-3+\sqrt{-16})} = 1+2\sqrt{-1}.$$

328.

Algebraische Ausdrücke in Bruchform können in besondern Fällen, wenn man statt der allgemeinen Gröfsenzeichen ihre Zahlenwerte substituiert, den Ausdruck $\frac{0}{0}$ geben, den man nicht mit 0 verwechseln oder als bedeutungslos übersehen darf.

Um zuvor zu zeigen, daſs der Ausdruck $\frac{0}{0}$ wirklich entstehen kann, und dann im allgemeinen für jede besondere Substitution, welche ihn erzeugt, auch besondere Bedeutung hat, multipliziere man einmal Zähler und Nenner des algebraischen Ausdrucks $\frac{b(a+b)}{a}$ mit $a-b$, wodurch der Wert desselben nicht geändert ist.

$$\frac{b(a+b)}{a}=\frac{b(a+b)(a-b)}{a(a-b)}$$

oder: $$\frac{b(a+b)}{a}=\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}$$

Beide, nur an Form verschiedene, Ausdrücke müssen einerlei Resultat geben, wenn darin statt der Buchstaben beliebige Zahlen substituiert werden. Setzen wir z. B. $a=4$, $b=2$, so ist $\frac{b(a+b)}{a}=3$ und $\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}=3$. Setzt man aber $a=4$; $b=4$, so ist: $\frac{b(a+b)}{a}=8$ und $\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}=\frac{4.0}{4.0}=\frac{0}{0}$. Nimmt man $a=5$, $b=5$, so giebt der erste Ausdruck 10, der andere wieder $\frac{0}{0}$ &c.

Man sieht also nicht allein, daſs für gewisse Zustände von a und b (hier nämlich immer, wenn $a=b$) der Bruch $\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}$ den an sich unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ giebt, sondern auch, daſs der Wert desselben von a und b abhängt. Für $a=5$, $b=5$, ist z. B. $\frac{0}{0}=10$; für $a=3$, $b=3$ aber ist $\frac{0}{0}=6$ &c.

Für den vorliegenden Fall könnte man freilich die Ursache, welche den Ausdruck $\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}$ zu $\frac{0}{0}$ macht, fortschaffen, indem man diesen Ausdruck durch Division mit dem Nenner in den Zähler auf $\frac{b(a+b)}{a}$ reduziert. Eine solche Reduktion ist aber nicht immer möglich, und dann muſs man die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{0}{0}$ durch unmittelbare Schlüsse suchen, oder denselben auf andere Weise umgehen.

In der höhern Mathematik kommt der Ausdruck $\frac{0}{0}$ sehr oft vor, dort giebt es aber auch Mittel, die Bedeutung desselben nach gewissen Regeln zu finden. Für die Elemente genügt es vollkommen, darauf aufmerksam gemacht zu haben, daſs der Ausdruck $\frac{0}{0}$ bald diese, bald jene Bedeutung haben kann.

Die Summationsformel für geometrische Progressionen ist:

$$s=\frac{a(e^n-1)}{e-1}$$

Für den Fall, wo der Exponent $e=1$ (und folglich die Reihe selbst $a+a+a+\ldots\ldots$ wäre, deren Summe offenbar $=na$ ist), giebt die Substitution in obige Formel:

$$s=\frac{a(1^n-1)}{1-1}=\frac{0}{0}=na$$

Der Ausdruck $\frac{\sqrt{(8+a)}-3}{a^2-1}$ führt auf $\frac{0}{0}$, wenn man $a=1$ setzt; daſs aber für $a=1$, $\frac{0}{0}=\frac{1}{12}$ sein muſs, ist leicht einzusehen, wenn man Zähler und Nenner des obigen Ausdrucks mit $\sqrt{(8+a)}+3$ multipliziert, nämlich:

$$\frac{[\sqrt{(8+a)}-3][\sqrt{(8+a)}+3]}{(a^2-1)[\sqrt{(8+a)}+3)]}=\frac{a-1}{(a^2-1)[\sqrt{(8+a)}+3]}$$

Mithin ist:

$$\frac{\sqrt{(8+a)}-3}{a^2-1}=\frac{1}{(a+1)[\sqrt{(8+a)}+3]}$$

329.

Es liegt in der Natur mancher mathematischer Untersuchungen, dafs sie unwillkürlich auf die Vorstellung des Unendlichen führen; denn wenn auch der Geist, am Körper gefesselt, seine Grenzen hat, nicht darüber hinaus kann, und also jene Vorstellung auch nicht auf einen Augenblick deutlich zu fassen vermag, so läfst sich doch dadurch die ungebundene Phantasie nicht aufhalten, einen Sprung voraus zu machen, und den Geist auch mit übersinnlichen Vorstellungen zu versorgen. Kein Mensch kann sich z. E. die Zeit, oder den alles umfassenden Raum anders als unendlich (ohne Ende) denken.

Obgleich nun alle mathematischen Untersuchungen, mit welchen die Vorstellung des Unendlichen wesentlich verbunden ist, in die Analysis des Unendlichen gehören, so giebt es doch unter ihnen einige Fälle, welche sich auf elementare Weise behandeln lassen, und da diese Fälle gerade bei Anwendung derjenigen Teile der Mathematik (Mechanik und Geometrie) stattfinden, welche, weil sie täglich vorkommen, in die Elemente aufgenommen sind, und sich doch nicht jeder, der die Mathematik anwenden mufs, in den höhern Teilen derselben gleich zurechtfinden kann, so mögen dieserhalb, so wie um demjenigen, der die Wissenschaft lieb gewonnen hat und nach erhaltener Weihe in ihr eigentliches Heiligtum und ihren wahren Geist einzudringen wünscht, einen Wink zu geben, einige, wenn auch gleich nicht hierher gehörige Betrachtungen, noch zu gute gehalten werden. Mit dem Bekenntnis aber, dafs die gegebenen Erläuterungsbeispiele und Vergleichungen ein wenig hinken, wollen wir den Leser im voraus um Nachsicht und Nachhilfe bitten. Was einmal rein geistiger Art ist, kann nur vom Geiste, nicht mit den Händen gefafst werden. Bei übersinnlichen Sachen geht alle Beschreibung betteln, fällt nur zu leicht in logische Kreise und Ungereimtheiten, macht das zu Erklärende eher dunkeler, als klar. Nicht auf das mufs man sehen, was ausgedrückt ist, sondern auf das, was man hat ausdrücken wollen. Dies für den Schüler, der da handgreifliche Erklärungen und Beispiele verlangt, wo die Natur der Sache sie nicht gestattet.

Betrachten wir einmal folgende geometrische Progression:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\ldots\ldots\frac{1}{2^n}$$

so ist klar, dafs mit dem Fortschreiten dieser Reihe ihre Glieder immer kleiner und kleiner werden, und man daher n so grofs annehmen kann, dafs $\frac{1}{2^n}$ kleiner ist, als jede namhafte oder angebbare Gröfse.

Summiert man nach § 254 einige der ersten Glieder dieser Reihe, so zeigt sich, dafs es beinahe einerlei ist, ob man Millionen oder Billionen Glieder summiert. In beiden Fällen kommt die Summe der Einheit sehr nahe. Wieviel Glieder man aber auch zusammenrechnen wollte, nie kann die Summe die Einheit erreichen, noch viel weniger darüber hinaus kommen.

Diese, dem Anfänger befremdende, Behauptung läfst sich folgendermafsen leicht darthun. Nimmt man ein beliebig weit hinaus gesetztes $n$tes

Glied der Reihe, nämlich $\frac{1}{2^n}$, als das letzte, so beträgt die Summe bis zu diesem Gliede nach der allgemeinen Summationsformel: $s=\frac{te-a}{e-1}$, worin für gegenwärtigen Fall, $a=\frac{1}{2}$, $e=\frac{1}{2}$, $t=\frac{1}{2^n}$ zu setzen ist (§ 254):

$$s=\frac{\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$

oder, indem man Zähler und Nenner mit 2 multipliziert:

$$s=1-\frac{1}{2^n}$$

Man sieht also, dafs s nie gröfser als 1 sein, aber auch der Einheit so nahe gebracht werden kann, dafs der Unterschied kleiner wird, als jede angebbare Gröfse, denn je gröfser n, je kleiner der zu subtrahierende Teil $\frac{1}{2^n}$.

Nun fragen wir aber: wie weit mufs man die Progression $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ fortlaufen lassen, oder wie grofs mufs man sich n denken, damit $\frac{1}{2^n}$ und jener Unterschied im voraus so klein wird, dafs hernach keine kleinere Gröfse mehr angegeben werden kann?

Antwort. Wie klein man sich auch eine Gröfse denken mag, so kann man doch, weil eine wirkliche Gröfse angebbar sein mufs, immer noch eine kleinere denken. Um also $\frac{1}{2^n}$ im voraus so klein zu machen, dafs dessen Kleinheit durch keine abermalige Annahme wieder überboten werden kann, bleibt nichts anderes übrig, als den Sprung ins Unendliche zu machen: dies ist aber dann ein wirkliches Non-plus-ultra, denn gäbe es hier ein Jenseits, so gäbe es kein Unendliches und umgekehrt. Man wird also gezwungen, dafs n unendlich grofs (∞), also $\frac{1}{2^\infty}=\frac{1}{\infty}$ anzunehmen, und mithin die Reihe selbst ohne Ende zu denken; denn eins folgt notwendig aus dem andern. So lange nämlich die Glieder einer Reihe noch immer kleiner gedacht werden können, ist in der That die Reihe selbst (nämlich die Zahl ihrer Glieder) auch noch nicht wirklich unendlich gedacht. Der Gedanke eines unendlich Grofsen ist in jedem Fall eine angestrengte Handlung des Geistes, die niemals zum Schlusse kommt, mithin kein bestimmter, sondern endloser, nicht geschlossener Gedanke; dies drückt schon das Wort unendlich selbst aus. Dennoch ist klar, dafs, wenn man die Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ (d. h. die Zahl ihrer Glieder) auf einen Augenblick wirklich unendlich grofs denken könnte (oder gedacht annimmt), mit dieser Vorstellung dann notwendig die Vorstellung verbunden wäre, dafs ihr letztes Glied wirklich unendlich klein und der Gedanke, dafs es noch eine wirkliche (angebbare) Gröfse habe, dann nicht mehr möglich ist. Denkt man sich also n unendlich grofs, so mufs die Reihe selbst ins Unendliche fortlaufen, und ihre, immer um die Hälfte abnehmenden Glieder zuletzt wirklich unteilbar werden. Gegen diese letzte Behauptung pflegt sich aber die gewöhnliche Fassungskraft lange zu sträuben.

Dieser Anstoss fällt aber weg, wenn man sich das ∞ nicht als eine Zahl, d. i. als eine bestimmte Menge Einheiten, sondern als eine Unzahl denkt, die nicht mehr vergrößsert werden kann. Hält man diese Vorstellung fest, dafs das Unendliche nicht zu überschreiten, mithin nicht zu vergröfsern ist, so wird man auch zugeben, dass die Glieder der unendlich gedachten Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$, nicht etwa näherungsweise, sondern in aller Strenge genommen, auf 0 auslaufen müssen. Denn die Glieder werden im Unendlichen kleiner als jede angebbare Gröfse. Eine Gröfse aber, die ihrer Kleinheit wegen nicht mehr angegeben, also auch nicht mehr geteilt werden kann, ist keine wirkliche Gröfse. Dafs man aber des Anhalts wegen, und um nur den Faden der Untersuchungen anknüpfen zu können, den im Unendlichen erreichten Zustand einer solchen immer kleiner werdenden Gröfse sich noch als etwas Wirkliches einbildet, und, um nur die Rechnung dadurch einzuleiten, mit $\frac{1}{\infty}$ bezeichnet, dieselbe im Vortrage eine unendlich kleine Gröfse nennt (verschwindende, unteilbare Gröfse, Differential, Fluxion &c., d. h. Anfang oder Bestreben einer nicht angebbaren Sache, die eine Gröfse sein oder werden will, die es aber nicht ist) und dann des Begriffs und der Form wegen $\frac{1}{\infty}$ (dx) von der absoluten Null unterscheidet, wird man später als notwendig erkennen. Wir können indessen diese Sache hier nicht weiter erläutern. Sie gehört, wie schon zu Anfang dieses Paragraphen erwähnt, in die Infinitesimalrechnung. Hierauf müssen wir also denjenigen verweisen, der Wifsbegierde und Sinn für das Höhere fühlt. Ein paar Erläuterungs-Beispiele mögen hier aber noch Platz finden, indem sie auf eine anschauliche Weise zeigen, dafs die Glieder einer stets abnehmenden geometrischen Reihe nicht allein näherungsweise, sondern zuletzt wirklich unteilbar werden, und daher jene unendlich kleine Gröfse $\frac{1}{\infty}$ nur ein Gedankending ist, dessen Gröfse, weil, nicht mehr mefsbar, gleich Null gesetzt werden mufs.

1) Man denke sich die Lebensdauer eines Menschen als Einheit. Von dieser Zeit wird doch erst die Hälfte, $\frac{1}{2}$, verlebt, dann von der übrig bleibenden Hälfte wiederum die Hälfte, oder $\frac{1}{4}$ vom Ganzen u. s. f. ins Unendliche, nämlich: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \cdots \frac{1}{2^\infty}$. Wer nun aber a sagt, mufs auch b sagen. Giebt man zu, dafs ein Mensch wirklich sterben, mithin seine Lebenszeit ganz verleben kann, so mufs man auch zugeben, dafs das letzte Glied seiner Lebensprogression (Grenze) eine wirklich unteilbare Gröfse (ein Hauch, ein Augenblick) ist. Denn wäre dies nicht, so würde ja, weil die Zeit eine stetige (fliefsende) Gröfse ist, wovon kein Teil übersprungen oder ausgelassen werden kann, noch ein Rest zum Nachsitzen bleiben.

Alle wirklichen Gröfsen stimmen darin miteinander überein, dafs jede aus mehreren gleichartigen Teilen besteht, mithin teilbar sein mufs, weil man sie sonst nicht mit einer gleichartigen und wirklichen Gröfse, als bestimmten und angebbaren Mafsstab ausmessen, oder in Zahlen auflösen und mithin auch keinen bestimmten Begriff von deren Quantum haben könnte.

Da nun aber der letzte Augenblick der oben angenommenen Zeiteinheit nicht mehr in bestimmte Teile aufgelöst werden kann, so begreift man auch, dafs eine solche unteilbare oder unendlich kleine Gröfse $\frac{1}{\infty}$, wenn sie auch noch in der Vorstellung existieren, und nicht mit 0 verwechselt werden soll, doch nicht mit endlichen oder wirklichen Gröfsen verglichen werden kann; dafs ein solches Gedankending etwas unpassend noch Gröfse genannt wird, wird der entschuldigen, welcher für diese übersinnliche Vorstellung keinen bessern Ausdruck weifs.*)

*) Eine angebbare Zeit mufs Dauer, also Anfang und Ende haben. Ein Augenblick aber (die Augenblicklichkeit) hat keine angebbare Dauer;

Hiernach ist also klar, daſs die häufig vorkommende Redensart: eine Gröſse kann kleiner werden als jede angebbare Gröſse, ganz dasselbe sagt, als: jene Gröſse muſs im Unendlichen wirklich unteilbar werden.

Je mehr Glieder von der Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots$ summiert werden, je kleiner wird der Unterschied, um welchen die Summe von 1 abweicht. Da nun dieser Unterschied mit der Zahl der Glieder immer kleiner wird, und also im Unendlichen kleiner, als jede angebbare Gröſse werden muſs, so ist klar, daſs 1 nicht bloſs die Grenze giebt, welche jene Summe nicht zu überschreiten vermag, sondern in aller Strenge wirklich die Summe der ganzen unendlichen Reihe ist, denn weil dann in $s = 1 - \frac{1}{2^\infty}$ das Glied $\frac{1}{2^\infty}$ unteilbar und $=$ Null zu achten ist, so hat man $s = 1$. Man sieht also, daſs eine Sache in einem Sinne unendlich und in einem andern wieder endlich sein kann. Die Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ in infinitum ist unendlich in bezug auf die Zahl ihrer Glieder, aber der Betrag derselben dennoch eine endliche Gröſse, $= 1$.

Merkwürdig ist bei dieser Reihe noch, daſs jedes Glied derselben so groſs ist, als die Summe aller folgenden:

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} \cdots\cdots \frac{1}{\infty}$$

$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} \cdots\cdots \frac{1}{\infty}$$

Anfänger glauben nun aber darin eine Ungereimtheit zu finden, daſs, weil jedes vorhergehende Glied zweimal so groſs ist, als das nächst folgende: auch das letzte Glied, welches doch 0 sein soll, zweimal genommen dem vorletzten gleich sein müsse und so herauf bis zu Anfang, wo alle Glieder zu 0 würden. Wer aber dermaſsen philosophiert, ist mit sich selbst im Widerspruch, indem er glaubt, das Unendliche beim Ende und eine absolute Null gefaſst zu haben. Weil die Reihe kein Ende hat, so kann auch von einem letzten Gliede nicht die Rede sein. Es verhält sich vergleichungsweise, wie mit einem Kreise, der kein wirkliches Ende hat. Soll er's haben, so muſs man es erst hineinlegen. Ebenso mit der Reihe, sie hat kein wirkliches Ende; man muſs es für den Augenblick annehmen, daher $\frac{1}{\infty}$ (weil nicht angebbar) $= 0$ setzen und dann bedenken, daſs die Reihe schon mit den vorletzten Gliedern expiriert.

Auch alle übrigen fallenden, unendlichen, geometrischen Reihen können summiert werden. Man hat z. B.:

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \cdots\cdots \frac{1}{\infty} = \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{80} + \cdots\cdots \frac{1}{\infty} = \tfrac{4}{15}$$

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{12} + \cdots\cdots \frac{1}{\infty} = \tfrac{2}{3}$$

2) Nach der § 318 gegebenen Regel findet man den Wert des ins Unendliche fortlaufenden periodischen Decimal-Bruchs $0{,}3636\ldots = \frac{4}{11}$, nämlich:

Anfang und Ende sind gleichzeitig, und deshalb die Augenblicklichkeit unteilbar. Obwohl nun, wegen dieser Unteilbarkeit, dem Augenblick auch keine Gröſse (Quantum, d. h. ein bestimmtes Verhältnis zu einem endlichen Maſsstabe) zuerkannt werden kann, so ist doch gewiſs, daſs in unserm Bewuſstsein etwas haftet, was von dem absoluten Nichts (Null) verschieden ist. Kein Mensch kann sich eine Dauer als den Verfluſs von lauter Nichtsen, wohl aber als den Verfluſs von lauter unteilbaren und unzähligen Augenblicken denken.

$$\begin{aligned} s &= 0{,}363636\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ 100s &= 36{,}363636\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\\ 99s &= 36\\ s &= \tfrac{36}{99} = \tfrac{4}{11} \end{aligned}$$

Obgleich durch das Resultat von der Richtigkeit dieser Regel vollkommen überzeugt, so pflegen doch gute Köpfe, welche allenthalben auf den Grund gehen und Ursache und Wirkung kennen wollen, die scheinbar gegründete Einwendung zu machen, dafs die Reihe der Decimalstellen in der 2ten Gleichung, wegen Vorrückung des Decimalzeichens, um zwei Glieder kürzer geworden sei, als die erste, und mithin die Differenz beider Reihen Decimalen, streng genommen, nicht 0 sein könne, weil, wenn auch erstere ins Unendliche gehe, letztere doch noch zwei Glieder davon entfernt sei.

Dies ist aber wieder ein Fehlschlufs, der von den Fesseln des Geistes herrührt, welcher der Phantasie nicht folgen kann und immer wieder in seine Schranken zurückfällt. Wie könnte wohl der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen durch zwei Schritte geschehen? Die vermeintlichen beiden Glieder, um welche die eine Reihe tiefer ins Unendliche gehen soll, sind 0. Das Unendliche kann durch keine endliche Gröfse vergröfsert oder verkleinert werden. Beide Reihen Decimalen gehen ins Unendliche (ohne Aufhören) fort, und daher gleich weit. $(\infty \pm a = \infty.)$

Man kann aber auch hier die Sache wieder anschaulich machen und die zweite Gleichung aus der ersten entstehen lassen, indem man der ersten Reihe Decimalen zwei Glieder vorsetzt, oder 36 Ganze dazu addiert, indem wirklich:

$$\begin{aligned} s &= \tfrac{4}{11} = 0{,}3636\ldots\ldots\\ \text{und } 100s &= 36\tfrac{4}{11} = 36{,}3636\ldots\ldots\\ \text{mithin: } 99s &= 36 = 36{,}0000\ldots\ldots \end{aligned}$$

3) Um das eben Gesagte noch von einer andern Seite zu beleuchten, wollen wir die Perioden des Bruchs 0,3636.... wie eine geometrische Reihe summieren. Man kann nämlich die Perioden als Glieder einer solchen Reihe betrachten, wo dann $\frac{36}{100}$ das erste Glied, $\frac{1}{100}$ der Exponent, und die Anzahl der Glieder $=\infty$ ist, und daher ein letztes Glied $\frac{1}{\infty} = 0$ annehmen. Es ist:

$$s = 0{,}3636\ldots = \tfrac{36}{100} + \tfrac{36}{10000} + \tfrac{36}{1000000} + \ldots \frac{1}{\infty}$$

$$\text{mithin: } s = \frac{\frac{1}{\infty}\cdot\frac{1}{100} - \frac{36}{100}}{\frac{1}{100} - 1} = \frac{0 - \frac{36}{100}}{-\frac{99}{100}} = \tfrac{36}{99} = \tfrac{4}{11}.$$

330.

Unter dem Titel „mathematische Sophismen“ hat Herr Viola eine kleine Sammlung von Trugschlüssen, jedoch ohne Aufdeckung derselben, herausgegeben (Wien 1850). Dazu aufgefordert, wollen wir hier ein paar der verfänglichsten derselben nachweisen.

Zuerst beweist Herr Viola folgendermafsen, dafs 4 gröfser, als 12 ist:

$$\begin{array}{rc} \text{Es ist offenbar:} & +7 > +5\\ \text{addiert:} & -8 = -8\\ \hline & -1 > -3\\ \text{multipliziert:} & -4 = -4\\ \hline & 4 > 12 \end{array}$$

Unter den Grundsätzen, welche Viola, als unumstöfslich, vorausschickt und worauf er seine Schlüsse baut, wie z. B. Gleiches zu Gleichem addiert, giebt Gleiches &c. &c., kommt auch der Satz vor: „Gleiches zu Ungleichem addiert, giebt Ungleiches und zwar dort das Gröfsere, wo der gröfsere Summand genommen wurde.“

Dieser letztere Satz ist aber nicht allgemein, sondern nur für den speziellen Fall gültig, wo die, aus der gegebenen Ungleichheit, durch Addition oder Subtraktion gezogene neue Ungleichheit ganz dieselben Vorzeichen hat, Beispiel (1).

$\underbrace{}_{1}$	$\underbrace{}_{2}$	$\underbrace{}_{3}$
$+7>+5$	$+7>+5$	$+8>+5$
$-4=-4$	$-8=-8$	$-6=-6$
$+3>+1$	$-1<-3$	$+\ldots\ldots-$

Kehren die Vorzeichen sich um, so mufs allemal auch das Ungleichheitszeichen umgedreht werden, Beispiel (2). Kommen beiderseits des Resultats entgegengesetzte Vorzeichen, Beispiel (3), so ist gar keine Gröfsenvergleichung möglich und das Ungleichheitszeichen hat dann keinen Sinn mehr, weil man, in betreff des Gröfser oder Kleiner, nur ganz gleichartige Gröfsen miteinander vergleichen und z. B. nicht sagen kann, dafs 3 Minuten mehr ist, als 2 Thaler, oder dafs $+3$ mehr ist, als -2.

Die Vorzeichen $+$, $-$ sind hier gleichsam Eigenschaftswörter (§ 144, Anmrkg. 2). Eine Zahl absolut (beziehungslos) gedacht, hat gar kein Vorzeichen.

Die alte falsche Vorstellung, dafs negative Gröfsen kleiner als positive, ja gar kleiner als Nichts seien, entsprang aus der Vergleichung von Vermögen mit Schulden, indem man sagte: wenn eine Person A Schulden hat, so hat sie weniger als Nichts. Schulden mögen der Person A noch verwünschbarer, als Nichts sein; Wünsche aber kann die Mathematik nicht berücksichtigen. Eine Gröfse, kleiner als Null, ist unmöglich.

331.

Folgendermafsen wird nun bewiesen, dafs alle Zahlen einander gleich sind. Es sei $a>b$ und $a-b=c$, dann ist:

$$(a-b)(a-b)=(a-b)\,c$$
$$a^2-2ab+b^2=ac-bc\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$-ac+ab-b^2=-ac+ab-b^2$$
$$a^2-ab-ac=ab-b^2-bc\ldots\ldots(2)$$
$$a(a-b-c)=b(a-b-c)\ldots\ldots(3)$$
$$a=b$$

Aus der Voraussetzung $a-b=c$ folgt: $ab-b^2=bc$. Es ist also auf beiden Seiten der Gleichung (1) die gleiche entgegengesetzte Gröfse $-ac+bc$ addiert und die Gleichung (2) eigentlich: $0=0$. Da jedoch auf diese Weise, beiderseits der gemeinschaftliche Faktor $a-b-c$ hinein praktiziert worden, der, wie aus $a-b=c$ folgt: $=0$ ist, so ist die Gleichung (3) $a.0=b.0=0$. Wenn aber in einem Produkt ein Faktor Null ist, so ist das ganze Produkt $=0$, die übrigen Faktoren mögen sein, was sie wollen, weil man eine Null nicht multiplizieren, überhaupt keine arithmetische Operation damit vornehmen kann.

332.

Auf folgende Weise wird bewiesen, dafs fünf gleich vier ist. Es sei $x=5$ und $z=4$, so ist:

$$
\begin{aligned}
x+z&=9 \text{ und}\\
(x+z)(x-z)&=9(x-z)\\
x^2-z^2&=9x-9z\\
z^2-9x&=z^2-9x\\
\hline
x^2-9x&=z^2-9z\\
x^2-9x+\tfrac{81}{4}&=z^2-9z+\tfrac{81}{4}\\
(x-\tfrac{9}{2})^2&=(z-\tfrac{9}{2})^2 \text{ .... (1)}\\
x-\tfrac{9}{2}&=z-\tfrac{9}{2} \text{ .... (2)}\\
x&=z
\end{aligned}
$$

Die Gleichung (2) ist falsch. Setzt man in (1) statt x und z ihre, keineswegen gesuchten, sondern im voraus bestimmten Werte, so sieht man, dafs die Wurzel linker Hand positiv $=\frac{1}{2}$, rechter Hand aber negativ $=-\frac{1}{2}$ ist. Die Gleichung (2) ist also richtig geschrieben: $x-\frac{9}{2}=-(z-\frac{9}{2})$, woraus wieder $x+z=9$ (§ 216, Anmrkg.). Der Grundsatz: Gleiches gleich behandelt, giebt Gleiches, ist richtig. Umgekehrt kann man aber nicht sagen: dafs Gröfsen, die gleich behandelt, Gleiches geben, auch immer gleich seien. Aus $(+a)^2=(-a)^2$ folgt nicht, dafs $+a$ gleich $-a$ ist.

333.

Schliefslich wollen wir noch die Behauptung widerlegen, dafs es Gleichungen mit einer unbekannten Gröfse giebt, die gar keine Wurzeln haben. Es sei, heifst es:

$$1+\sqrt{x-1}=+\sqrt{x-4} \text{ folglich (§ 230)}$$
$$x=5$$

Dieser Wert von x leistet der gestellten Forderung nicht Genüge. Woran liegt das? Antwort: weil hier etwas ganz Unmögliches gefordert wird und weil man aus falschen Voraussetzungen, wie z. B. $8=5$ keine Wahrheiten folgern kann. Denn bevor man anfing zu rechnen, konnte man schon sehen, dafs die aufgestellte Voraussetzung (Gleichung) falsch ist. Erstlich kann offenbar x keine positive Zahl, gröfser als 4, sein, weil dann schon $\sqrt{x-1}>\sqrt{x-4}$ ist. Zweitens kann x auch nicht kleiner als 4, oder kleiner als 1, oder negativ sein, weil eine laterale Gröfse nicht einer komplexen oder einer reellen Gröfse gleich sein kann. Aus demselben Grunde kann x auch keine laterale und auch keine komplexe Gröfse sein. Aber, frägt man, woher kommt es denn, dafs die Rechnung doch den Wert von $x=5$ giebt? Wir haben schon bemerkt, dafs Gröfsen, die gleich behandelt, auf Gleiches führen, nicht immer gleich sind. Nimmt man von dem doppelten Vorzeichen der Wurzel das untere (§ 216, Anmrkg.), so wird aus der Ungleichheit eine mögliche Gleichheit, nämlich:

$$1-\sqrt{x-1}=-\sqrt{x-4}$$

die ganz so behandelt $x=5$ giebt. Es ist bei arithmetischen Operationen immer zu beachten, dafs die mathematischen Zeichen nicht dazu dienen sollen, um daraus, in gedankenlosem Spiele, Wahrheiten abzuleiten, sondern wie die Buchstaben nutzen, um das als möglich und wahr Erkannte dem Papier anzuvertrauen.

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.

Im Verlage von **Friedr. Brandstetter** in **Leipzig** ist ferner erschienen:

Lübsen, H. B., Ausführliches Lehrbuch der Analysis zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. **Siebente, verbesserte Auflage.** gr. 8. (204 S.) 3,60 M.

———, **Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung** zum Selbstunterricht. Mit Rücksicht auf das Notwendigste und Wichtigste. Mit 53 Figuren im Text. **Sechste, verbesserte Auflage.** gr. 8. (360 S.) 8 M.

———, **Ausführliches Lehrbuch der Elementargeometrie.** Ebene und körperliche Geometrie. Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 193 Figuren im Text. **Fünfundzwanzigste, verbesserte Auflage.** gr. 8. (178 S.) 3 M.

———, **Ausführliches Lehrbuch der Trigonometrie.** Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 58 Figuren im Text. **Dreizehnte Auflage.** gr. 8. (105 S.) 2,40 M.

———, **Ausführliches Lehrbuch der analytischen oder höheren Geometrie.** Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf das Notwendigste und Wichtigste. Mit 122 Figuren im Text. **Elfte Aufl.** gr. 8. (210 S.) 4 M.

———, **Einleitung in die Mechanik.** Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 162 Figuren im Text. **Vierte Auflage.** gr. 8. (309 S.) 6,80 M.

Ferner:

Schurig, Rich., Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauche an niederen und höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. I. Teil. **Spezielle Zahlenlehre** (Ziffernrechnen). Zugleich ein Handbuch für Volksschullehrer. gr. 8. (286 S.) 3,60.

Kein gewöhnliches Lehrbuch der Arithmetik in der althergebrachten Form und den üblichen Unterrichtsmethoden sich anschliessend, sondern ein **ganz eigenartiges Werk,** zu welchem der Grundgedanke der durch langjährige Erfahrungen und Untersuchungen gewonnenen Überzeugung entsprungen ist, dass die Lehren der Mathematik, insbesondere der Arithmetik, noch immer einer wahrhaft logischen Begründung, einer planmässigen Anordnung und einer für das stetige gesicherte Fortschreiten des Lernenden geeigneten Darstellung ermangeln. Es steht daher mit Sicherheit zu erwarten, dass die von dem Herrn Verfasser dieses Buchs eingeführte methodische Vereinfachung des arithmetischen Lehrgebäudes und dessen Zurückführung auf möglichst wenige, in strenger Folge logisch fortentwickelte Sätze sich in kurzem Bahn brechen und eine allgemeine Einführung in den mathematischen Lehrkursus finden werden.

Der **II. Teil** (bereits unter der Presse) enthält: die **Allgemeine Zahlenlehre** (das Buchstabenrechnen) und der **III. Teil**, mit welchem das Werk abschliesst, wird die **Algebra nebst ihrer Anwendung auf die Analysis** enthalten.

Löbe, Dr. M., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik. Für Gymnasien, Realschulen u. höhere Bürgerschulen. **Zweite Aufl.** 3 Hefte.

Heft I: Grundrechnungen mit ganzen, unbenannten und gleichbenannten Zahlen. — Grundrechnung mit ungleichbenannten Zahlen. $5^1/_4$ Bog. geh. 75 Pf.

Heft II: Rechnungen mit Decimalzahlen. — Rechnungen mit gemeinen Brüchen. $5^1/_2$ Bog. geh. 80 Pf.

Heft III: Prozentrechnung. — Verteilungs- und Mischungsrechnung. — Verhältnisse und Proportionen. $4^3/_4$ Bog. geh. 75 Pf.

———, **Auflösungen** zu den „Aufgaben aus der Arithmetik". Heft 1—3. $3^1/_4$ Bog. geh. 1 M.