Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Einundzwanzigstes Buch. Zinseszinsen-Rechnung

urn:nbn:de:bsz:31-264709

Einundzwanzigstes Buch.

Zinseszinsen-Rechnung.

290.

Wenn die Zinsen eines Kapitals, so wie sie fällig sind, gleich wieder als neues Kapital anderweitig auf Zinsen gegeben, oder was dasselbe ist, gleich zum Kapital geschlagen, und also im folgenden Zeitraum mit verzinset werden, so sagt man, das Kapital stehe auf Zinseszinsen.

Daſs ein solches Zinseszinsen tragendes Kapital sehr schnell anwachsen muſs, und mit der Zeit jede beliebige Gröſse erreichen kann, ist vorauszusehen. Giebt man z. E. nur 100 ℳ zu 5% ein Jahr auf Zinsen, so hat man nach Verlauf dieses Jahrs an Kapital und Zinsen $100+\frac{100}{100}\cdot 5=105$ ℳ zu fordern, und kann also, wenn man beides aufs neue zu denselben Prozenten stehen läſst, einen Wechsel auf 105 ℳ, ebenso nach Verlauf des 2ten Jahrs einen Wechsel auf $105+\frac{105}{100}\cdot 5=110\frac{1}{4}$ ℳ, am Ende des 3ten Jahrs auf $110\frac{1}{4}+\frac{110^1/_4}{100}\cdot 5=115\frac{61}{80}$ ℳ ausgestellt, verlangen &c.

Fälle dieser Art kommen im gemeinen Leben täglich vor, namentlich im Finanz-, merkantilischen und ökonomischen Fache; bei allen Versorgungs-Anstalten, Tontinen, Witwen-, Waisen-, Leibrenten-, Central-, Lebensversicherungs- und Dienstboten-Kassen, Leihbanken und allen andern öffentlichen Fonds, deren vernünftige Einrichtung und gewissenhafte Verwaltung die Kenntnisse der Zinseszinsen-Rechnung, als deren Grundlage, voraussetzt.

291.

Aufgabe. Bezeichnet man ein Zinseszinsen tragendes Kapital allgemein durch a, die jährlichen Prozente durch p, die Zeit, während welcher es steht (in Jahren ausgedrückt), durch n, und den erreichten Anwachs (Accumulation), nämlich Grundkapital und Zinseszinsen, durch A, so ist offenbar jede der vier Gröſsen A, a, p, n eine bestimmte Funktion von den drei übrigen. Um nun einen klaren Begriff von dem Zusammenhang dieser vier Gröſsen zu erhalten, sollen die Gleichungen für dieselben gefunden werden.

Auflösung. Man suche zuerst die Funktion für A, woraus sich dann die andern durch Reduktion leicht ableiten lassen.

Nach Verlauf des ersten Jahrs wird das Grundkapital a zu: $a+\frac{a}{100}\cdot p=a(1+\frac{p}{100})$, d. h. man erhält den Anwachs des Kapitals a am Ende des ersten Jahrs, wenn man es mit der Gröſse $1+\frac{p}{100}$ multipliziert. Mit Anfang des 2ten Jahrs wird nun das neue Kapital $a(1+\frac{p}{100})$ belegt, mithin ist dessen Anwachs am Ende des zweiten Jahrs, indem man den vorhergehenden Schluſs wiederholt und nochmals mit $1+\frac{p}{100}$ multipliziert, $=a(1+\frac{p}{100})^2$, denn das mit Anfang des 2ten Jahres schon auf $a\ (1+\frac{p}{100})$ angewachsene Grundkapital wird, mit den Zinsen, am Ende des 2ten Jahrs zu:

$$a(1+\tfrac{p}{100})+\frac{a\,(1+\frac{p}{100})}{100}\cdot p=a(1+\tfrac{p}{100})[1+\tfrac{p}{100}]=a\,(1+\tfrac{p}{100})^2$$

am Ende des dritten Jahrs $=a(1+\frac{p}{100})^3$; allgemein am Ende des $n$ten Jahrs $=a\,(1+\frac{p}{100})^n$. Mithin ist:

$$A=a\,(1+\tfrac{p}{100})^n$$

Setzen wir der Einfachheit wegen:

$$1+\tfrac{p}{100}=z$$

$$\text{so ist } A=a\cdot z^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Für $p=5\,\%$ ist $z=1{,}05$; für $p=4\,\%$ ist $z=1{,}04$; für $p=3\frac{1}{2}\,\%$ ist $z=1{,}035$ &c.

Nimmt man auf beiden Seiten der obigen Gleichung die Logarithmen, so findet man folgende vier Formeln:

$$\log. A=\log.\ a+n\log. z \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\log.\ a=\log. A-n\log. z \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\log.\ z=\frac{\log. A-\log.\ a}{n} \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$n=\frac{\log. A-\log.\ a}{\log.\ z} \ldots\ldots\ldots (4)$$

292.

1. **Aufgabe.** Wie groſs wird das Kapital von 6000 ℳ, wenn es 16 Jahre zu 5 % Zinseszinsen steht?

Auflösung. Gegeben $a=6000$; $n=16$; $z=1{,}05$ und A gesucht. Mithin nach Formel (1):

$$A = a \cdot z^n$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ z = & 0,0211893 \\ & \underline{16} \\ & 1271358 \\ & \underline{211893} \\ & 0,3390288 \\ \log.\ a = & \underline{\underline{3,7781513}} \\ \log.\ A = & \underline{4,1171801} \\ A = & 13097 \quad \text{(nahe)} \end{array}$$

Anmerkung. Subtrahiert man das Grundkapital von dem Anwachs A, so erhält man den Betrag der aufgelaufenen Zinseszinsen.

293.

2. Aufgabe. Wie grofs mufs das Kapital sein, welches zu 4 % Zinseszinsen belegt, in 10 Jahren auf 300 ℳ anwächst?

Auflösung. Gegeben $z = 1,04$; $n = 10$; $A = 300$ und a gesucht. Aus der Formel $A = az^n$ folgt:

$$a = \frac{A}{z^n}$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ a = & \log. A - n \log. z \\ \log.\ z = & 0,0170333 \\ & \underline{10} \\ & 0,1703330 \\ \log.\ A = & \underline{\underline{2,4771213}} \\ \log.\ a = & 2,3067883 \\ a = & 202,669 \cdot\cdot \end{array}$$

Anmerkung. Der hier gefundene Wert von $a = 202,669$ ℳ heifst der auf 10 Jahre mit 4 % diskontierte Wert von 300 ℳ.

294.

3. Aufgabe. Ein Kapital von 900 ℳ ist mit seinen Zinseszinsen in 12 Jahren auf 1100 ℳ angewachsen. Zu wie viel Prozent war es belegt?

Auflösung. Es ist hier gegeben: $A = 1100$; $a = 900$; $n = 12$ und p gesucht. Man suche erst $z = 1 + \frac{p}{100}$, woraus dann p leicht zu finden. Aus der Grundformel $A = az^n$ folgt:

$$z^n = \frac{A}{a}$$

$$z = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$$

$$\log.\ z = \frac{\log. A - \log. a}{n}$$

$$\begin{array}{rl} \log. A = & 3,0413927 \\ \ldots\ a = & \underline{2,9542425} \\ & 0,0871502 \\ {}^{12)} & \underline{\underline{}} \\ \log.\ z = & 0,0072625 \\ z = & 1,01686 = 1,017 \text{ (nahe)} \end{array}$$

$$1 + \tfrac{p}{100} = 1,017$$

$$p = 1\tfrac{7}{10}\ \%$$

295.

4. Aufgabe. Wie lange mufs das Kapital von 600 ℳ zu 5 % Zinseszinsen stehen, um auf 800 ℳ zu kommen?

Auflösung. Gegeben $a=600$; $z=1{,}05$; $A=800$ und n gesucht. Aus der Grundformel $A=az^n$ folgt:

$$n=\frac{\log. A-\log. a}{\log. z}$$

$$\log. A=2{,}9030900$$
$$\ldots\ a=\underline{2{,}7781513}$$
$$0{,}1249387$$
$$\log. z=0{,}0211893$$
$$n=5{,}89\cdots \text{ Jahre.}$$

296.

1. Aufgabe. Ein zu 2000 cbm abgeschätztes Forstrevier verbessert sich jährlich um den 50sten Teil, d. i. 2 cbm auf je 100, also um 2%; wie grofs wird es bei stetem Zuwachs nach 20 Jahren sein?

Antwort. 2971,9 cbm.

2. Aufgabe. Nach der Sündflut sollen nur 3 Paar Menschen gelebt haben, deren Fortpflanzung vermöge ihres hohen Alters in 200 Jahren eine Million Köpfe zählte. Wie viel Prozent oder den wievielsten Teil betrug die jährliche Zunahme?

Antwort. $6\frac{1}{6}$% oder den 16ten Teil beinahe.

3. Aufgabe. Wie grofs ist der gegenwärtige Wert eines erst nach 15 Jahren fälligen Kapitals von 1000 ℳ, oder, was dasselbe ist: Jemand ist genötigt, eine, erst nach 15 Jahren anzutretende Erbschaft, an Wert 1000 ℳ, gleich zu verkaufen; wieviel kann ihm jetzt dafür gegeben werden, 5% gerechnet?

Antwort. Man mufs den Wert von 1000 ℳ auf 15 Jahre diskontieren, d. h. ein Kapital a suchen, welches nach 15 Jahren mit 5% Zinseszinsen auf 1000 ℳ anwächst. Man findet (nach Formel 2) $a=481{,}017$ ℳ.

4. Aufgabe. Ein Wucherer leihet jemandem 500 ℳ und läfst sich darüber einen nach $2\frac{1}{2}$ Jahren ohne Zinsen zahlbaren Wechsel auf 700 ℳ ausstellen. Wie viel Prozent hat dieser jährlich genommen?

Antwort. Über 14%.

5. Aufgabe. Wieviel hätte ein zu Christi Geburt zu 5% belegter Pfennig bis 1884 eintragen können?

Antwort. $\log. A=\log. 1+1884 \log. 1{,}05=1884\,(0{,}0211893\ldots\ldots)$. Die zu dem $\log. A=39{,}9206\ldots.$ gehörige Zahl müfste mit 40 Ziffern geschrieben werden. Sie beträgt mehr als 8329 Sextillionen, welche Anzahl Pfennige in reines Gold umgesetzt und geschmolzen, eine Kugel geben würde, die 941 Millionen mal so grofs als die Erde wäre.

6. Aufgabe. Wie grofs wird ein zu 5% belegtes Kapital von 6000 ℳ in 10 Jahren, mit halbjährlicher Zinszahlung, d. h. $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$% halbjährlich gerechnet?

Antwort. Weil hier ausdrücklich halbjährliche Zinszahlung bedungen ist, so mufs man ein halbes Jahr als Zeit-Einheit betrachten und mithin 20 Jahre statt 10, und $2\frac{1}{2}$% statt 5% rechnen, alsdann findet man: 9831,7 ℳ.

* Wenn jemand ein Kapital, z. B. 100 ℳ, zu 6% jährlich zu zahlenden Zinsen verleiht, das Kapital aber schon nach einem Vierteljahre wieder kündigt, so kann er nach Recht und Billigkeit offenbar nicht $\frac{6}{4} = 1{,}5$ ℳ vierteljährliche Zinsen und also auch nicht an Kapital samt vierteljährlichen Zinsen $100\ (1{,}015) = 101{,}5$ ℳ fordern. Weil nämlich die Zinsen und also auch die Zinseszinsen jährlich oder alle v i e r Vierteljahre zu zahlen bedungen sind, so mufs man hier offenbar das Vierteljahr als Zeit-Einheit betrachten, und daher solche vierteljährliche Prozente annehmen, welche in 4 Vierteljahren das Kapital 100 ℳ mit den vierteljährlichen Zinseszinsen auf die bedungenen 106 ℳ bringen. Nennt man also die vierteljährlichen Zinsen x, so mufs sein: $100 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^4 = 106$.

Hieraus folgt: $1 + \frac{x}{100} = \sqrt[4]{1{,}06} = 1{,}01467$, und die vierteljährlichen Prozente $x = 1{,}467$.

Wer also jährlich 6% zu zahlen schuldig ist, braucht für ein Vierteljahr nicht 1,5, sondern nur 1,467% zu entrichten.

Diese Untersuchung bestätigt zugleich die völlige Allgemeinheit der § 291 gefundenen Formel: $A = az^n$; sie gilt nämlich auch für die Fälle, wo n eine gemischte oder gebrochene Zahl ist.

Beispiel. Jemand giebt $a = 20000$ fl. auf Zinseszinsen zu 5% jährlich; wieviel kann er nach $12^1/_2$ Jahren zurückfordern?

Antwort. Es ist:

$$\log. A = \log. 20000 + 12^1/_2 \log. 1{,}05$$
$$A = 36804{,}1 \text{ fl.}$$

Hätte man aber den Anwachs erst für 12 ganze Jahre zu 5% und dann den ferneren Anwachs in dem folgenden halben Jahre statt zu $100\ (\sqrt{1{,}05} - 1)$, zu $\frac{5}{2}$% berechnen wollen, so würde der Fehler hier freilich nur 11 fl., für ein gröfseres Kapital aber mehr betragen haben.

298.

Aufgabe. In wieviel Jahren kann ein Kapital, a, zu dem Zinsfuſse z belegt, $m$mal, z. B. 2, 3, 4mal so grofs werden?

Auflösung. Man setze n Jahre, so wird das Kapital a zu az^n, da nun dieses $= ma$ sein soll, so hat man:

$$az^n = ma$$

oder auf beiden Seiten durch den gemeinschaftlichen Faktor a dividiert:

$$z^n = m$$

$$n = \frac{\log. m}{\log. z}$$

Man sieht also, daſs die gesuchte Zeit n, in welcher das Kapital a auf das $m$fache wachsen soll, eine bloſse Funktion von dem Prozent und also von der Gröſse des Kapitals a völlig unabhängig ist. In derselben Zeit, in welcher sich ein Kapital von 100 ℳ verdoppelt, muſs sich auch jedes andere zu demselben Prozent belegte Kapital verdoppeln.

Beispiele. 1) In wieviel Jahren verdoppelt sich ein Kapital, wenn es zu 5%, und in wieviel, wenn es zu 4% belegt ist?

Antwort. Hier ist $m=2$ und $z=1{,}05$

$$n=\frac{\log.\ 2}{\log.\ 1{,}05}=\frac{0{,}3010300}{0{,}0211893}=14{,}2\cdot\cdot$$

Zu 5% belegt, fällt also die Verdoppelung zwischen 14 und 15, mithin das Vierfache zwischen 28 und 29 Jahre &c. Zu 4% belegt, fällt die Verdoppelung zwischen 17 und 18 Jahre &c. Zu 3% nach 23,4.. Jahren.

2) Die Bevölkerung eines Staates hat sich in den letzten 39 Jahren verdoppelt. Wieviel Prozent beträgt die jährliche Zunahme?

Antwort. Gegeben $m=2$; $n=39$ und z gesucht. Aus der Gleichung: $z^n=m$ folgt:

$$n\log.\ z=\log.\ m$$

$$\log.\ z=\frac{\log.\ m}{n}=\frac{0{,}3010300}{39}=0{,}0077187$$

$$z=1{,}0179$$

$$\text{mithin: } p=1{,}79.$$

Also beinahe $1\frac{4}{5}$%, d. i. reichlich der 55ste Teil.

299.

Aufgabe. Ein Kapital, a, wird auſser den Zinseszinsen noch jährlich um eine bestimmte Summe, b, vergröſsert, die am Ende eines jeden Jahrs, das letzte mitgerechnet, zugelegt wird. Es soll eine Funktion für den hiernach in n Jahren entstehenden Anwachs A, nach dem Zinsfuſs z gerechnet, gefunden werden.

Auflösung. Das Kapital a wird am Ende des $n$ten Jahrs zu az^n; die erste Zulage steht ein Jahr weniger, also $n-1$ Jahr auf Zinseszinsen und ihr Anwachs ist folglich $=b\cdot z^{n-1}$; die zweite Zulage steht nur $n-2$ Jahre auf Zinseszinsen und wird also $=b\cdot z^{n-2}$; die dritte Zulage wird $=b\cdot z^{n-3}$; die vorletzte Zulage trägt nur ein Jahr Zinsen; die letzte Zulage trägt gar keine Zinsen. Bezeichnen wir also die Summe sämtlicher angewachsener Kapitale mit A, so ist am Ende des $n$ten Jahrs:

$$A=az^n+bz^{n-1}+bz^{n-2}+bz^{n-3}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+bz+b.$$

Dieser Ausdruck läſst sich aber noch bedeutend zusammenziehen. Die Glieder, welche auf das erste (az^n) folgen, bilden offenbar eine geometrische Progression, bei welcher, rückwärts gelesen, b das erste Glied, z der Exponent, bz^{n-1} das letzte Glied und mithin die

Summe aller $= \frac{bz^{n-1}.z-b}{z-1} = \frac{bz^n-b}{z-1} = \frac{b(z^n-1)}{z-1}$ ist. (§ 256.)

Setzen wir also statt der Progression ihre Summe, so erhält man die folgende, weit einfachere Formel, und die daraus abgeleiteten:

$$A = az^n + \frac{b(z^n-1)}{z-1} \dots\dots\dots\dots (I)$$

$$a = \frac{A}{z^n} - \frac{b(z^n-1)}{z^n(z-1)} \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$b = \frac{(A-az^n)(z-1)}{z^n-1} \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$n = \frac{\log.[A(z-1)+b]-\log.[a(z-1)+b]^{*})}{\log.\ z} \dots\dots (4)$$

Anmerkung. Auf z läſst sich die Gleichung nicht reduzieren, weil diese Reduktion auf eine verwickelte höhere Gleichung führt. (§ 217.)

300.

Ist die jährliche Zulage dem anfänglichen Grundkapital gleich, so läſst sich die obige Formel (1), indem wir darin $b=a$ setzen und beide Glieder auf einerlei Benennung bringen, noch mehr zusammenziehen. Es ist dann:

$$A = \frac{a(z^{n+1}-1)}{z-1} \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$a = \frac{A(z-1)}{z^{n+1}-1} \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$n+1 = \frac{\log.A[(z-1)+a]-\log.a}{\log.\ z} \dots (3)$$

301.

Wird aber, statt der jährlichen Zulage b, am Ende eines jeden der n Jahre eine gleiche Summe b weggenommen, und die Gröſse

*) Es folgt nämlich aus (1): $A(z-1)=a(z-1).z^n+bz^n-b$ und hieraus:

$$A(z-1)+b=[a(z-1)+b].z^n$$

$$z^n = \frac{A(z-1)+b}{a(z-1)+b} \quad \&c.$$

des am Ende des $n$ten Jahres vorhandenen Kapitals durch A bezeichnet, so hat man am Ende des:

1sten Jahrs: $az - b$,
2ten Jahrs: $(az - b)z - b = az^2 - bz - b$
3ten Jahrs: $az^3 - bz^2 - bz - b$
10ten Jahrs: $az^{10} - bz^9 - bz^8 - \cdots - bz - b$

Allgemein, am Ende des $n$ten Jahrs:

$$A = az^n - (bz^{n-1} + bz^{n-2} + bz^{n-3} + \cdots + bz + b)$$

Oder kürzer, indem man die in Klammern stehende Progression summiert:

$$A = az^n - \frac{b(z^n - 1)}{z - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a = \frac{A}{z^n} + \frac{b(z^n - 1)}{z^n(z - 1)} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$b = \frac{(az^n - A)(z - 1)}{z^n - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$n = \frac{\log.[A(z - 1) - b] - \log.[a(z - 1) - b]}{\log.\ z} \ldots\ldots (4)$$

Ist der jährliche Abzug b kleiner als die jährlichen einfachen Zinsen des Grundkapitals, so mufs der Anwachs A offenbar immer gröfser werden. Ist aber der jährliche Abzug gröfser als die jährlichen Zinsen, so mufs der Anwachs A immer kleiner, also endlich einmal 0, und von da an, wenn der Abtrag noch fortdauert, entgegengesetzt werden, und mithin das gegenseitige Verhältnis des Gläubigers und Schuldners umkehren.

302.

Soll durch den jährlichen Abtrag b das Grundkapital a samt den Zinseszinsen in n Jahren gerade getilgt werden, so mufs in Formel (1) des vorhergehenden Paragraphen, $A = 0$, nämlich die beiden Glieder der rechten Seite einander gleich sein, daher:

$$\frac{b(z^n - 1)}{z - 1} = az^n \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Nach dieser Gleichung kann man, wenn von den vier Gröfsen a, b, n, z drei gegeben sind, die vierte finden (§ 299, Anm.). Es ist nämlich:

$$a = \frac{b(z^n - 1)}{z^n(z - 1)} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$b = \frac{a(z - 1)z^n}{z^n - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$n = \frac{\log. b - \log.[b - a(z - 1)]}{\log.\ z} \ldots (4)$$

303.

1. Aufgabe. Wie groſs wird ein zu 5 % Zinseszinsen auf 25 Jahre belegtes Kapital von 5000 ℳ, wenn noch am Ende eines jeden der 25 Jahre 200 ℳ zugelegt werden?

Antwort. 26477 ℳ. Man hat nämlich (§ 299):

$$A = az^n + \frac{b(z^n - 1)^{*)}}{z - 1}$$

Gegeben: $a = 5000$; $z = 1{,}05$, $b = 200$; $n = 25$.

$$\begin{array}{rl}
\log. z = & 0{,}0211893 \\
& 25 \\ \hline
& 1059465 \\
& 423786 \\ \hline
\log. z^{25} = & 0{,}5297325 \\ \hline
z^{25} = & 3{,}386355 \\ \hline
(z^{25} - 1) = & 2{,}386355^{*)} \\
\log. (z^{25} - 1) = & 0{,}3777350 \\
\log. b = & 2{,}3010300 \\ \hline
& 2{,}6787650 \\
\log. (z - 1) = & 0{,}6989700 - 2 \\ \hline
& 3{,}9797950 \\ \hline
b\dfrac{(z^n - 1)}{z - 1} = & 9545{,}42
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log. z^{25} = & 0{,}5297325 \\
\log. a = & 3{,}6989700 \\ \hline
& 4{,}2287025 \\ \hline
az^{25} = & 16931{,}77 \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
az^{25} = & 16931{,}77 \\
b\dfrac{(z^{25} - 1)}{z - 1} = & 9545{,}42 \\ \hline\hline
A = & 26477{,}19
\end{array}$$

304.

2. Aufgabe. Es werden 5500 ℳ zu $4\frac{1}{2}$ % Zinseszinsen angelegt, wie groſs bleibt der Rest nach 30 Jahren, wenn mit Ende eines jeden Jahrs 300 ℳ weggenommen werden?

Antwort. 2297 ℳ. Man hat nämlich:

$$A = az^n - \frac{b(z^n - 1)}{z - 1}$$

Gegeben: $a = 5500$; $z = 1{,}045$, $b = 300$; $n = 30$.

$$\begin{array}{rl}
\log. z = & 0{,}0191163 \\
& 30 \\ \hline
\log. z^{30} = & 0{,}5734890 \\
z^{30} = & 3{,}74532 \\ \hline
z^{30} - 1 = & 2{,}74532 \\ \hline
\log. (z^{30} - 1) = & 0{,}4385930 \\
\cdots b = & 2{,}4771213 \\ \hline
& 2{,}9157143 \\
\log. (z - 1) = & 0{,}6532125 - 2 \\ \hline
& 4{,}2625018 \\
b\dfrac{(z^{30} - 1)}{z - 1} = & 18302{,}13
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log. z^{30} = & 0{,}5734890 \\
\log. a = & 3{,}7403627 \\ \hline
& 4{,}3138517 \\ \hline
az^{30} = & 20599{,}26 \\
b\dfrac{(z^{30} - 1)}{z - 1} = & 18302{,}13 \\ \hline\hline
A = & 2297{,}13
\end{array}$$

---

*) Die zweiteiligen Gröſsen $(z-1)$ und (z^n-1) müssen, ehe man ihre Logarithmen nehmen kann, erst in einteilige zusammengezogen werden. (§ 283.)

305.

3. Aufgabe. Wie grofs mufs der jährliche Abtrag b sein, damit von dem auf 10 Jahre zu $2\frac{1}{2}$ % belegten Kapital von 6000 ℳ noch 1000 ℳ übrig bleiben?

Antwort. $596\frac{3}{10}$ ℳ. Es ist nämlich (§ 304):

$$b = (az^n - \mathrm{A})\frac{(z-1)}{z^n - 1}$$

Gegeben:

$\mathrm{A} = 1000$; $z = 1{,}025$;
$a = 6000$; $n = 10$.

$$\begin{aligned} 10 \log. z &= 0{,}1072390 \\ \log. a &= 3{,}7781513 \\ \hline & \ \ 3{,}8853903 \\ \hline az^{10} &= 7680{,}514 \\ \mathrm{A} &= 1000 \\ \hline az^{10} - \mathrm{A} &= 6680{,}514 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{10} &= 1{,}2800859 \\ z^{10} - 1 &= 0{,}2800859 \\ \hline \log. (az^{10} - \mathrm{A}) &= 3{,}8248100 \\ \cdots\cdots (z-1) &= 0{,}3979400 - 2 \\ \hline & \ \ 2{,}2227500 \\ \log. (z^{10} - 1) &= 0{,}4472913 - 1 \\ \hline \log. b &= 2{,}7754587 \\ b &= 596{,}291 \end{aligned}$$

306.

4. Aufgabe. Auf ein zu 5% Zinseszinsen stehendes Kapital von 30000 ℳ werden jährlich 3500 ℳ abgetragen; in wieviel Jahren wird dadurch das Kapital getilgt sein?

Antwort. $11\frac{1}{2}$ Jahr (beinahe).

Man hat nämlich (§ 302):

$$n = \frac{\log. b - \log. [b - a(z-1)]}{\log. z}$$

$$\begin{aligned} z - 1 &= 0{,}05 \\ a &= 30000 \\ \hline a(z-1) &= 1500 \\ b &= 3500 \\ \hline b - a(z-1) &= 2000 \end{aligned}$$

Gegeben:

$a = 30000$; $b = 3500$; $z = 1{,}05$.

$$\begin{aligned} \log. b &= 3{,}5440680 \\ \log. [b - a(z-1)] &= 3{,}3010300 \\ \hline & \ \ 0{,}2430380 \\ \log. z &= 0{,}0211893 \end{aligned}$$

$$n = \frac{0{,}2430380}{0{,}0211893} = 11{,}47$$

307.

5. Aufgabe. Jemand hat 25 Jahre hindurch ein jährliches Einkommen von 200 ℳ (z. B. Niefsbrauch, Rente, Aktie &c.) zu beziehen. Da er aber ein Geschäft anfangen will, so entschliefst er sich, seine 25jährige Rente zu verkaufen. Wieviel kann ihm jetzt dafür gegeben werden, wenn die Zinsen $3\frac{3}{4}$ % betragen?

Antwort. 3208,64 ℳ.

Auflösung. Hier wird ein Kapital a gesucht, welches samt seinen Zinseszinsen in 25 Jahren durch den jährlichen Abtrag von 200 ℳ getilgt ist. Diesen gegenwärtigen Wert der 25jährigen Rente findet man also nach der Formel 2, § 302.

$$a = \frac{b(z^n - 1)}{z^n(z-1)}; \qquad b = 200; \qquad z = 1{,}0375; \qquad n = 25.$$

log. z=0,0159881;	log.(z^{25}−1)=0,1790247;	log. z^{25}=0,3997025
25	··b=2,3010300	··(z−1)=0,5740313−2
799405	2,4800547	0,9737338−2
319762		
0,3997025		
z^{25}=2,510166		
z^{25}−1=1,510166		
z−1=0,0375		

2,4800547
0,9737338 − 2

log. a = 3,5063209
a = 3208,64··

308.

6. Aufgabe. Um eine Witwenpension von jährlich $b = 200$ ℳ zu kaufen, zahlt jemand an die Witwen-Kasse jährlich $a = 50$ ℳ. Wenn nun aber der Mann erst nach $n = 20$ und die Frau schon $m = 8$ Jahren später stirbt, wieviel hat dann die Witwen-Kasse gewonnen oder verloren, wenn beiderseits nach dem Zinsfuſse $z = 1{,}04$ gerechnet wird?

Auflösung. Werden die Zahlungen beiderseits mit Anfang eines jeden Jahrs geleistet, und der Schluſs der Rechnung erst nach dem verflossenen $n+m$ten Jahr gemacht, so steht die erste Einlage $n+m$ Jahre und ist also an Wert $= az^{n+m}$; die 2te Einlage steht ein Jahr weniger und ist also wert $= az^{n+m-1}$ &c. Die letzte Einlage steht nur $m+1$ Jahr und ist also az^{m+1} wert. Ebenso ist der Wert der ersten Pension b nach m Jahren $= bz^m$, der letzten $= bz$. Mithin ist:

$$A = az^{n+m} + az^{n+m-1} + az^{n+m-2} \ldots + az^{m+1} - (bz^m + bz^{m-1} + \ldots + bz)$$

Beide Progressionen summiert, kommt:

$$A = \frac{az^{n+m} \cdot z - az^{m+1}}{z-1} - \frac{bz^m \cdot z - bz}{z-1}$$

$$A = \frac{az^{m+1}(z^n - 1) - bz(z^m - 1)}{z-1}$$

Den ersten Teil des Zählers hätte man auch kürzer so finden können: Die n Einlagen betragen, weil sie mit Anfang eines jeden Jahrs bezahlt werden, am Ende des $n$ten Jahrs $= \frac{az(z^n - 1)}{z-1}$; dieses Kapital steht nun aber noch m Jahre und wird $= \frac{az^{m+1}(z^n - 1)}{z-1}$. Die obige Formel kann auch so geschrieben werden:

$$A = [az^m(z^n - 1) - b(z^m - 1)]\,\frac{z}{z-1}$$

Für den oben angegebenen Fall, wo $a = 50$; $b = 200$; $n = 20$; $m = 8$; $z = 1{,}04$, hätte also die Witwen-Kasse einen Vorteil von $A = 202$ ℳ.

Ebenso findet man leicht die Formeln für die Fälle, wo die Zahlungen halbjährlich oder am Ende des Jahrs geleistet, oder wo die Einlagen mit

Anfang, die Pension aber mit Ende des Jahrs entrichtet werden &c. Auch andere in dieser Art vorkommende juristische, politische, staatswissenschaftliche und dergleichen Fragen wird man nach dem Vorhergehenden beantworten können, und wir beschliefsen daher dieses Kapitel mit ein paar schwerern Aufgaben für Geübtere.

309.

* **Aufgabe.** Wie grofs ist der bare Wert a einer $n$jährigen Rente, welche durch eine geometrische Progression läuft, deren erstes Glied b und deren Exponent e ist; wo also am Ende des ersten Jahrs die Rente b, am Ende des zweiten Jahrs die Rente be, am Ende des dritten Jahrs die Rente be^2&c., am Ende des $n$ten Jahrs be^{n-1} gehoben wird, und die Rente mithin von Jahr zu Jahr in dem Verhältnis $1:e$ wachsen oder abnehmen mufs, je nachdem $e \gtrless 1$ ist.

Auflösung. Es ist am Ende des $n$ten Jahrs der Wert der:

$$\begin{array}{rl}
\text{1sten Rente} & = bz^{n-1} \\
\text{2ten Rente} & = be.z^{n-2} \\
\vdots & \quad \vdots \\
n-1\text{ten Rente} & = be^{n-2}.z \\
n\text{ten Rente} & = be^{n-1}
\end{array}$$

Der für alle Renten mit Anfang des ersten Jahrs gezahlte bare Wert a wird nach n Jahren zu az^n. Mithin mufs sein:

$$az^n = b.z^{n-1} + be.z^{n-2} + be^2.z^{n-3} + \ldots + be^{n-2}.z + be^{n-1}.$$

Die zweite Seite dieser Gleichung bildet eine geometrische Progression, wo bz^{n-1} das erste, be^{n-1} das letzte Glied, $\frac{e}{z}$ der Exponent, und deren

Summe mithin (§ 256) $= \dfrac{be^{n-1}\frac{e}{z} - bz^{n-1}}{\frac{e}{z} - 1} = \dfrac{be^n - bz^n}{e-z}$ ist.

Man hat also kürzer:

$$az^n = \frac{be^n - bz^n}{e-z}$$

$$\text{und } a = \frac{b.(e^n - z^n)}{z^n(e-z)} = \frac{b\left\{\left(\frac{e}{z}\right)^n - 1\right\}}{e-z}$$

310.

* **Aufgabe.** Wie grofs ist der bare Wert der durch n Jahre nach der arithmetischen Progression b, $2b$, $3b$, $4b$, $\cdot\cdot\, nb$ fortlaufenden Rente, wo also am Ende des ersten Jahrs b, und in jedem folgenden Jahr b mehr, als im nächst vorhergehenden, gehoben wird?

Auflösung. Heifst a der gegenwärtige Wert, so ist:

$$az^n = bz^{n-1} + 2b.z^{n-2} + 3b.z^{n-3} + \ldots + (n-1)bz + nb.$$

Diese, aus einer arithmetischen und geometrischen Progression zusammengesetzte Reihe läfst sich in ebenso viele geometrische Progressionen zerlegen, als Glieder vorhanden sind und dann summieren, wenn man zuvor jedes Glied in so viele Teile zerlegt, als der davorstehende numerische Koefficient Einheiten hat. Es ist nämlich:

$$2bz^{n-2} = bz^{n-2} + bz^{n-2}; \quad 3bz^{n-3} = bz^{n-3} + bz^{n-3} + bz^{n-3} \text{ \&c.}$$

Mithin:

$$az^n = \left\{ \begin{array}{rl} bz^{n-1} + bz^{n-2} + bz^{n-3} + bz^{n-4} + \ldots + bz^2 + bz + b \ldots\ldots\ldots & (1) \\ + bz^{n-2} + bz^{n-3} + bz^{n-4} + \ldots + bz^2 + bz + b \ldots\ldots\ldots & (2) \\ + bz^{n-3} + bz^{n-4} + \ldots + bz^2 + bz + b \ldots\ldots\ldots & (3) \\ + bz^{n-4} + \ldots + bz^2 + bz + b \ldots\ldots\ldots & (4) \\ + \ldots + bz^2 + bz + b \ldots\ldots\ldots & (5) \\ + \ldots + bz^2 + bz + b \ldots\ldots\ldots & (6) \\ + \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ + \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ + bz^2 + bz + b \ldots\ldots & (n-2) \\ + bz + b \ldots\ldots & (n-1) \\ + b \ldots\ldots & (n) \end{array} \right.$$

Jede Querreihe bildet eine geometrische Progression, deren Exponent z ist, und es ist die Summe der Reihe:

$$(1), = \frac{bz^{n-1}.z - b}{z-1} = \frac{b(z^n - 1)}{z-1}$$

$$(2), = \frac{bz^{n-2}.z - b}{z-1} = \frac{b(z^{n-1} - 1)}{z-1}$$

$$(3), = \frac{bz^{n-3}.z - b}{z-1} = \frac{b(z^{n-2} - 1)}{z-1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(n-2), = bz^2 + bz + b = \frac{bz^2.z - b}{z-1} = \frac{b(z^3 - 1)}{z-1}$$

$$(n-1), = bz + b = \frac{bz.z - b}{z-1} = \frac{b(z^2 - 1)}{z-1} \quad (\S\ 143,\ 2.)$$

$$(n), = b = \frac{b.z - b}{z-1} = \frac{b.(z-1)}{z-1}$$

Setzt man also in obige Gleichung statt der n Reihen ihre Summen, so ist:

$$az^n = \frac{b}{z-1}(z^n - 1) + \frac{b}{z-1}(z^{n-1} - 1) + \ldots\ldots + \frac{b}{z-1}(z^2 - 1) + \frac{b}{z-1}(z-1)$$

$$az^n = \frac{b}{z-1}\left\{z^n - 1 + z^{n-1} - 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + z^2 - 1 + z - 1\right\}$$

$$az^n = \frac{b}{z-1}\left\{z^n + z^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + z^2 + z - (1+1+\ldots+1)\right\}$$

Diese Summe der in Klammern stehenden Reihe $1+1+1+\ldots$ ist $=n$, weil n Glieder (Einheiten) vorhanden sind, die Summe der andern geometrischen Reihe ist $= \dfrac{z^n . z - z}{z-1} = \dfrac{z(z^n-1)}{z-1}$.

Substituiert man diese Summen, so kommt:

$$az^n = \frac{b}{z-1}\left\{\frac{z}{z-1}(z^n-1) - n\right\}$$

Mithin ist:

$$a = \frac{b}{z^n(z-1)}\left\{\frac{(z^n-1)z}{z-1} - n\right\}$$