

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Zwanzigstes Buch. Zusammenstellung der Regeln über den Gebrauch der
[...]

[urn:nbn:de:bsz:31-264709](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-264709)

Zwanzigstes Buch.

Zusammenstellung der Regeln über den Gebrauch der Logarithmen. Erläuterung durch Beispiele, welche ohne Logarithmen nur mit großer Mühe, teils gar nicht gelöst werden können. Verschiedene Bemerkungen &c.

277.

Ist ein Produkt zu entwickeln, so addiere man die Logarithmen der Faktoren; die Summe ist dann der Logarithmus des gesuchten Produkts, welches man also in den Tafeln aufschlagen kann (§ 258, 1). Auch Buchstaben-Ausdrücke lassen sich nach dieser Regel, in logarithmischen Formen entwickelt, darstellen. Ist z. B.:

$$x = abc$$

wo a , b , c Faktoren und x deren Produkt bedeutet, so ist allgemein:

$$\log. x = \log. a + \log. b + \log. c$$

Beispiel. Man suche x aus folgender Gleichung:

$$x = 823 \cdot 1305 \cdot \frac{3}{4} \cdot (2,40067) (0,0067925)$$

logarithmische Entwicklung:

$$\begin{array}{r} \log. 823 \qquad \qquad = 2,9153998 \\ \dots 1305 \qquad \qquad = 3,1156105 \\ \log. \frac{3}{4} = \dots 0,4285714 = 0,632^{02} \frac{18}{4} \} - 1 \\ \dots 2,40067 \qquad = 0,380^3 \frac{19}{12} \frac{8}{7} \} \\ \dots 0,0067925 = 0,8320296 - 3 \end{array}$$

$$\log. x = 7,8753956 - 4$$

oder $\log. x = 3,8753956$ (§ 272, Anmkg.)

$$\text{mithin: } x = 7505,776$$

Um zwei Zahlen durcheinander zu dividieren, subtrahiere man den Logarithmus des Divisors vom Logarithmus des Dividend; der Rest ist der Logarithmus des gesuchten Quotienten, den man also bloß aus den Tafeln abzuschreiben braucht. (§ 258, 2.)

Ist z. B.:

$$x = \frac{a}{b}$$

wo a den Dividend, b den Divisor und x den Quotienten bedeutet, so ist, auf beiden Seiten die Logarithmen genommen, allgemein:

$$\log. x = \log. a - \log. b.$$

Beispiel. Man suche x aus folgender Gleichung:

$$x = \frac{25,0035}{7123,0409}$$

Auflösung. Logarithmisch:

$$\begin{array}{r} \log. 25,0035 = 1,3980008 \\ \dots 7123,0409 = 3,8526653 \\ \hline \log. x = 0,5453355 - 3 \\ \text{also: } x = 0,003510229 \end{array}$$

Besteht der Dividend oder Divisor oder auch beide aus Faktoren, so kann man die Logarithmen von beiden erst besonders suchen und dann subtrahieren. Wäre z. B.:

$$x = \frac{abc}{de}$$

so ist: $\log. x = \log. (abc) - \log. (de)$
 oder: $\log. x = \log. a + \log. b + \log. c - (\log. d + \log. e)$
 oder: $\log. x = \log. a + \log. b + \log. c - \log. d - \log. e$

Beispiel. Man suche x aus folgender Gleichung:

$$x = \frac{0,035689 \cdot 6,083769}{34,595 \cdot 0,0050602}$$

Auflösung. Logarithmisch:

Zähler:	Nenner:
log. 0,035689 = 0,5525344 - 2	log. 34,595 = 1,5390133
... 6,083769 = 0,7841727	... 0,0050602 = 0,7041677 - 3
0,3367071 - 1	0,2431810 - 1
0,3367071 - 1	0,2431810 - 1
log. x = 0,0935261	
x = 1,240298	

* Wenn (wie im vorhergehenden Beispiele) mehrere Logarithmen addiert und von der Summe ein oder mehrere subtrahiert werden müssen, so kann man in dem Fall, wo die zu subtrahierenden Logarithmen genau in den Tafeln enthalten sind, und also nicht erst durch Hilfe der Proportionalteile gesucht zu werden brauchen, die Arbeit manchmal abkürzen, wenn man, statt Logarithmen zu subtrahieren, ihre dekadischen Ergänzungen addiert und dann wieder von der Summe der Kennziffer so viele Zehner weglässt, als dekadische Ergänzungen addiert sind. Die dekadische Ergänzung (d. E.) eines genau in der Tafel enthaltenen Logarithmus, d. h. das, was ihm an 10 fehlt, erhält man sehr leicht, indem man, mit der Kennziffer angefangen, jede Ziffer des Logarithmus gleich aus der Tafel von 9, und die letzte von 10 (in Gedanken) subtrahiert. Der Grund dieses kleinen, namentlich bei trigonometrischen Rechnungen häufig zu benutzenden Vorteils ist leicht einzusehen. Denn, ob man einen Logarithmus subtrahiert oder mit umgekehrtem Zeichen addiert, nachdem man seine Kennziffer zuvor um 10 vergrößert und verkleinert hat, das ist einerlei. Wäre z. B. der Logarithmus 2,3056707 zu subtrahieren, oder, was dasselbe ist, $-2,3056707$ zu addieren, so hat man:

$$\begin{aligned} 2,3056707 &= 10 + 2,3056707 - 10 \\ &= 10 - 7,6943293 \\ \text{mithin } -2,3056707 &= 7,6943293 - 10. \end{aligned}$$

Ob man also $-2,3056707$ oder die dekadische Ergänzung $7,6943293 - 10$ addiert, das ist einerlei.

Anstatt aber die dekadischen Ergänzungen zu benutzen (No. 1), kann man auch eben so gut die zu subtrahierenden Logarithmen mit umgekehrtem Vorzeichen unter die zu addierenden schreiben, und bei einiger Übung beiderlei Operationen zugleich verrichten (No. 2). Anfänger möchten aber besser thun, stets wie im § 278 zu verfahren.

$$\begin{array}{r} x = \frac{0,035689 \cdot 6,083769}{34,595 \cdot 0,0050602} \\ \text{No. 1.} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{No. 2.} \\ \begin{array}{r} \log. 0,035689 = 0,5525344 - 2 \\ \log. 6,083769 = 0,7841727 \\ \text{d. E. } \log. 34,595 = 8,4609867 - 10 \\ \text{= } \log. 0,0050602 = 9,2958823 + 3 - 10 \\ \hline \log. x = 0,0935261 \end{array} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \begin{array}{r} \log. 0,036789 = 0,5525344 - 2 \\ \log. 6,083769 = 0,7841727 \\ -\log. 34,595 = -1,5390133 \\ -\log. 0,0050602 = -0,7041677 + 3 \\ \hline \log. x = 0,0935261 \end{array} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x = 1,240298. \end{array}$$

Um eine Zahl auf eine Potenz zu erheben, muß man den Logarithmus der Zahl mit dem Potenz-Exponenten multiplizieren, so erhält man den Logarithmus der Potenz. Man hat zum Beispiel (§ 258, 3):

$$\begin{aligned} \log. a^4 &= \log. aaaa = \log. a + \log. a + \log. a + \log. a \\ \text{also: } \log. a^4 &= 4 \log. a \\ \text{allgemein: } \log. a^n &= n \log. a \\ \text{ebenso: } \log. a^x &= x \log. a \end{aligned}$$

Man suche x aus folgenden Gleichungen:

$$1) x = (1,3504)^{22}$$

Auflösung. Logarithmisch:

$$\log. 1,3504 = 0,1304624$$

22

$$\hline 2609248$$

$$\hline 2609248$$

$$\log. x = 2,8701728$$

$$\text{also } x = 741,6052$$

$$2) x = \left(\frac{300}{331}\right)^{10}$$

$$\log. 200 = 2,3010300$$

$$\dots 331 = 2,5198280 \quad (\S 272)$$

$$\hline 0,7812020 - 1$$

10

$$\hline 7,8120200 - 10$$

$$\log. x = 0,8120200 - 3$$

$$\text{mithin } x = 0,006486643$$

281.

Um aus einer Zahl eine Wurzel zu ziehen, braucht man nur den Logarithmus der Zahl durch den Wurzelexponenten zu dividieren; der Quotient ist dann der Logarithmus der gesuchten Wurzel. Es ist nämlich (§ 258, 4):

$$\log. \sqrt[n]{a} = \log. a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log. a;$$

$$\text{allgemein: } \log. \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log. a.$$

Beispiele:

$$1) x = \sqrt[7]{2}$$

$$\log. 2 = 0,3010300$$

$$\hline \log. x = 0,0430043$$

$$\text{also } x = 1,104089$$

Hat man aus einem echten Bruche eine Wurzel zu ziehen, also dessen negativen Logarithmus durch eine Zahl zu dividieren, so muß man (damit der negative Logarithmus die zum Aufsuchen des ihm zugehörigen Decimalbruchs bequeme Form behält, § 270) zur positiven und negativen Kennziffer erst so viele Einheiten addieren, daß sich die negative Kennziffer durch den Wurzelexponenten ohne Rest teilen läßt. So findet man z. E.:

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[5]{0,0375} \\
 \log. 0,0375 &= 0,5740313 - 2 \\
 &= 3,5740313 - 5 \\
 \log. x &= 0,7148063 - 1 \\
 \text{also } x &= 0,5185687
 \end{aligned}$$

282.

Kommen in einer logarithmisch zu entwickelnden Größe Faktoren oder Divisoren vor, welche Potenzen sind, so muß man natürlich von allen Wurzeln der verschiedenen Potenzen die Logarithmen besonders nehmen und mit ihren Exponenten multiplizieren, wie es folgende Beispiele andeuten:

$$1) \quad x = aaabb = a^3 b^2$$

$$\log. x = \log. a + \log. a + \log. a + \log. b + \log. b$$

$$\text{kürzer: } \log. x = 3 \log. a + 2 \log. b$$

$$2) \quad x = a^m b^n c^n$$

$$\log. x = m \log. a + n \log. b + n \log. c$$

$$3) \quad x = a^m \sqrt[n]{b^n} = a^m b^{\frac{n}{m}}$$

$$\log. x = \frac{m}{n} \log. a + \frac{n}{m} \log. b$$

283.

Unmittelbar kann man nur dann ein Produkt mit Logarithmen berechnen, wenn die Faktoren einteilige Größen sind. Vierteilige Faktoren muß man als einteilige betrachten, oder wenn die einzelnen Teile Zahlen sind, sie zuvor in einteilige Größen zusammenziehen, und daher jeden Teil, der eine Potenz oder Wurzelgröße ist, erst besonders mit Logarithmen berechnen. Sei z. B.:

$$1) \quad x = a^m (a + b)^n$$

$$\text{so ist: } \log. x = m \log. a + n \log. (a + b)$$

$$2) \quad x = \frac{(a + b^m)^n (a + b)}{(a - 1)^n}$$

$$\log. x = n \log. (a + b^m) + \log. (a + b) - n \log. (a - 1)$$

$$3) x = \sqrt[15]{\left(\frac{15}{32} - \sqrt[5]{\frac{3}{1144}}\right)^{+3}}$$

$$\log. 3 = 0,4771213$$

$$\dots 1144 = 3,0584260$$

$$\frac{+2}{0,4186953} - 3 \} \quad (\S 281)$$

$$\frac{5)}{0,4837391} - 1$$

$$\sqrt[5]{\frac{3}{1144}} = 0,3046064 \text{ subtrahiert von}$$

$$\frac{15}{32} = 0,46875 \dots$$

$$\frac{0,1641436}{\frac{15}{32}} = \frac{15}{32} - \sqrt[5]{\frac{3}{1144}}$$

$$\log. \left(\frac{15}{32} - \sqrt[5]{\frac{3}{1144}}\right) = \frac{+14}{0,2152240} - 1$$

$$\log. x = 0,9476816 - 1;$$

$$\text{also } x = 0,886506$$

284.

Da wir mittelst Logarithmen jede Wurzel von beliebigem Grade ausziehen können, so ist es jetzt auch leicht, alle reine höhere Gleichungen zu lösen. Würde z. E. aus folgender reinen Gleichung vom 11ten Grade x gesucht (§ 219):

$$\frac{2}{3}x^{11} + 0,501 = 2x^{11} + 6,05$$

$$\text{so ist: } \frac{2}{3}x^{11} - 2x^{11} = -0,501 + 6,05$$

$$-\frac{4}{3}x^{11} = 5,549$$

$$x^{11} = -4,16175$$

$$x = \sqrt[11]{-4,16175} \quad (\S 216, 3)$$

$$\log. 4,16175 = 0,6192760 (n)$$

$$\log. x = 0,0562978(n)$$

$$x = -1,138407.$$

Anmerkung. Durch das dem Logarithmus angehängte (n) deutet man an, daß die zu ihm gehörige Zahl mit dem Minus-Zeichen (negativ) genommen werden muß. Da die Logarithmen von ganzen Zahlen positiv, von echten Brüchen negativ sind, so ist klar, daß man in den Tafeln zu negativen Zahlen keine Logarithmen finden kann. Um also mittelst der Logarithmen negative Zahlen miteinander zu multiplizieren, dividieren, potenzieren &c., muß man diese Zahlen während der Rechnung mit Logarithmen als positiv nehmen und dann vor das Resultat wieder das gehörige Vorzeichen setzen.

285.

Mit Hilfe der Logarithmen ist es nun oftmals auch leicht, die in einer Gleichung enthaltene unbekanntene GröÙe selbst dann zu

finden, wenn sie auch als Exponent vorkommt. Würde z. E. gefragt, auf welche Potenz die Zahl 2 erhoben werden muß, um die Zahl 64 hervorzubringen, so ist, wenn man den unbekanntem Exponenten vorläufig mit x bezeichnet:

$$2^x = 64$$

Auf beiden Seiten die Logarithmen genommen, kommt (§ 280):

$$x \log. 2 = \log. 64$$

Auf beiden Seiten durch den Koeffizienten von x dividiert, kommt:

$$x = \frac{\log. 64}{\log. 2} = \frac{1,8061800}{0,3010300}$$

also $x = 6$.

Anmerkung. Man muß $\frac{\log. 64}{\log. 2}$ nicht verwechseln mit $\log. \frac{64}{2} = \log. 64 - \log. 2$. Im letztern Fall hat man zwei Logarithmen voneinander zu subtrahieren, im erstern aber wirklich durcheinander zu dividieren. Hier kann man aber auch, wenn es bequemer ist, die Logarithmen als gewöhnliche Zahlen betrachten und den logarithmischen Quotienten wieder durch Logarithmen berechnen, indem man nach § 278 Logarithmen von Logarithmen nehmend, den des Divisors von dem des Dividend subtrahiert und zu dem neuen Logarithmus die Zahl aufschlägt.

2) Allgemein wenn:

$$ax = b$$

so ist $x \log. a = \log. b$

$$x = \frac{\log. b}{\log. a}$$

3) $amx \log. a - \frac{x}{2} \log. b = c^{k-x} \cdot d$.

$$mx \log. a + (n - \frac{x}{2}) \log. a = (k - x) \log. c + \log. d$$

$$xm \log. a + n \log. b - \frac{x}{2} \log. b = k \log. c - x \log. c + \log. d$$

$$xm \log. a - \frac{x}{2} \log. b + x \log. c = k \log. c + \log. d - n \log. b$$

$$x(m \log. a + \log. c - \frac{1}{2} \log. b) = k \log. c + \log. d - n \log. b$$

$$x = \frac{k \log. c + \log. d - n \log. b}{m \log. a + \log. c - \frac{1}{2} \log. b}$$

286.

* 1. Aufgabe. Man suche x aus der Gleichung:

$$a \cdot c^{mx} - b \cdot c^2 = d$$

Auflösung. Setzt man einstweilen $c^2 = z$, folglich $c^{mx} = z^{\frac{mx}{2}}$, so ist:

$$az^2 - bz = d$$

und hieraus (§ 231):

$$z = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ad}}{2a}$$

$$\frac{mx}{e^2} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ad}}{2a}$$

$$\frac{xm \log. c}{2} = \log. \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 4ad}}{2a} \right)$$

$$x = \frac{2}{m \log. c} \cdot \log. \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 4ad}}{2a} \right)$$

* 2. Aufgabe. Man suche x aus der Gleichung:

$$a^x + \frac{1}{a^x} - b = 0$$

Auflösung. Man findet leicht (mit a^x multipliziert und $a^x = z$ gesetzt, § 231):

$$x = \frac{\log. \left[\frac{1}{2} (b + \sqrt{b^2 - 4}) \right]}{\log. a}$$

287.

3. Aufgabe. Zwischen 2 und 8 sollen vier Glieder so eingeschaltet (interpoliert) werden, daß dann alle sechs Glieder eine geometrische Progression bilden.

Auflösung. Gegeben $a=2$; $t=8$; $n=6$ und e gesucht. Aus $t = a e^{n-1}$ (§ 253) folgt:

$$e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$

$$\log. e = \frac{\log. t - \log. a}{n-1} = \frac{\log. 8 - \log. 2}{6-1}$$

$$e = 1,319508.$$

Die Reihe ist also:

$$2, 2 \cdot (1,319 \dots), 2 \cdot (1,319 \dots)^2, 2 \cdot (1,319 \dots)^3, 2 \cdot (1,319 \dots)^4, 8.$$

288.

4. Aufgabe. Sissa, der Erfinder des Schachspiels, wurde von dem indischen König Scheran aufgefordert, sich für seine Erfindung eine königliche Belohnung zu wählen. Sissa erbat sich darauf die Summe der Weizenkörner, welche herauskommt, wenn das erste Feld des Schachbretts mit 1 Korn, das zweite mit 2, das dritte mit 4 und so, nach dieser Progression, alle 64 Felder durch, besetzt werden; nämlich: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 \dots + 2^{63}$. Wie groß ist die ganze Summe?

Auflösung. Gegeben $a=1$, $e=2$, $t=2^{63}$ und s gesucht (§ 254).

$$s = \frac{te - a}{e - 1}$$

$$s = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

Nahe genug $s = 2^{64}$, folglich $\lg s = 64 \lg 2$.

$$s = 18446750000000000000.$$

Die Summe beträgt also über 18 Trill. Genauer ist sie 18446744073709551615. Die letzten Ziffern können mittelst Logarithmen nicht gefunden werden, da diese über alle Vorstellung große Zahl die Grenzen der Tafeln überschreitet. 18 Trillionen Körner könnte die ganze Erde, wenn auch alles feste Land besät würde, selbst bei den ergiebigsten Ernten, nicht in 70 Jahren aufbringen.

289.

5. Aufgabe. Ein Weinfäß hält a z. B. 100 Liter Wein, hier von werden b z. B. 1 Liter abgezapft und ebensoviel Wasser wieder zugegossen. Nachdem sich Wasser und Wein vollkommen gemischt haben, werden von der Mischung abermals b Liter abgezapft und der Mangel wieder durch b Liter Wasser ergänzt. Wenn nun dieses n z. B. 20mal geschieht, wieviel Wein ist dann noch in der Mischung enthalten?

Auflösung. Um hier leichter auf den Ansatz zu kommen, überlege man die Sache so: Wird von 100 Liter Wein 1 Liter, d. h. der 100te Teil, abgezapft, und durch Wasser ergänzt, so bleiben noch 99 Liter Wein im Fasse. Wird von der wiederum 100 Liter haltenden Mischung 1 Liter, d. i. der 100te Teil, abgezapft, so muß doch von jedem Liter der Mischung der 100te Teil, mithin $\frac{1}{100} \cdot 99$ Liter Wein und $\frac{1}{100}$ Liter Wasser abfließen, denn soviel mal mehr Wein als Wasser im Fasse ist, soviel mal mehr muß auch von ersterem abfließen. Nach dem zweiten Abzapfen bleibt also noch $99 - \frac{1}{100} \cdot 99$ Wein (und $1 - \frac{1}{100} \cdot 1$ Wasser) zurück. Nach abermaliger Ergänzung und Abzapfung fließt von jeder Sorte wieder der 100te Teil ab. Mithin bleibt nach der dritten Abzapfung noch $(99 - \frac{1}{100} \cdot 99) - \frac{1}{100} (99 - \frac{1}{100} \cdot 99)$

reiner Wein &c. Allgemein: wird von a Liter Wein b Liter, d. i. $\frac{b}{a}$ mal so viel abgezapft, so bleiben noch $a - \frac{b}{a} \cdot a = a - b$ Liter Wein zurück. Nach

der Füllung wieder b Liter von der Mischung, also $\frac{b}{a} (a - b)$ Liter Wein abgezapft, bleiben noch $(a - b) - \frac{b}{a} (a - b) = \frac{a(a - b) - b(a - b)}{a} = \frac{(a - b)^2}{a}$ Liter

Wein zurück, nach der dritten Abzapfung bleibt noch $\frac{(a - b)^2}{a} - \frac{b(a - b)^2}{a^2} = \frac{(a - b)^3}{a^2}$, nach der vierten Abzapfung $\frac{(a - b)^4}{a^3}$ &c. Heißt also x der Rest des Weines, welcher nach der n ten Abzapfung noch im Fasse oder in der Mischung ist, so hat man allgemein:

$$x = \frac{(a - b)^n}{a^{n-1}}$$

$$\log. x = n \log. (a - b) - (n - 1) \log. a.$$

$$\text{Ist z. B. } a = 100; b = 1; n = 20$$

$$\text{so hat man } \log. x = 20 \log. 99 - 19 \log. 100$$

$$x = 81,79072.$$