Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

II. Geometrische Progressionen

urn:nbn:de:bsz:31-264709

249.

4. Aufgabe. Von einer arithmetischen Progression ist das 1ste Glied $=a$, die Differenz $=d$ und die Summe aller Glieder $=s$ gegeben; man sucht die Formel für das Endglied t.

Auflösung. Die beiden unbekannten Gröfsen t, n der fraglichen Progression sind in den beiden Grundformeln:

$$t=a+(n-1)\,d \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$s=(a+t)\frac{n}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

zerstreut enthalten. Wir eliminieren also die nicht verlangte unbekannte Gröfse n, indem wir am bequemsten ihren Wert aus (1) ziehen und in (2) substituieren.

$$n=\frac{t-a}{d}+1$$

$$\text{mithin: } s=(a+t)\cdot\frac{t-a+d}{2d}$$

$$\text{hieraus: } t=-\tfrac{1}{2}d\pm\sqrt{2ds+(a-\tfrac{1}{2}d)^2}$$

II. Geometrische Progressionen.

250.

Eine Zahlenreihe, bei welcher durchgehends ein solches Gesetz stattfindet, dafs immer gleiche Quotienten kommen, wenn man mit einem beliebigen Gliede in das nächstfolgende dividiert, heifst eine geometrische Progression und zwar eine steigende oder fallende, je nachdem die Glieder immer gröfser oder kleiner werden. Der beständige Quotient heifst hier der Exponent der Reihe. Geometrische Reihen oder Progressionen sind z. B. folgende:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96 \ldots\ldots$$
$$9,\ 3,\ 1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{27} \ldots\ldots$$
$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{32},\ \tfrac{1}{64} \ldots\ldots$$

Bei der 1sten steigenden Progression ist 2 der Exponent, bei der 2ten fallenden Progression $\frac{1}{3}$, bei der 3ten $\frac{1}{2}$ der Exponent.

251.

Ist das Anfangs-Glied und der Exponent einer geometrischen Progression gegeben, so kann man die Reihe leicht bis zu jedem beliebigen Gliede entwickeln. Man erhält offenbar das 2te Glied, indem man das erste mit dem Exponenten multipliziert, ferner das 2te Glied mit dem Exponenten, oder was dasselbe ist, das 1te Glied mit der 2ten Potenz vom Exponenten multipliziert, giebt das 3te Glied &c., das 99ste Glied mit dem Exponenten oder das 1ste Glied mit der 99sten Potenz vom Exponenten multipliziert, giebt das 100ste Glied &c.

Soll z. B. 2 das erste Glied und 3 der Exponent sein, so kommt die Reihe:

$$\underbrace{2}_{1};\quad \underbrace{2\cdot 3}_{2};\quad \underbrace{2\cdot 3^2}_{3};\quad \underbrace{2\cdot 3^3}_{4};\quad \underbrace{2\cdot 3^4}_{5}\cdots\underbrace{2\cdot 3^9}_{\text{10tes Glied}}\cdots$$

oder: 2, 6, 18, 54, 162 ....

Soll 64 das erste Glied und $\frac{1}{2}$ der Exponent sein, so hat man:

$$\underbrace{64}_{1};\quad \underbrace{64\cdot\tfrac{1}{2}}_{2};\quad \underbrace{64\cdot(\tfrac{1}{2})^2}_{3};\quad \underbrace{64\cdot(\tfrac{1}{2})^3}_{4}\cdots\underbrace{64\cdot(\tfrac{1}{2})^9}_{10}\cdots$$

oder: 64, 32, 16 8........... $\frac{1}{8}$ ....

252.

Sowie bei der arithmetischen Reihe, muſs man sich auch bei der geometrischen Reihe folgende fünf Gröſsen und deren übliche Bezeichnung merken, nämlich: das Anfangsglied $=a$, den Exponenten $=e$, die Anzahl der Glieder $=n$, das Endglied $=t$, und die Summe aller Glieder $=s$.

Jede dieser fünf Gröſsen ist eine bestimmte Funktion von je drei der übrigen, und kann, sobald diese drei in bestimmten Zahlen gegeben sind, daraus berechnet werden, ohne daſs man die Reihe selbst zu entwickeln braucht. Die wichtigsten Fragen sind jedoch nach der Gröſse eines bestimmten Gliedes und nach der Summe aller.

253.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man die Gröſse t eines bestimmten Gliedes berechnen kann, wenn die Stellzahl n desselben, das erste Glied a, und der Exponent e der Progression gegeben sind.

Auflösung. Nach § 251 ist die Reihe:

$$\underbrace{a}_{1},\quad \underbrace{ae}_{2},\quad \underbrace{ae^2}_{3},\quad \underbrace{ae^3}_{4},\quad \underbrace{ae^4}_{5}\cdots\underbrace{ae^{n-1}}_{n\text{tes Glied}}$$

Man hat also: $t = a\cdot e^{n-1}$ ....(1)

In Worten: **Um die Gröſse des $n$ten Gliedes einer geometrischen Progression zu finden, muſs man den Exponenten auf die $(n-1)$te Potenz erheben und damit das erste Glied multiplizieren.**

Anmerkung. Ist n sehr groſs, so wird die Berechnung von t durch Logarithmen ungemein erleichtert. Überhaupt kommen die Logarithmen bei Aufgaben über geometrische Progressionen sehr zu statten, was jedoch erst im 21. Buche gezeigt werden kann, und bis dahin werden wir nur solche Erläuterungs-Beispiele wählen, welche sich ohne Logarithmen berechnen lassen.

Beispiel. Das erste Glied einer geometrischen Progression ist $\frac{1}{64}$, der Exponent 2, wie groſs ist das neunte Glied?

Auflösung. Gegeben $a = \frac{1}{64}$, $e = 2$, $n = 9$ und t gesucht.

$$t = a \cdot e^{n-1}$$

$$t = \tfrac{1}{64} \cdot 2^{9-1} = 4.$$

254.

Aufgabe. Die Summationsformel (das summatorische Glied) zu finden, nach welcher man aus dem ersten Gliede a, dem Exponenten e und dem letzten Gliede t die Summe der ganzen Progression berechnen kann.

Auflösung. Die Auflösung beruht auf einem kleinen Kunstgriff. Man bezeichne die Summe der geometrischen Progression: $a + ae + ae^2 \cdots + t$ mit s, nämlich:

$$s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \cdots + \frac{t}{e^2} + \frac{t}{e} + t \,\ldots\ldots\ldots (1)$$

multipliziere diese Gleichung (1) (in welcher das vorletzte Glied offenbar $\frac{t}{e}$ das vorvorletzte $\frac{t}{e^2}$ ist) auf beiden Seiten mit dem Exponenten e, so kommt:

$$es = ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \cdots + \frac{t}{e} + t + te \,\ldots\ldots (2)$$

subtrahiert man nun die 1ste Gleichung von der 2ten, so erhält man:

$$es - s = te - a$$

$$(e-1)\, s = te - a$$

$$s = \frac{te - a}{e - 1} \,\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

In Worten: Um die Summe einer geometrischen Progression zu finden, mufs man das letzte Glied mit dem Exponenten multiplizieren, hiervon das erste Glied subtrahieren und dann durch den um 1 verminderten Exponenten dividieren.

Der für s erhaltene Ausdruck findet häufig Anwendung und ist daher wohl zu merken.

Beispiele. Wie grofs ist die Summe der folgenden geometrischen Progression: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{128}$, $\frac{1}{256}$, $\frac{1}{512}$, $\frac{1}{1024}$. (§ 329.)

Auflösung. Gegeben: $a = 1$, $e = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{1024}$, s gesucht:

$$s = \frac{te - a}{e - 1}$$

$$s = \frac{\frac{1}{1024} \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{2047}{2048}}{-\frac{1}{2}}$$

$$s = 1\tfrac{1023}{1024}.$$

255.

Aus den beiden Grundformeln für die geometrische Progression:

$$\left.\begin{aligned} t &= a \cdot e^{n-1} \ldots\ldots\ (\mathrm{I}) \\ s &= \frac{te-a}{e-1} \ldots\ldots\ (\mathrm{II}) \end{aligned}\right\}$$

müssen nun, wenn irgend drei der Gröſsen a, e, n, t, s gegeben sind, die Formeln für die beiden übrigen auf ähnliche Weise, wie im § 245 gezeigt, abgeleitet werden. Einige auf geometrische Reihen führende Aufgaben lassen sich vermittelst Logarithmen lösen, andere führen auf höhere verwickelte Gleichungen, deren Auflösung die höhere Analysis lehrt.

256.

Auch Buchstaben-Ausdrücke, welche geometrische Progressionen bilden, können nach Formel II sehr kurz in eine Summe zusammengezogen werden. So sieht man z. B. gleich, daſs die vielteilige Gröſse:

$$b + bz + bz^2 + bz^3 + bz^4 + \cdots bz^{n-1}$$

eine geometrische Progression bildet, wo b das erste, bz^{n-1} das letzte Glied und z der Exponent ist. Substituiert man also diese Gröſsen statt a, t und e in die Formel $s = \frac{te-a}{e-1}$, so ist:

$$b + bz + bz^2 + bz^3 \cdots + bz^{n-1} = \frac{b(z^n - 1)}{z - 1}$$

$$1 + e + e^2 + e^3 + e^4 \cdots + e^{n-1} = \frac{e^n - 1}{e - 1} = \frac{1 - e^n}{1 - e}$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \cdots + x^{2n} = \frac{-x^{2n+1} - 1}{-x - 1} = \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x}$$

$$y + x + \frac{x^2}{y} + \frac{x^3}{y^2} + \frac{x^4}{y^3} + \cdots + \frac{x^n}{y^{n-1}} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{(x-y)\, y^{n-1}}$$